

Programme de colle - Semaine 1

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8 .
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note ≤ 8 .

Questions de cours

• **Critère de convergence des séries télescopiques :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

De plus, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0.$$

Démonstration.

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^n u_{k+1} - \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} u_j - \sum_{k=0}^n u_k && \text{(avec le changement} \\ &&& \text{d'indice } j = k + 1) \\ &= \sum_{j=1}^n u_j + u_{n+1} - \left(\sum_{k=1}^n u_k + u_0 \right) \\ &= u_{n+1} - u_0 \end{aligned}$$

Donc (S_n) converge si et seulement si (u_n) converge.

De plus, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_0) = \ell - u_0. \quad \square$$

• **Comparaison série / intégrale :**

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, continue, positive et décroissante sur cet intervalle.

Alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t) dt\right)$ ont même nature.

Démonstration.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme f est décroissante, on a :

$$\forall x \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant bien ordonnées ($k \leq k+1$) :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

On somme l'encadrement précédent pour k variant de 0 à $n-1$. On obtient ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

et, si on note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum f(n)$, cela s'écrit :

$$S_n - f(0) \leq \int_0^n f(t) dt \leq S_{n-1}$$

En observant que les deux suites (S_n) et $\left(\int_0^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes (car f est positive), on peut affirmer grâce à la dernière égalité :

× si (S_n) converge vers ℓ , alors $\left(\int_0^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par ℓ , donc converge aussi ;

× si $\left(\int_0^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ' , alors (S_n) est majorée par $\ell' + f(0)$, donc converge aussi.

□

Remarque : On pourra demander à l'étudiant s'il est possible d'amoinrir les hypothèses.

• **Propriété des suites croissantes convergentes.**

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$
--

Démonstration.

• On procède par l'absurde. On suppose que :

× la suite (u_n) croissante,

× la suite (u_n) converge vers ℓ ,

× et que $\text{NON}(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell)$ est vérifiée.

Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.

• La suite (u_n) étant croissante, on a donc, par récurrence immédiate (on pourra demander à l'étudiant de la détailler) :

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geq u_{n_0}$.

• En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geq u_{n_0} > \ell$.

Absurde!

□

Connaissances exigibles

- convergence de suites numériques (théorème de convergence monotone, théorème d'encadrement, etc.)
- suites adjacentes
- étude de suites récurrentes (les élèves doivent être guidés dans le cheminement de ces études)
- équivalents
- négligeabilité
- séries numériques, à termes positifs, séries usuelles, comparaison série / intégrale, comparaisons de séries par négligeabilité et équivalence.
- les séries alternées sont hors programme mais les étudiants ont vu en exercice comment démontrer le critère de convergence des séries alternées.
- toutes les techniques sont à connaître (somme télescopique, calcul direct des sommes partielles - séries usuelles, comparaison séries / intégrales, critères sur les SATP...)
- on insistera particulièrement en colle sur les rédactions classiques (notamment pour tous les critères sur les SATP).