ECG4
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 17

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :
- si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Résolution d'une équation linéaire homogène d'ordre** 1
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
  Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.
  On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :
$$y'(t) + a(t)\, y(t) \;=\; 0$$
Alors :
$$\boxed{y \text{ solution de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)}}$$
Autrement dit :
$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \ \middle|\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Démonstration.
- Remarquons d'abord que, puisque la fonction a est continue I, elle admet bien une primitive A (de classe $\mathcal{C}^1$ sur I).
- Soit $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. On note z la fonction définie par :
$$z \;:\; \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t)\mathrm{e}^{A(t)} \end{array}$$
  La fonction z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus, pour tout $t \in I$:
$$z'(t) \;=\; y'(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} + y(t) \times A'(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} \;=\; y'(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} + a(t)\, y(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} \;=\; \big(y'(t) + a(t)\, y(t)\big)\, \mathrm{e}^{A(t)}$$
- On obtient alors :
$$\begin{array}{rcl} y \text{ solution de } (H) & \Leftrightarrow & \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)\, y(t) = 0 \\[2mm] & \Leftrightarrow & \forall t \in I,\ \big(y'(t) + a(t)\, y(t)\big)\, \mathrm{e}^{A(t)} = 0 \quad \textit{(car : } \forall t \in I,\ \mathrm{e}^{A(t)} \neq 0\textit{)} \\[2mm] & \Leftrightarrow & \forall t \in I,\ z'(t) = 0 \\[2mm] & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ z(t) = \lambda \\[2mm] & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ y(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} = \lambda \\[2mm] & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ y(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)} \\[2mm] & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$$

$\square$

- **Résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 ou d'ordre 2 non homogène**
  Quelques exemples :
  × $y' - 3y = \mathrm{e}^{-t}$
  × $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{t}$
  × $y'' - 5y' + 4y = t\,\mathrm{e}^{t}$

Connaissances exigibles

Équations différentielles linéaires et systèmes différentiels linéaires

- Définitions d'une équation différentielle d'ordre p, linéaire, à coefficients constants, homogène. Définitions d'une solution d'une équation différentielle, d'une trajectoire, d'un équilibre, d'un problème de Cauchy d'ordre p.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre p définie sur I est un sous-espace vectoriel de $C^p(I, \mathbb{R})$.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire (E) définie sur I est $\{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$ où f_0 est une solution particulière de (E) et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).
  Méthode de résolution d'une EDL.
- Principe de superposition
- Équations différentielles linéaire d'ordre 1 :
  × Solution de l'équation homogène dans le cas où l'EDL est à coefficients constants.

  > Si l'EDL n'est pas à coefficients constants, l'étudiant doit savoir retrouver l'ensemble des solutions de l'homogène associée (*cf* question de cours). Le résultat n'est pas au programme d'ECG.

  × Solutions remarquables dans le cas d'une EDL à coefficients constants.
  × Méthode de variation de la constante.
  × Le problème de Cauchy d'ordre 1 admet une unique solution.
  × L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
- Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
  × Définitions d'équation caractéristique et polynôme caractéristique, régime apériodique, régime critique, régime pseudo-périodique.
  × Solution de l'équation homogène dans le cas où le polynôme caractéristique admet au moins une racine réelle.
  × Solutions remarquables.
  × Le problème de Cauchy d'ordre 2 admet une unique solution.
  × L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R}^2 \\ g & \mapsto & \big(g(0), g'(0)\big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
- Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants
  × Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réells.
  × Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

- × Résolution dans le cas où A est une matrice **diagonalisable** de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
- × Comportement asymptotique des trajectoires en fonction du signe des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable (en particulier dans le cas où $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$)
- × Équivalence entre une équation scalaire d'ordre 2 et un système de 2 équations d'ordre 1.

> - Aucun résultat sur les équations différentiels non linéaires n'est au programme. Aucun résultat sur les équation linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants n'est au programme. Les étudiants devront systématiquement être guidés dans leurs résolutions.
> - La notion de Wronskien n'est pas au programme d'ECG.
> - Le programme ne contient aucun résultat sur les systèmes différentiels à coefficients non constants, aucun résultat sur les systèmes différentiels non homogènes.

Fonctions de deux variables

- Définition et propriétés de la distance $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Continuité en un point, opérations sur les fonctions continues
- Dérivées partielles d'ordre 1, gradient
- Classe $\mathcal{C}^1$, opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, DL à l'ordre 1
- Dérivées partielles d'ordre 2, matrice hessienne
- Classe $\mathcal{C}^2$, opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de Schwarz, DL d'ordre 2
- Boule ouverte et fermée de $\mathbb{R}^2$, partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}^2$, partie bornée de $\mathbb{R}^2$
- Définition extremum local, point critique
- Condition nécessaire d'existence d'un extremum
- Condition suffisante d'existence d'un extremum (version avec les valeurs propres de la matrice hessienne : la version avec le déterminant de la matrice hessienne n'est pas au programme)
- Extremum global
- Toute fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes