

Programme de colle - Semaine 13

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8 .
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note ≤ 8 .

Questions de cours

En plus de la question de cours, la colle commencera **pour tous les élèves** par le calcul d'une intégrale à vue (impropre ou non), une IPP ou un changement de variable.

Exemples

$$\int_1^e \frac{1}{t \ln(t)} dt, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3} dt$$

• Détermination d'un DL d'ordre 2

On demandera à l'étudiant de déterminer le DL à l'ordre 2 d'une fonction.

• Utilisation de la parité en intégration

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $] -a, a[$.

Si la fonction f est *paire*, alors $\int_{-a}^a f(t) dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^a f(t) dt$ converge et dans ce cas, on a :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

Démonstration.

Supposons f paire. Par définition :

$$\int_{-a}^a f(t) dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_{-a}^0 f(t) dt \text{ et } \int_0^a f(t) dt \text{ convergent}$$

(\Rightarrow) Évident par définition.

(\Leftarrow) Supposons que l'intégrale $\int_{-a}^0 f(t) dt$ est convergente.

Soit $B \in] -a, 0[$. On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad (\text{donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet t = B \Rightarrow u = -B \\ \bullet t = 0 \Rightarrow u = -0 = 0 \end{array} \right.$$

La fonction $\psi : u \mapsto -u$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, -B]$. Le changement de variable est donc licite. On obtient ainsi :

$$\int_B^0 f(t) dt = \int_{-B}^0 f(-u) (-du) = - \int_{-B}^0 f(u) du = \int_0^{-B} f(u) du$$

(la deuxième égalité est obtenue par parité de la fonction f)

Ainsi, comme $\int_0^a f(u) du$ est convergente, alors $\lim_{B \rightarrow -a} \int_0^{-B} f(u) du$ existe. L'intégrale $\int_{-a}^0 f(t) dt$ est donc convergente. On en déduit que l'intégrale $\int_{-a}^a f(u) du$ est convergente.

De plus :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

□

• Développement limité d'ordre 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f \text{ admet un développement limité d'ordre 1 en } x_0$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{cases}$

Ainsi, si f est dérivable en x_0 , il existe $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel qu'au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons f dérivable en x_0 .

$$\text{Notons } \varepsilon : x \mapsto \begin{cases} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c'est le ε donné par la formule finale)

On a alors $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) \\ \text{donc } \varepsilon(x) + f'(x_0) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{et } f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Au final, on a bien :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

(\Leftarrow) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

$$\times a_0 = f(x_0) \text{ (le développement est vérifié en } x_0 \text{ !)}$$

$$\times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \varepsilon(x)$$

On en conclut que $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow x_0$.

□

Connaissances exigibles

Intégration

- Techniques de calculs d'intégrales sur un segment : IPP, changement de variables (les élèves doivent être capable d'identifier un changement de variable affine et peuvent être guidés pour les autres), intégration à vue.
- Utilisation de la définition de la convergence d'une intégrale impropre
- Intégrales de Riemann impropres en $+\infty$
- Critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des intégrales impropres de fonctions continues positives
- Convergence absolue d'une intégrale
- Comparaison série / intégrale
- Somme de Riemann (la colle ne doit pas se focaliser sur ce point)



Les intégrales impropres en un point ne sont plus au programme. Les élèves sont censés travailler uniquement sur les intégrales impropres en $-\infty$ ou $+\infty$. Nous avons néanmoins vu en classe comment les étudier toutes (nous avons notamment énoncé le critère de convergence d'une intégrale de Riemann impropre en 0).

Comparaison de fonctions et développements limités

- Fonctions négligeables, équivalentes. Équivalents usuels
- Développements limités d'ordre 1 et 2. Formule de Taylor-Young. Développements limités usuels.



Le programme de Maths appliquées ne comporte que des développements limités jusqu'à l'ordre 2.