ESSEC I 2022

On s'intéresse dans ce sujet au modèle proposé par Hull et White pour la détermination des primes d'assurance d'un défaut de crédit.

Lorsqu'une organisation a besoin de liquidité pour financer un projet, elle peut émettre des obligations.

L'acheteur d'une obligation de valeur faciale 1 euro, de maturité m années, au taux de $\tau\%$ par année donne 1 euro à l'organisation et reçoit tous les ans $\frac{\tau}{100}$ euros d'intérêt durant m années et 1 euro à maturité, ces versements étant a priori garantis.

Mais il est possible qu'avant la maturité, l'organisation soit incapable d'honorer les paiements liés aux obligations vendues. Dans ce cas, on dit que l'organisation est en défaut de paiement.

C'est sur cette possibilité de défaut de paiement que se construit un produit dérivé sous la forme d'un contrat, le CDS (credit default swap).

Le souscripteur A du contrat paie à l'émetteur B une prime d'assurance annuelle de s euros par euro d'obligation assurée pendant les m années que dure le contrat.

S'il n'y a aucun défaut de paiement de l'organisation jusqu'à la maturité, le souscripteur ne reçoit aucune compensation ; par contre, si un défaut de paiement se réalise à la date $t \in \,]0, m[$, alors B paie à A le capital de $\big(1 - \delta(t)\big)$ euro par euro assuré, où $\delta(t)$ représente une estimation de la valeur de l'obligation de valeur faciale 1 euro suite au défaut de paiement.

$\delta(t)$ se nomme le taux de recouvrement de l'obligation à l'instant t. On suppose que δ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Dans tout le sujet :

× les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$;

× T désigne l'instant aléatoire de défaut de paiement d'une organisation. C'est une variable alaéatoire à densité, à valeurs strictement positives, dont une densité f_T est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$;

× F_T désigne la fonction de répartition de T.

Partie 1 - Intensité de défaut

1. On suppose dans cette question que f_T est continue sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}\big([T > t]\big) > 0$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

- Comme T est une v.a.r. de densité f_T, alors :

$$\mathbb{P}\big([T > t]\big) \;=\; \int_t^{+\infty} f_T(x)\, dx$$

- Or, d'après l'énoncé :

  × $\forall x \in [0, +\infty[,\; f_T(x) > 0$,

  × la fonction f_T est continue sur $[t, +\infty[\, \subset \mathbb{R}_+$.

Ainsi, par stricte croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($t < +\infty$), on en déduit :

$$\int_t^{+\infty} f_T(x)\, dx \;>\; 0$$

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\, \mathbb{P}\big([T > t]\big) > 0}$$

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer que, comme T est une v.a.r. à densité, et que f_T est continue sur $[0, +\infty[$, alors F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$:

$$F_T'(t) = f_T(t) > 0 \quad \textit{(par hypothèse de l'énoncé)}$$

- La fonction F_T est :

× continue sur $[0, +\infty[$,

× strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur :

$$F_T\big([0, +\infty[\big) = [F_T(0), \lim_{t\to+\infty} F_T(t)[= [F_T(0), 1[$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $F_T(t) < 1$.

$$\begin{array}{rrcl} \text{On en déduit} & -F_T(t) & > & -1 \\ \text{donc} & 1 - F_T(t) & > & 0 \\ & \shortparallel & & \\ & \mathbb{P}\big([T > t]\big) & & \end{array}$$

□

b) On pose alors pour tout $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $K_{T,t}(h) = \dfrac{1}{h}\, \mathbb{P}_{[T>t]}\big([T \leqslant t + h]\big)$.

Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $\lim\limits_{h\to 0_+} K_{T,t}(h)$ existe et vaut $\dfrac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

- Tout d'abord, pour tout $h > 0$:

$$\begin{array}{rcl} K_{T,t}(h) & = & \dfrac{1}{h}\, \mathbb{P}_{[T>t]}\big([T \leqslant t+h]\big) \\ & = & \dfrac{1}{h} \times \dfrac{\mathbb{P}\big([T > t] \cap [T \leqslant t+h]\big)}{\mathbb{P}\big([T > t]\big)} \\ & = & \dfrac{1}{h} \times \dfrac{\mathbb{P}\big([t < T \leqslant t+h]\big)}{1 - F_T(t)} \end{array}$$

