ECG4
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 15

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Transformation carrée** :

  Soit X une v.a.r. à densité f_X.

  1) La var $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité.

  2) De plus, une de ses densités est donnée par :

$$\boxed{f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ \left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto x^2$ de sorte que : $Y = h(X)$. Alors :

$$Y(\Omega) \ = \ \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \ \subset \ [0, +\infty[\quad \textit{(par définition de h)}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

  × si $x < 0$, alors : $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$). Donc :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) \ &= \ \mathbb{P}\big(\ [X^2 \leqslant x]\ \big) \\ &= \ \mathbb{P}\big(\ [-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]\ \big) \quad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ &= \ F_X\big(\sqrt{x}\big) - F_X\big(-\sqrt{x}\big) \quad \textit{(car X est à densité)} \end{aligned}$$

- La fonction F_Y est continue :

  × sur $]-\infty, 0[$, en tant que fonction constante,

  × sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme de composées de fonctions continues sur des intervalles adéquats. En effet, la fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.

× en 0. En effet :

- d'une part : $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = 0$,
- d'autre part : $\lim\limits_{x\to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = F_X(\sqrt{0}) - F_X(-\sqrt{0}) = 0$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = F_Y(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} F_Y(x)$.

- La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points, car c'est le cas de la fonction F_X (en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité).
- Déterminons une densité de Y.

× Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$f_Y(x) \;=\; F_Y'(x) \;=\; 0$$

× Soit $x \in]0, +\infty[$ en lequel F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F_Y'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, F_X'(\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\, F_X'(-\sqrt{x})\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, f_X(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\, f_X(-\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) \end{aligned}$$

× Soit $x \in [0, +\infty[$ en lequel F_Y n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

On choisit : $f_Y(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, \left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right)$.

□

- **Méthode d'inversion pour la loi exponentielle**

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[) \quad \Rightarrow \quad Y = -\dfrac{1}{\lambda}\, \ln(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\, \ln(1-x)$, de telle sorte que $Y = h(X)$.

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $X(\Omega) =]0,1[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) \;=\; h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h(]0,1[) \\ &= \Big]\lim_{x\to 0} h(0), \lim_{x\to 1} h(x)\Big[\qquad \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur }]0,1[\ (*)\textit{)} \\ &=]0, +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi : $Y(\Omega) =]0, +\infty[$.

On peut démontrer $(*)$ par une rapide étude de fonction :

× la fonction h est dérivable (donc continue) sur $]0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables.

× soit $x \in]0,1[$.

$$h'(x) \;=\; -\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{1-x}\right) \;=\; \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$

Donc la fonction h est strictement croissante sur $]0,1[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \leqslant 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  - × si $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-X) \geqslant -\lambda\, x]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1 - X \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right]\right) & \\ & = & F_X\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) & \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \textit{(car } 1 - e^{-\lambda\, x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

  Or :

$$\begin{array}{lcl} & 0 < x & \\ \text{donc} & 0 > -\lambda\, x & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 = \mathrm{e}^0 > \mathrm{e}^{-\lambda y} > 0 & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{ainsi} & 0 < 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} < 1 & \end{array}$$

  Finalement : $F_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$.

  On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi. Ainsi : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

□

- **Propriétés de Φ, où Φ est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$**
  - $\phi(0) = \mathbb{P}([X \leqslant 0]) = \dfrac{1}{2}$
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}([|X| \leqslant x]) = 2\phi(x) - 1$$

Démonstration.

- Comme φ est une densité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt$ converge. De plus :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt & = & 2\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\ dt & \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\ & = & 2\,\phi(0) & \\ & = & 2\,\mathbb{P}([X \leqslant 0]) & \end{array}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\ dt$$
On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \psi(t)}$, avec la fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ définie par $\psi : t \mapsto -t$.
$$\left|\begin{array}{l} u = -t \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = -x \ \Rightarrow\ u = x \end{array}\right.$$
On a donc :
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\ dt &= \int_{x}^{+\infty} \varphi(-u)\ du \\ &= \int_{x}^{+\infty} \varphi(u)\ du \qquad \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\ du - \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\ du \\ &= 1 - \phi(x) \end{aligned}$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) &= \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \\ &= \phi(x) - \phi(-x) \\ &= \phi(x) - (1 - \phi(x)) \\ &= 2\,\phi(x) - 1 \end{aligned}$$

□

Connaissances exigibles

Variables aléatoires à densité

- Définition v.a. à densité, caractérisation fonction de répartition (fdr) et densité de probabilité, lien entre fdr et densité
- Formules de calcul de $\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ et autres, pour X une v.a. à densité
- Définition, linéarité et croissance de l'espérance d'une v.a. à densité
- Théorème de transfert
- Moments d'ordre r
- Définitions et propriétés de la variance et de l'écart-type
- Définition indépendance de deux v.a., lemme des coalitions, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ **si X et Y sont indépendantes**
- Ensemble image, densité, fonction de répartition, espérance, variance, graphes : loi uniforme, loi exponentielle, lois normales
- Transformation affine d'une loi uniforme
- Propriétés de la fonction de répartition Φ d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$
- Transformée affine d'une loi gaussienne
- Lecture de la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$