ECG4
Mathématiques

# Programme de colle - Semaine 12

---

## Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note $> 8$.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

## Questions de cours

**En plus** de la question de cours, la colle commencera **pour tous les élèves** par le calcul d'une intégrale à vue (impropre ou non), une IPP ou un changement de variable.

**Exemples**

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\,\ln(t)}\,dt, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3}\,dt$$

- **Cas d'une unique valeur propre**
  On note $b$ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

  $$b : P \mapsto P - P'$$

  Alors $B$, la matrice représentatice $B$ de $b$ dans la base canonique $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, n'est pas diagonalisable.

  *Démonstration.*

  - Montrons d'abord que $b$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

    × Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(Q_1, Q_2) \in \big(\mathbb{R}_2[X]\big)^2$.

    $$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2) &= (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2) - (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2)' \\ &= \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 - (\lambda_1 \cdot Q_1' + \lambda_2 \cdot Q_2') && \textit{(par linéarité de la dérivée)} \\ &= \lambda_1 \cdot (Q_1 - Q_1') + \lambda_2 \cdot (Q_2 - Q_2') \\ &= \lambda_1 \cdot f(Q_1) + \lambda_2 \cdot f(Q_2) \end{aligned}$$

    × Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
    Alors : $b(P) = P - P' \in \mathbb{R}[X]$. Or : $\deg(P) \leqslant 2$ et $\deg(P') \leqslant 2$. D'où : $\deg\big(b(P)\big) \leqslant 2$.
    Ainsi : $b(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

    $$\boxed{\text{On en déduit que } b \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

  - Déterminons la matrice représentatice $B$ de $b$ dans la base canonique $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$.

× $\big(b(P_0)\big)(X) = P_0(X) - P_0'(X) = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$b(P_0) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_1)\big)(X) = P_1(X) - P_1'(X) = X - 1 = -P_0(X) + P_1(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_2)\big)(X) = P_2(X) - P_2'(X) = X^2 - 2X = -2\ P_1(X) + P_2(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = 0 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- La matrice $B$ est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux et $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$.

  $$\boxed{\mathrm{Sp}(b) = \mathrm{Sp}(B) = \{1\}}$$

- Montrons par l'absurde que $B$ n'est pas diagonalisable.
  Supposons que $B$ est diagonalisable.
  Il existe donc :

  × une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,

  × une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $B$,

  telles que $B = PDP^{-1}$. Or $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$. Donc :

  $$B \ = \ PDP^{-1} \ = \ PIP^{-1} \ = \ PP^{-1} \ = \ I$$

  Absurde !

  $$\boxed{\text{On en déduit que } b \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

- **Utilisation de la parité en intégration**
  Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
  Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-a, a[$.
  Si la fonction $f$ est *paire*, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\ dt$ converge et dans ce cas, on a :

  $$\int_{-a}^{a} f(t)\ dt \ = \ 2 \int_{0}^{a} f(t)\ dt$$

*Démonstration.*
Supposons $f$ paire. Par définition :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\ dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{-a}^{0} f(t)\ dt \text{ et } \int_{0}^{a} f(t)\ dt \text{ convergent}$$

($\Rightarrow$) Évident par définition.

($\Leftarrow$) Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\ dt$ est convergente.

Soit $B \in\ ]-a, 0[$. On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = B \ \Rightarrow\ u = -B \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = -0 = 0 \end{array}\right.$$

La fonction $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, -B]$. Le changement de variable est donc licite.
On obtient ainsi :

$$\int_{B}^{0} f(t)\ dt \ = \ \int_{-B}^{0} f(-u)\ (-du) \ = \ -\int_{-B}^{0} f(u)\ du \ = \ \int_{0}^{-B} f(u)\ du$$

*(la deuxième égalité est obtenue par parité de la fonction $f$)*
Ainsi, comme $\displaystyle\int_{0}^{a} f(u)\ du$ est convergente, alors $\displaystyle\lim_{B \to -a} \int_{0}^{-B} f(u)\ du$ existe. L'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\ dt$ est donc convergente. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(u)\ du$ est convergente.
De plus :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\ dt \ = \ \int_{-a}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{a} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{a} f(t)\ dt + \int_{0}^{a} f(t)\ dt \ = \ 2\int_{0}^{a} f(t)\ dt$$

□

- **Développement limité d'ordre 1**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

$$\begin{array}{c} f \text{ est dérivable} \\ \text{en } x_0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} f \text{ admet un développement limité} \\ \text{d'ordre 1 en } x_0 \end{array}$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{\begin{array}{l} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{array}\right.$

Ainsi, si $f$ est dérivable en $x_0$, il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel qu'au voisinage de $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

*Démonstration.*

($\Rightarrow$) Supposons $f$ dérivable en $x_0$.

Notons $\varepsilon : x \mapsto \begin{cases} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

*(c'est le $\varepsilon$ donné par la formule finale)*

On a alors $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$ :

$$\begin{array}{ll} & \varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) \\ \text{donc} & \varepsilon(x) + f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{et} & f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \end{array}$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Au final, on a bien :
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Si $f$ possède un développement limité d'ordre 1 alors :

× $a_0 = f(x_0)$ (le développement est vérifié en $x_0$ !)

× $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \varepsilon(x)$

On en conclut que $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie quand $x \to x_0$.

□

# Connaissances exigibles

## Intégration

- Techniques de calculs d'intégrales sur un segment : IPP, changement de variables (les élèves doivent être capable d'identifier un changement de variable affine et peuvent être guidés pour les autres), intégration à vue.
- Utilisation de la définition de la convergence d'une intégrale impropre
- Intégrales de Riemann impropres en $+\infty$
- Critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des intégrales impropres de fonctions continues positives
- Convergence absolue d'une intégrale
- Comparaison série / intégrale
- Somme de Riemann (la colle ne doit pas se focaliser sur ce point)

> Les intégrales impropres en un point ne sont plus au programme. Les élèves sont censés travailler uniquement sur les intégrales impropres en $-\infty$ ou $+\infty$. Nous avons néanmoins vu en classe comment les étudier toutes (nous avons notamment énoncé le critère de convergence d'une intégrale de Riemann impropre en 0).

## Comparaison de fonctions et développements limités

- Fonctions négligeables, équivalentes. Équivalents usuels