- Or :

$$\frac{\mathbb{P}\big([t < T \leqslant t+h]\big)}{h} = \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h}$$

- D'après l'énoncé de la question ***1.***, la fonction f_T est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction F_T, qui est une primitive de f_T, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ (donc dérivable) sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, elle est en particulier dérivable en t. On en déduit :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h} = F_T'(t) = f_T(t)$$

- On en déduit :

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{\mathbb{P}\big([t < T \leqslant t+h]\big)}{h} \times \frac{1}{1-F_T(t)} \right) \;=\; f_T(t) \times \frac{1}{1-F_T(t)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{h\to 0^+} K_{T,t}(h) \text{ existe et : } \forall t \geqslant 0,\ \lim_{h\to 0^+} K_{T,t}(h) = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}}$$

Commentaire

- Cette question peut sembler difficile car elle demande une prise d'initiative importante. En particulier, il peut paraître difficile de penser à faire apparaître l'expression $\dfrac{F_T(t+h)-F_T(t)}{h}$. Il est conseillé de limiter le champ des recherches. Ainsi :

  1) La $1^{\text{ère}}$ chose à faire pour déterminer $\lim\limits_{h\to 0^+} K_{T,t}(h)$ est de simplifier, pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, l'expression de $K_{T,t}(h)$.

  2) Lors de cette simplification, on obtient :

  $$K_{T,t}(h) \;=\; \frac{1}{1-F(t)} \, \frac{\mathbb{P}\big([t < T \leqslant t+h]\big)}{h}$$

  Comme la limite à obtenir est, d'après l'énoncé, $\dfrac{f_T(t)}{1-F_T(t)}$, il reste à démontrer :

  $$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big([t < T \leqslant t+h]\big)}{h} \;=\; f_T(t)$$

  C'est alors qu'il faut penser à faire apparaître un taux d'accroissement de F_T.

- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie à la manière dont chaque question est découpée en sous-questions. Moins il y a de sous-questions, plus le candidat doit prendre des initiatives. Ainsi, un sujet de type `TOP3` proposera un découpage en sous-questions bien moins détaillé qu'un sujet `TOP5`. On aurait aimé, pour cette $2^{\text{ème}}$ question du sujet, que le concepteur procède comme lors du sujet `ESSEC II 2010` (qui présente une question tout à fait similaire) et découpe cette question ***1.b)*** en deux :

  (i) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer la probabilité $\mathbb{P}\big([t < T \leqslant t+h]\big)$ à l'aide de la fonction F_T.

  (ii) En déduire que $\lim\limits_{h\to 0^+} K_{T,t}(h)$ existe et vaut $\dfrac{f(t)}{1-F_T(t)}$.

$\square$

On note alors $\gamma_T(t)$ le quotient $\dfrac{f_T(t)}{1-F_T(t)}$.

c) Établir que pour tout $t \geqslant 0$:

$$F_T(t) \;=\; 1 - \exp\left(- \int_0^t \gamma_T(x)\, dx \right) \quad (1)$$

Établir aussi que pour tout $t \geqslant 0$ et $\theta \geqslant t$, $\mathbb{P}_{[T>t]}\big([T \leqslant \theta] \;=\; 1 - \exp\left(- \int_t^\theta \gamma_T(x)\, dx \right)$.

Démonstration.

- Soit $t \geqslant 0$. Commençons par simplifier (1).

$$F_T(t) = 1 - \exp\left(- \int_0^t \gamma_T(x)\, dx \right) \quad \Leftrightarrow \quad \exp\left(- \int_0^t \gamma_T(x)\, dx \right) = 1 - F_T(t)$$

On obtient :

$$\begin{array}{rll} (1) & \Leftrightarrow \ \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\ dx\right) = 1 - F_T(t) & \\ & \Leftrightarrow \ -\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\ dx = \ln\big(1 - F_T(t)\big) & \textit{(d'après \textbf{1.a)} :} \\ & & 1 - F_T(t) = \mathbb{P}\big(\,[T > t]\,\big) > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \ \displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\ dx = -\ln\big(1 - F_T(t)\big) & \end{array}$$

Prouver (1) équivaut donc à démontrer que la fonction $g : t \mapsto -\ln\big(1 - F_T(t)\big)$ est la primitive de la fonction γ_T qui s'annule en 0.

