ECG4
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 19

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Inégalité de Markov**

  Soit X une v.a.r. qui admet une espérance.
  On suppose de plus que : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ (*i.e.* X est presque sûrement positive ou nulle). Alors :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}([X \geqslant a]) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Preuve.
Soit $a > 0$. Considérons la v.a.r. Y définie par :

$$\begin{array}{rccl} Y & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{si } X(\omega) \geqslant a \\ 0 & \text{si } X(\omega) < a \end{array} \right. \end{array}$$

Listons quelques propriétés de Y :

- $Y(\Omega) = \{0, a\}$ (Y est donc une v.a.r. finie).
- $[Y = a] = [X \geqslant a]$ (puisque $Y(\omega) = a \Leftrightarrow X(\omega) \geqslant a$).
- $[Y = 0] = [X < a]$ (puisque $Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow X(\omega) < a$).

1) Comme Y est finie, Y admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \underset{\displaystyle \mathbb{P}([X < a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}([Y = 0])}} + a \times \underset{\displaystyle \mathbb{P}([X \geqslant a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}([Y = a])}} = a \times \mathbb{P}([X \geqslant a])$$

2) On remarque aussi que : $Y \leqslant X$. En effet :

- × $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant a \Rightarrow Y(\omega) = a$
- × $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) < a \Rightarrow Y(\omega) = 0)$

3) Par croissance de l'espérance, on déduit des deux points précédents que :

$$\underset{\displaystyle a\,\mathbb{P}([X \geqslant a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}(Y)}} \leqslant \mathbb{E}(X)$$

On conclut en divisant de part et d'autre par $a > 0$.

□

- **Loi faible des grands nombres**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. **indépendantes**, de **même espérance** m et de **même variance** σ^2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \dfrac{X_1+\dots+X_n}{n}$. Alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\ \left|\bar{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

On dit que $\bar{X}_n$ *converge en probabilité* vers la variable constante égale à m.

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$.
- La v.a.r. $\overline{X}_n$ admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $X = \overline{X}_n$. On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\
 & = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
 & = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m & \textit{(car : } \forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{E}(X_i)=m\textit{)} \\
 & = & \dfrac{\cancel{n}\, m}{\cancel{n}} \ = \ m &
\end{array}$$

- Ensuite :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\
 & = & \dfrac{1}{n^2}\,\mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\
 & = & \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) & \textit{(car } X_1,\ \dots,\ X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
 & = & \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma^2 & \textit{(car : } \forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{E}(X_i)=m\textit{)} \\
 & = & \dfrac{\cancel{n}\sigma^2}{n^{\cancel{2}}} \ = \ \dfrac{\sigma^2}{n} &
\end{array}$$

- On en déduit :

$$0 \ \leqslant\ \mathbb{P}\left(\left[\left|\bar{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Or :
× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$
× $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sigma^2}{n\,\varepsilon} = 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\ \left|\bar{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

□

- **Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson**

  Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

  Alors : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$, où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

  Démonstration.
  On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$. On a alors, pour tout $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{\lambda^k}{n^k}\,\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\,\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}\,\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\,\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

  Intéressons-nous aux termes de ce produit.

  - $\dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{n^k} = 1$
  - Notons $u_n = \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

    Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda}{n} = 0$, donc : $\ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\lambda}{n}$.

    D'où : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n} \times \left(-\dfrac{\lambda}{\cancel{n}}\right) = -\lambda$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\lambda$.

    Or la fonction exp est continue en $-\lambda$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{-\lambda}$.
  - Enfin, comme $1 - \dfrac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$$

  On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])$$

  où X est une v.a. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

  Comme (X_n) est une suite de v.a.r. discrètes et X est une v.a.r. discrète, alors on a bien montré :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$$

  □

Connaissances exigibles

Fonctions de deux variables

- Définition et propriétés de la distance $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Continuité en un point, opérations sur les fonctions continues
- Dérivées partielles d'ordre 1, gradient
- Classe $\mathcal{C}^1$, opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, DL à l'ordre 1
- Dérivées partielles d'ordre 2, matrice hessienne
- Classe $\mathcal{C}^2$, opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de Schwarz, DL d'ordre 2
- Boule ouverte et fermée de $\mathbb{R}^2$, partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}^2$, partie bornée de $\mathbb{R}^2$
- Définition extremum local, point critique
- Condition nécessaire d'existence d'un extremum
- Condition suffisante d'existence d'un extremum (version avec les valeurs propres de la matrice hessienne : la version avec le déterminant de la matrice hessienne n'est pas au programme)
- Extremum global
- Toute fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes

Convergence et approximations de v.a.r.

- Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres, Théorème central limite.
- Convergence en loi (convergence des fonctions de répartition), cas particulier des v.a. discrètes.
- Approximations : d'une loi binomiale par une loi de Poisson, d'une loi binomiale par une loi normale, d'une loi de Poisson par une loi normale.
- Correction de continuité.