ECG4
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 16

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :
× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Propriétés de Φ, où Φ est la fonction de répartition d'une loi** $\mathcal{N}(0,1)$
  - $\phi(0) = \mathbb{P}([X \leqslant 0]) = \dfrac{1}{2}$
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$\mathbb{P}([|X| \leqslant x]) = 2\phi(x) - 1$$

  Démonstration.
  - Comme φ est une densité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt$ converge. De plus :
  $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt &= 2\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\ dt \quad \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\ &= 2\,\phi(0) \\ &= 2\,\mathbb{P}([X \leqslant 0]) \end{aligned}$$
  - Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$\phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\ dt$$
  On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \psi(t)}$, avec la fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ définie par $\psi : t \mapsto -t$.
  $$\left|\begin{array}{l} u = -t \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = -x \ \Rightarrow\ u = x \end{array}\right.$$
  On a donc :
  $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\ dt &= \int_{x}^{+\infty} \varphi(-u)\ du \\ &= \int_{x}^{+\infty} \varphi(u)\ du \qquad \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\ du - \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\ du \\ &= 1 - \phi(x) \end{aligned}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \\ & = & \phi(x) - \phi(-x) \\ & = & \phi(x) - (1 - \phi(x)) \\ & = & 2\,\phi(x) - 1 \end{array}$$

□

- **Résolution d'une équation linéaire homogène d'ordre** 1

  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

  Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.

  On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :

$$y'(t) + a(t)\,y(t) \;=\; 0$$

Alors :

$$\boxed{y \text{ solution de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Démonstration.

- Remarquons d'abord que, puisque la fonction a est continue I, elle admet bien une primitive A (de classe $\mathcal{C}^1$ sur I).
- Soit $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. On note z la fonction définie par :

$$z \;:\; \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t)\mathrm{e}^{A(t)} \end{array}$$

  La fonction z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus, pour tout $t \in I$:

$$z'(t) \;=\; y'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} + y(t) \times A'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} \;=\; y'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} + a(t)\,y(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} \;=\; \big(y'(t) + a(t)\,y(t)\big)\,\mathrm{e}^{A(t)}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} y \text{ solution de } (H) & \Leftrightarrow & \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)\,y(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I,\ \big(y'(t) + a(t)\,y(t)\big)\,\mathrm{e}^{A(t)} = 0 \quad \textit{(car : } \forall t \in I,\ e^{A(t)} \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I,\ z'(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ z(t) = \lambda \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ y(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} = \lambda \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$$

□

- **Résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 ou d'ordre 2 non homogène**
  Quelques exemples :
  × $y' - 3y = \mathrm{e}^{-t}$
  × $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{t}$
  × $y'' - 5y' + 4y = t\,\mathrm{e}^{t}$

Connaissances exigibles

Variables aléatoires à densité

- Définition v.a. à densité, caractérisation fonction de répartition (fdr) et densité de probabilité, lien entre fdr et densité
- Formules de calcul de $\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ et autres, pour X une v.a. à densité
- Définition, linéarité et croissance de l'espérance d'une v.a. à densité
- Théorème de transfert
- Moments d'ordre r
- Définitions et propriétés de la variance et de l'écart-type
- Définition indépendance de deux v.a., lemme des coalitions, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ **si X et Y sont indépendantes**
- Ensemble image, densité, fonction de répartition, espérance, variance, graphes : loi uniforme, loi exponentielle, lois normales
- Transformation affine d'une loi uniforme
- Propriétés de la fonction de répartition Φ d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$
- Transformée affine d'une loi gaussienne
- Lecture de la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Équations différentielles linéaires

- Définitions d'une équation différentielle d'ordre p, linéaire, à coefficients constants, homogène. Définitions d'une solution d'une équation différentielle, d'une trajectoire, d'un équilibre, d'un problème de Cauchy d'ordre p.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre p définie sur I est un sous-espace vectoriel de $C^p(I, \mathbb{R})$.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire (E) définie sur I est $\{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$ où f_0 est une solution particulière de (E) et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).
  Méthode de résolution d'une EDL.
- Principe de superposition
- Équations différentielles linéaire d'ordre 1 :
  × Solution de l'équation homogène dans le cas où l'EDL est à coefficients constants.

  Si l'EDL n'est pas à coefficients constants, l'étudiant doit savoir retrouver l'ensemble des solutions de l'homogène associée (*cf* question de cours). Le résultat n'est pas au programme d'ECG.

    - Solutions remarquables dans le cas d'une EDL à coefficients constants.
    - Méthode de variation de la constante.
    - Le problème de Cauchy d'ordre 1 admet une unique solution.
    - L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

- Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
    - Définitions d'équation caractéristique et polynôme caractéristique, régime apériodique, régime critique, régime pseudo-périodique.
    - Solution de l'équation homogène dans le cas où le polynôme caractéristique admet au moins une racine réelle.
    - Solutions remarquables.
    - Le problème de Cauchy d'ordre 2 admet une unique solution.
    - L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R}^2 \\ g & \mapsto & \big(g(0), g'(0)\big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

- Aucun résultat sur les équations différentiels non linéaires n'est au programme. Aucun résultat sur les équation linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants n'est au programme. Les étudiants devront systématiquement être guidés dans leurs résolutions.
- La notion de Wronskien n'est pas au programme d'ECG.
- Les systèmes différentiels homogènes à coefficients constants ne sont pas au programme de cette colle (ils seront au programme de la semaine suivante).