- Démontrons que la fonction g est une primitive de γ_T.
  - × La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est la composée $g = h_2 \circ h_1$ où :
    - $h_1 : t \mapsto 1 - F_T(t)$ qui est :
      - ▶ dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car F_T l'est d'après ***1.b)***,
      - ▶ telle que : $h_2(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+^*$ (d'après ***1.a)***).
    - $h_2 : t \mapsto -\ln(t)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$

  - × Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(t) \ = \ h_1'(t) \times (h_2' \circ h_1)(t) \ = \ \big(-f_T(t)\big) \times \left(-\frac{1}{1 - F_T(t)}\right) \ = \ \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} \ = \ \gamma_T(t)$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc une primitive de } \gamma_T.}$$

  - × Démontrons que g s'annule en 0.

$$g(0) \ = \ -\ln\big(1 - F_T(0)\big)$$

Or :

$$\begin{array}{rcll} F_T(0) & = & \mathbb{P}\big(\,[T \leqslant 0]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[T = 0]\,\big) & \textit{(car } T \textit{ est à valeurs positives)} \\ & = & 0 & \textit{(car } T \textit{ est à densité)} \end{array}$$

Ainsi : $g(0) = -\ln\big(1 - F_T(0)\big) = -\ln(1 - 0) = -\ln(1) = 0$.

$$\boxed{g(0) = 0}$$

  - × La fonction g est donc la primitive de γ_T qui s'annule en 0.

$$\boxed{\text{D'après le 1}^{\text{er}} \text{ point de la démonstration, on obtient : } \forall t \geqslant 0,\ F_T(t) \ = \ 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)\ dx\right).}$$

- Soit $t \geqslant 0$. Soit $\theta \geqslant t$.

$$\mathbb{P}_{[T>t]}\big(\,[T \leqslant \theta]\,\big) \ = \ \frac{\mathbb{P}\big(\,[T > t] \cap [T \leqslant \theta]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[T > t]\,\big)} \ = \ \frac{\mathbb{P}\big(\,[t < T \leqslant \theta]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[T > t]\,\big)} \ = \ \frac{F_T(\theta) - F_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[T>t]}\big([T \leqslant \theta]\big) &= \frac{\left(\cancel{1} - \exp\left(-\displaystyle\int_0^\theta \gamma_T(x)\,dx\right)\right) - \left(\cancel{1} - \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\,dx\right)\right)}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\,dx\right)\right)} \\
&= \frac{\exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\,dx\right) - \exp\left(-\displaystyle\int_0^\theta \gamma_T(x)\,dx\right)}{\exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\,dx\right)} \\
&= 1 - \frac{\exp\left(-\displaystyle\int_0^\theta \gamma_T(x)\,dx\right)}{\exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\,dx\right)} \\
&= 1 - \exp\left(-\left(\int_0^\theta \gamma_T(x)\,dx - \int_0^t \gamma_T(x)\,dx\right)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\int_t^\theta \gamma_T(x)\,dx\right) && \textit{(par relation de Chasles)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ \forall \theta \geqslant t,\ \mathbb{P}_{[T>t]}\big([T \leqslant \theta]\big) = 1 - \exp\left(-\int_t^\theta \gamma_T(x)\,dx\right)}$$

□

On suppose dans la suite que la fonction de répartition de T sur $\mathbb{R}_+$ est définie par la formule (1) où la fonction γ_T, appelée « intensité de défaut », est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en un nombre fini de points, à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \gamma_T(x)\,dx$ est-elle convergente ? Justifier que pour tout $t > 0$, $F_T(t) \in \,]0,1[$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $t \geqslant 0$: $F(t) = 1 - \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\,dx\right)$. D'où :

$$\int_0^t \gamma_T(x)\,dx = -\ln\big(1 - F_T(t)\big)$$

Comme F_T est une fonction de répartition : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F_T(t) = 1$.
Ainsi, avec le changement de variable $u = 1 - F_T(t)$:

$$\lim_{t\to+\infty} -\ln\big(1 - F_T(t)\big) = \lim_{u\to 0} -\ln(u) = +\infty$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \gamma_T(x)\,dx = +\infty$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \gamma_T(x)\,dx \text{ est donc divergente.}}$$

- Soit $t > 0$.

