ECG4
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 14

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Détermination d'un DL d'ordre** 2
  On demandera à l'étudiant de déterminer le DL à l'ordre 2 d'une fonction.
- **Transformation carrée** :
  Soit X une v.a.r. à densité f_X.
  1) La var $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité.
  2) De plus, une de ses densités est donnée par :

$$\boxed{f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ (f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto x^2$ de sorte que : $Y = h(X)$. Alors :

$$Y(\Omega) \ = \ \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \ \subset \ [0, +\infty[\quad \textit{(par définition de } h\textit{)}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 0$, alors : $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$). Donc :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big(\left[X^2 \leqslant x\right]\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\left[-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\right]\big) && \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ &= F_X\big(\sqrt{x}\big) - F_X\big(-\sqrt{x}\big) && \textit{(car } X \textit{ est à densité)} \end{aligned}$$

- La fonction F_Y est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$, en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme de composées de fonctions continues sur des intervalles adéquats. En effet, la fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.
  × en 0. En effet :
  - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0$,
  - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = F_X(\sqrt{0}) - F_X(-\sqrt{0}) = 0$.

  D'où : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = F_Y(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x)$.

- La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points, car c'est le cas de la fonction F_X (en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité).
- Déterminons une densité de Y.
  × Soit $x \in]0, +\infty[$.
  $$f_Y(x) \ = \ F_Y'(x) \ = \ 0$$
  × Soit $x \in]0, +\infty[$ en lequel F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$.
  $$\begin{aligned} f_Y(x) &= F_Y'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ F_X'(\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \ F_X'(-\sqrt{x})\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ f_X(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ f_X(-\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ (f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})) \end{aligned}$$
  × Soit $x \in [0, +\infty[$ en lequel F_Y n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
  On choisit : $f_Y(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ (f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x}))$.

□

- **Méthode d'inversion pour la loi exponentielle**
  Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[) \quad \Rightarrow \quad Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

  Démonstration.
  - Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda} \ \ln(1-x)$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
    Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $X(\Omega) =]0,1[$. On en déduit :
    $$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h(]0,1[) \\ &= \Big]\lim_{x \to 0} h(0), \lim_{x \to 1} h(x)\Big[&& \text{\textit{(car h est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ $(*)$)}} \\ &=]0, +\infty[\end{aligned}$$
    Ainsi : $Y(\Omega) =]0, +\infty[$.
    On peut démontrer $(*)$ par une rapide étude de fonction :
    × la fonction h est dérivable (donc continue) sur $]0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables.
    × soit $x \in]0,1[$.
    $$h'(x) \ = \ -\frac{1}{\lambda} \ \left(-\frac{1}{1-x}\right) \ = \ \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$
    Donc la fonction h est strictement croissante sur $]0,1[$.
  - Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
    × si $x \leqslant 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. Donc :
    $$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

$\times$ si $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-X) \geqslant -\lambda\, x]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-X \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right]\right) & \\ & = & F_X\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \textit{(car } 1-e^{-\lambda\, x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{lcl} & 0 < x & \\ \text{donc} & 0 > -\lambda\, x & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 = \mathrm{e}^0 > \mathrm{e}^{-\lambda y} > 0 & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{ainsi} & 0 < 1-\mathrm{e}^{-\lambda y} < 1 & \end{array}$$

Finalement : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi. Ainsi : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

$\square$

Connaissances exigibles

Comparaison de fonctions et développements limités

- Fonctions négligeables, équivalentes. Équivalents usuels
- Développements limités d'ordre 1 et 2. Formule de Taylor-Young. Développements limités usuels.

⚠ Le programme de Maths appliquées ne comporte que des développements limités jusqu'à l'ordre 2.

Variables aléatoires à densité

- Définition v.a. à densité, caractérisation fonction de répartition (fdr) et densité de probabilité, lien entre fdr et densité
- Formules de calcul de $\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ et autres, pour X une v.a. à densité
- Définition, linéarité et croissance de l'espérance d'une v.a. à densité
- Théorème de transfert
- Moments d'ordre r
- Définitions et propriétés de la variance et de l'écart-type
- Définition indépendance de deux v.a., lemme des coalitions, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ **si X et Y sont indépendantes**