ECG4
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 11

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Cas d'une unique valeur propre**
  On note b l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$b : P \mapsto P - P'$$

Alors B, la matrice représentatice B de b dans la base canonique $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, n'est pas diagonalisable.

Démonstration.

- Montrons d'abord que b est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
  × Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(Q_1, Q_2) \in \big(\mathbb{R}_2[X]\big)^2$.

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2) & = & (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2) - (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2)' & \\ & = & \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 - (\lambda_1 \cdot Q_1' + \lambda_2 \cdot Q_2') & \textit{(par linéarité de la dérivée)} \\ & = & \lambda_1 \cdot (Q_1 - Q_1') + \lambda_2 \cdot (Q_2 - Q_2') & \\ & = & \lambda_1 \cdot f(Q_1) + \lambda_2 \cdot f(Q_2) & \end{array}$$

  × Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
  Alors : $b(P) = P - P' \in \mathbb{R}[X]$. Or : $\deg(P) \leqslant 2$ et $\deg(P') \leqslant 2$. D'où : $\deg\big(b(P)\big) \leqslant 2$.
  Ainsi : $b(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } b \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

- Déterminons la matrice représentatice B de b dans la base canonique $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$.
  × $\big(b(P_0)\big)(X) = P_0(X) - P_0'(X) = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$b(P_0) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

  Et ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_1)\big)(X) = P_1(X) - P_1'(X) = X - 1 = -P_0(X) + P_1(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_2)\big)(X) = P_2(X) - P_2'(X) = X^2 - 2X = -2\ P_1(X) + P_2(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = 0 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- La matrice B est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux et $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(b) = \mathrm{Sp}(B) = \{1\}}$$

- Montrons par l'absurde que B n'est pas diagonalisable.
  Supposons que B est diagonalisable.
  Il existe donc :
  × une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,
  × une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B,

  telles que $B = PDP^{-1}$. Or $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$. Donc :

$$B \ = \ PDP^{-1} \ = \ PIP^{-1} \ = \ PP^{-1} \ = \ I$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que } b \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Attention : cette propriété n'est pas au programme. Il est néanmoins nécessaire de connaître sa démonstration.

Soient X et Y deux v.a. discrètes admettant un moment d'ordre 2.

$$(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y)$$

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  La v.a.r. $\lambda X + Y$ admet une variance comme combinaisons linéaire de v.a.r. admettant une variance.
  On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\lambda X + Y) &= \mathrm{Cov}(X + \lambda Y, X + \lambda Y) \\ &= \mathbb{V}(\lambda X) + 2\ \mathrm{Cov}(\lambda X, Y) + \mathbb{V}(Y) \\ &= \lambda^2\, \mathbb{V}(X) + 2\,\lambda\,\lambda\, \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y) \end{aligned}$$

- On note f la fonction polynomiale définie par :

$$f : \lambda \mapsto \mathbb{V}(X)\,\lambda^2 + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)\,\lambda + \mathbb{V}(Y)$$

  La fonction f est une fonction polynomiale de degré 2 en λ.
  On note P le polynôme de degré 2 associé.
- D'après le 1$^{\text{er}}$ point :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ f(\lambda) = \mathbb{V}(\lambda\, X + Y)$$

  Or une variance est toujours positive. Ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) \geqslant 0$.
- La fonction f étant positive, le polynôme associé P est de signe constant.
  Son discriminant Δ est donc négatif ou nul. Or :

$$\Delta \ = \ \big(2\,\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 - 4\,\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \ = \ 4\left(\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)\right)$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{ll} \text{comme} & \Delta \leqslant 0 \\ \text{alors} & 4\left(\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)\right) \leqslant 0 \\ \text{donc} & \big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \leqslant 0 \end{array}$$

$\square$

- **Caractérisation des éléments propres**
  Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
  Les propositions suivantes sont équivalentes.
  i) Le réel λ est une valeur propre de f.
  ii) L'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas bijectif.
  iii) L'ensemble $\ker(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.

  Démonstration.
- $f - \lambda \mathrm{id}$ est un endomorphisme de E, ev de dimension finie. Ainsi :

$$\begin{array}{ll} & f - \lambda\mathrm{id} \text{ est bijectif} \\ \Leftrightarrow & f - \lambda\mathrm{id} \text{ est injectif} \\ \Leftrightarrow & \ker(f - \lambda\mathrm{id}) = \{0_E\} \end{array}$$

  Les négations de ces propositions étant aussi équivalentes, on en déduit que : ***ii)*** $\Leftrightarrow$ ***iii)***.
- Démontrons alors ***i)*** $\Leftrightarrow$ ***iii)***. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} f(u) = \lambda\ u & \Leftrightarrow & f(u) - \lambda\ u = 0_E \\ & \Leftrightarrow & f(u) - (\lambda\ \mathrm{id}_E)\ u = 0_E \\ & \Leftrightarrow & (f - \lambda\ \mathrm{id}_E)\ u = 0_E \end{array}$$

  On en déduit que :

$$\begin{array}{ll} & \lambda \text{ est valeur propre de } f \\ \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } f(u) = \lambda\ u \\ \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } (f - \lambda\ \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\ \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } u \in \ker(f - \lambda\ \mathrm{id}_E) \end{array}$$

$\square$

Connaissances exigibles

Réduction

- Matrices de passages, représentations matricielles d'un endomorphisme dans des bases différentes, changement de bases
- Matrices semblables, lien entre puissances $k$ième de 2 matrices semblables
- Valeurs propres, vecteurs propres, spectre, sous-espaces propres
- Liens entre éléments propre de f et éléments propre de $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, caractérisation des éléments propres, lien entre inversibilité et la valeur propre 0, valeurs propres d'une matrice triangulaire
- Polynômes annulateurs
- Lien entre diagonalisabilité et dimensions des sous-espaces propres
- Diagonalisabilité des matrices symétriques

⚠ Les élèves ne savent pas trigonaliser une matrice seuls. On les guidera toujours pour un tel exercice.

⚠

- La notion d'endomorphisme diagonalisable n'est plus au programme. Seule la notion de matrice diagonalisable l'est.
- La condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité n'est plus au programme non plus. Les élèves ne peuvent donc pas démontrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable en remarquant que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est strictement inférieur à son ordre.

Commentaire

Les élèves doivent connaître les méthodes pour :
- passer de la représentation par endomorphisme à la représentation matricielle et vice versa.
- montrer qu'un vecteur est un vecteur propre
- déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice
- déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice
- savoir repérer si une matrice est diagonalisable dans les cas simples (triangulaire, symétrique)
- savoir repérer si 0 est valeur propre d'un endomorphisme grâce à matrice représentative
- déterminer une matrice de passage et savoir interpréter son inverse.
- diagonaliser une matrice (sans les guider dans les étapes de diagonalisation)