$$\begin{array}{rcrcccl}
0 < F_T(t) < 1 & \Leftrightarrow & 0 & < & 1 - \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\, dx\right) & < & 1 \quad \textit{(d'après (1))} \\
& \Leftrightarrow & -1 & < & -\exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\, dx\right) & < & 0 \\
& \Leftrightarrow & 1 & > & \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\, dx\right) & > & 0 \\
& \Leftrightarrow & 1 & > & \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\, dx\right) & & \quad \textit{(car : } \forall u \in \mathbb{R},\ \exp(u) > 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & 0 & > & -\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\, dx & & \quad \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & 0 & < & \displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\, dx & &
\end{array}$$

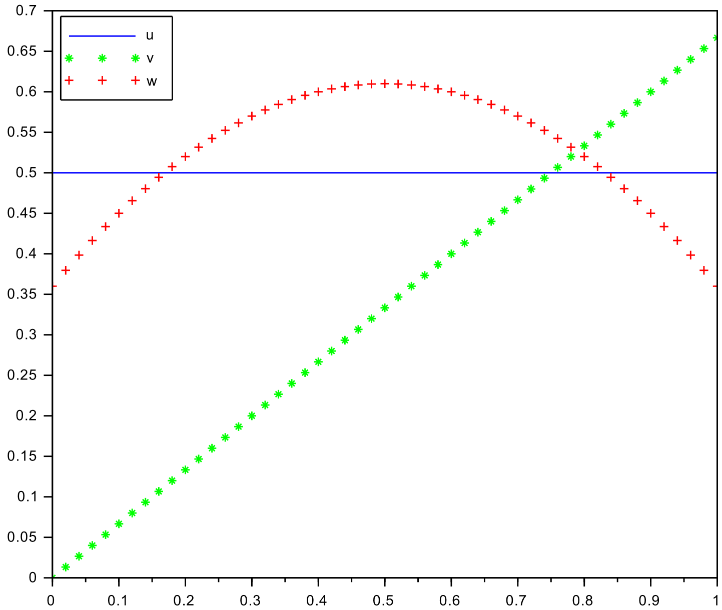
- Démontrons alors : $\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\, dx > 0$.
  D'après l'énoncé :
  × $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $\gamma_T(x) > 0$,
  × la fonction γ_T est continue sur $[0, t] \subset \mathbb{R}_+$.
  Ainsi, par stricte croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant t$), on en déduit :

$$\int_0^t \gamma_T(x)\, dx \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t > 0,\ 0 < F(t) < 1.}$$

□

3. On propose pour trois organisations U, V et W, les courbes d'intensité de défaut suivantes pour l'année à venir (l'unité en abscisse est l'année) :



Quelle est l'organisation qui a la plus faible probabilité de défaut à échéance d'une année ? Si au bout de 9 mois aucune de ces organisations n'a fait défaut, quelle est celle qui a la plus faible probabilité de défaut à l'échéance des trois mois qui viennent ? Justifier graphiquement vos réponses.

Démonstration.

- On note γ_U (resp. γ_V, resp. γ_W) l'intensité de défaut de l'organisation U (resp. V, resp. W).
  On note T_U (resp. T_V, resp. T_W) l'instant de défaut de paiement de l'organisation U (resp. V, resp. W).
- Pour savoir quelle est l'organisation qui a la plus faible probabilité de faire défaut avant un an, on détermine le minimum entre $\mathbb{P}\big([T_U \leqslant 1]\big)$, $\mathbb{P}\big([T_V \leqslant 1]\big)$ et $\mathbb{P}\big([T_W \leqslant 1]\big)$. Autrement dit, on compare $F_{T_U}(1)$, $F_{T_V}(1)$ et $F_{T_W}(1)$ et on cherche le minimum parmi ces trois quantités.
  Or, d'après (1) :
  $$F_{T_U}(1) \ = \ 1 - \exp\left(-\int_0^1 \gamma_U(x)\ dx\right)$$
  (on a des relations similaires pour F_{T_V} et F_{T_W})
- Pour comparer $F_{T_U}(1)$, $F_{T_V}(1)$ et $F_{T_W}(1)$, on doit donc commencer par comparer $\displaystyle\int_0^1 \gamma_U(x)\ dx$, $\displaystyle\int_0^1 \gamma_V(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \gamma_W(x)\ dx$. Autrement dit, on doit comparer les aires sous les courbes représentatives de γ_U, γ_V et γ_W entre les abscisses 0 et 1.
  On note encore :
  × $\mathcal{A}_U$ l'aire sous la courbe représentative de γ_U entre les abscisses 0 et 1. L'aire $\mathcal{A}_U$ est donc l'aire sous la courbe bleue.
  × $\mathcal{A}_V$ l'aire sous la courbe représentative de γ_V entre les abscisses 0 et 1. L'aire $\mathcal{A}_V$ est donc l'aire sous la courbe verte.
  × $\mathcal{A}_W$ l'aire sous la courbe représentative de γ_W entre les abscisses 0 et 1. L'aire $\mathcal{A}_W$ est donc l'aire sous la courbe rouge.

  On constate graphiquement :

$$\begin{array}{lccccc}
 & \mathcal{A}_V & \leqslant & \mathcal{A}_U & \leqslant & \mathcal{A}_W \\
\text{donc} & \displaystyle\int_0^1 \gamma_V(x)\ dx & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \gamma_U(x)\ dx & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \gamma_W(x)\ dx \\
\text{d'où} & -\displaystyle\int_0^1 \gamma_V(x)\ dx & \geqslant & -\displaystyle\int_0^1 \gamma_U(x)\ dx & \geqslant & -\displaystyle\int_0^1 \gamma_W(x)\ dx \\
\text{ainsi} & \exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \gamma_V(x)\ dx\right) & \geqslant & \exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \gamma_U(x)\ dx\right) & \geqslant & \exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \gamma_W(x)\ dx\right) \\
 & \textit{(par croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} & & & & \\
\text{alors} & -\exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \gamma_V(x)\ dx\right) & \leqslant & -\exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \gamma_U(x)\ dx\right) & \leqslant & -\exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \gamma_W(x)\ dx\right) \\
\text{puis} & 1-\exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \gamma_V(x)\ dx\right) & \leqslant & 1-\exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \gamma_U(x)\ dx\right) & \leqslant & 1-\exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \gamma_W(x)\ dx\right) \\
\text{enfin} & F_{T_V}(1) & \leqslant & F_{T_U}(1) & \leqslant & F_{T_W}(1)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que c'est l'organisation } V \text{ qui a la plus faible probabilité de faire défaut à échéance d'une année.}}$$

- On cherche ensuite l'organisation qui, conditionnellement au fait qu'elle n'ait pas fait défaut pendant les 9 premiers mois, a la probabilité la plus faible de faire défaut dans les 3 mois qui suivent. On cherche donc l'organisation qui, conditionnellement au fait qu'elle n'ait pas fait défaut pendant les 9 premiers mois, a la probabilité la plus faible de faire défaut avant $9 + 3 = 12$ mois, c'est-à-dire avant un an. Autrement dit, on cherche le minimum entre $\mathbb{P}_{[T_U > \frac{9}{12}]}\big([T_U \leqslant 1]\big)$, $\mathbb{P}_{[T_V > \frac{9}{12}]}\big([T_V \leqslant 1]\big)$ et $\mathbb{P}_{[T_W > \frac{9}{12}]}\big([T_W \leqslant 1]\big)$.
  Or, d'après la question ***1.c)*** :

$$\mathbb{P}_{[T_U > \frac{9}{12}]}\big([T_U \leqslant 1]\big) \;=\; \mathbb{P}_{[T_U > \frac{3}{4}]}\big([T_U \leqslant 1]\big) \;=\; 1 - \exp\left(-\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_U(x)\ dx\right)$$

(on a des relations similaires pour $\mathbb{P}_{[T_V > \frac{3}{4}]}\big([T_V \leqslant 1]\big)$ et $\mathbb{P}_{[T_W > \frac{3}{4}]}\big([T_W \leqslant 1]\big)$)

- On souhaite donc comparer $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_U(x)\ dx$, $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_V(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_W(x)\ dx$. Autrement dit, on doit comparer les aires sous les courbes représentatives de γ_U, γ_V et γ_W entre les abscisses $\dfrac{3}{4}$ et 1. On les note respectivement $\mathcal{A}'_U$, $\mathcal{A}'_V$ et $\mathcal{A}'_W$.
  On constate graphiquement :

$$\begin{array}{llcccccc}
 & & \mathcal{A}_W & \leqslant & \mathcal{A}_U & \leqslant & \mathcal{A}_V \\
\text{donc} & & \displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_W(x)\ dx & \leqslant & \displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_U(x)\ dx & \leqslant & \displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_V(x)\ dx \\
\text{d'où} & & 1 - \exp\left(-\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_W(x)\ dx\right) & \leqslant & 1 - \exp\left(-\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_U(x)\ dx\right) & \leqslant & 1 - \exp\left(-\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \gamma_V(x)\ dx\right)
\end{array}$$

(avec un raisonnement similaire à celui effectué plus tôt dans la question)

$$\text{enfin} \qquad \mathbb{P}_{[T_W > \frac{3}{4}]}\big([T_W \leqslant 1]\big) \quad\leqslant\quad \mathbb{P}_{[T_U > \frac{3}{4}]}\big([T_U \leqslant 1]\big) \quad\leqslant\quad \mathbb{P}_{[T_V > \frac{3}{4}]}\big([T_V \leqslant 1]\big)$$

On en déduit que c'est l'organisation W qui, sachant qu'elle n'a pas fait défaut les 9 premiers mois, a la probabilité la plus faible de faire défaut dans les 3 mois qui suivent.

Commentaire

Un tel niveau de détail n'était sans doute pas attendu. Une explication moins rigoureuse aurait sûrement permis d'obtenir la totalité des points alloués à la question. Le point clé était ici la comparaison des aires sous les courbes représentatives de γ_U, γ_V et γ_V entre les abscisses adéquates.

□

4. On suppose dans cette question que γ_T est constante de valeur λ, λ un réel strictement positif. Quelle est la loi de T ? Quelle est la propriété du cours que l'on retrouve ici ? Que vaut $\mathbb{E}(T)$?

Démonstration.

- Tout d'abord : $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $t < 0$, alors $[T \leqslant t] = \varnothing$ (car $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$). D'où :

$$F_T(t) \;=\; \mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

× si $t \geqslant 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_T(t) & = & 1 - \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\ dx\right) & \textit{(d'après (1))} \\ & = & 1 - \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \lambda\ dx\right) & \textit{(d'après l'hypothèse de cette question)} \\ & = & 1 - \exp\left(-\lambda\ \left[\ x\ \right]_0^t\right) & \\ & = & 1 - \exp(-\lambda\, t) & \end{array}$$

Finalement : $F_T : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$$

- On retrouve, grâce à la question ***1.c)***, qu'une v.a.r. de loi exponentielle est sans mémoire. Prouvons le, c'est-à-dire démontrons :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall h \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}_{[T>t]}\big([T > t+h]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([T > h]\big)$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $h \in \mathbb{R}_+$.

× D'une part :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}_{[T>t]}\big([T > t+h]\big) & = & 1 - \mathbb{P}_{[T>t]}\big([T \leqslant t+h]\big) & \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \exp\left(-\displaystyle\int_t^{t+h} \gamma_T(x)\ dx\right)\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.c)}}\textit{, car : } t+h \geqslant t\textit{)} \\ & = & \exp\left(-\displaystyle\int_t^{t+h} \lambda\ dx\right) & \textit{(d'après l'hypothèse de cette question)} \\ & = & \exp\left(-\lambda\ \left[\ x\ \right]_t^{t+h}\right) & \\ & = & \exp\left(-\lambda\left((t+h)-t\right)\right) & \\ & = & \exp(-\lambda\, h) & \end{array}$$

× D'autre part, comme $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}\big([T > h]\big) \ = \ 1 - F_T(h) \ = \ 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, h}\right) \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda\, h}$$

On obtient bien : $\mathbb{P}_{[T>t]}\big([T > t+h]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([T > h]\big)$.

$$\boxed{\text{On retrouve donc avec } \textbf{\textit{1.c)}} \text{ que les v.a.r. de loi exponentielle sont sans mémoire.}}$$

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}.}$$

Commentaire

On peut aussi retrouver une densité d'une v.a.r. de loi exponentielle (mais ce n'était sans doute pas la propriété de cours qui était attendue).

- D'après l'énoncé, comme T est une v.a.r. à densité, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $\gamma_T(t) = \dfrac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$.
- On en déduit :

$$f_T(t) \;=\; \gamma_T(t)\left(1 - F_T(t)\right) \;=\; \lambda\left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\right)\right) \;=\; \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}$$

- On sait de plus : $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $t \in\,]-\infty, 0[$: $f_T(t) = 0$.

On retrouve bien : $f_T : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

5. On suppose dans cette question que pour tout $t \geqslant 0$, $\gamma_T(t) = \lambda\, t$, λ un réel strictement positif.

a) Déterminer F_T et une densité de T.

Démonstration.

- Tout d'abord : $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $t < 0$, alors $[T \leqslant t] = \varnothing$ (car $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$). D'où :

$$F_T(t) \;=\; \mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  - × si $t \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)\, dx\right) && \textit{(d'après (1))} \\ &= 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda\, x\, dx\right) && \textit{(d'après l'hypothèse de cette question)} \\ &= 1 - \exp\left(-\lambda \left[\frac{1}{2}\, x^2\right]_0^t\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\lambda\, \frac{t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_T : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp\left(-\lambda\, \dfrac{t^2}{2}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- D'après le préambule, T est une v.a.r. à densité.
  Pour déterminer une densité f_T de T, on dérive sa fonction de répartition F_T sur les intervalle **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
  Soit $t \in \mathbb{R}$.
  - × Si $t \in\,]-\infty, 0[$, alors :

$$f_T(t) \;=\; F_T'(t) \;=\; 0$$

× Si $t \in]0,+\infty[$, alors :

$$f_T(t) \;=\; F_T'(t) \;=\; -(-\lambda\, t)\; \exp\left(-\lambda\; \frac{t^2}{2}\right) \;=\; \lambda\, t\; \exp\left(-\lambda\; \frac{t^2}{2}\right)$$

× On choisit enfin : $f_T(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, une densité } f_T \text{ de } T \text{ est : } f_T : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \lambda\, t\; \exp\left(-\lambda\; \dfrac{t^2}{2}\right) & \text{si } t > 0 \end{cases}.}$$

□

b) Montrer que $\mathbb{E}(T)$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda\, t^2\; \exp\left(-\lambda\; \frac{t^2}{2}\right)\; dt$.

Démonstration.

- La v.a.r. T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_T(t)\; dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f_T(t)\; dt$.
- Tout d'abord, comme la fonction f_T est nulle en dehors de $]0,+\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_T(t)\; dt \;=\; \int_0^{+\infty} t\, f_T(t)\; dt$$

- De plus, la fonction $t \mapsto t\, f_T(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f_T(t)\; dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- On sait :

× $t\, f_T(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. En effet, pour tout $t \in]0,+\infty[$:

$$\frac{t\, f_T(t)}{\frac{1}{t^2}} \;=\; t^3\, f_T(t) \;=\; \lambda\, t^4\; \exp\left(-\lambda\; \frac{t^2}{2}\right) \;=\; \frac{4}{\lambda}\; \left(\frac{\lambda}{2}\, t^2\right)^2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\; t^2\right)$$

Comme $\lambda > 0$, avec le changement de variable $u = \dfrac{\lambda}{2}\; t^2$, on obtient :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{4}{\lambda}\; \left(\frac{\lambda}{2}\, t^2\right)^2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\; t^2\right) \;=\; \lim_{u \to +\infty} \frac{4}{\lambda}\; u^2\; \exp(-u) \;=\; 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

× $\forall t > 0$, $t\, f_T(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

× l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\; dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\, f_T(t)\; dt$ est convergente.

- La fonction $t \mapsto t\, f_T(t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\, f_T(t)\; dt$ est donc bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement } \int_0^{+\infty} t\, f_T(t)\; dt \text{ est convergente. La v.a.r. } T \text{ admet donc une espérance.}}$$

- Enfin :

$$\mathbb{E}(T) \;=\; \int_0^{+\infty} t\, f_T(t)\ dt \;=\; \int_0^{+\infty} t \times \lambda\, t\, \exp\left(-\lambda\, \frac{t^2}{2}\right)\ dt \;=\; \int_0^{+\infty} \lambda\, t^2\, \exp\left(-\lambda\, \frac{t^2}{2}\right)\ dt$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} \lambda\, t^2\, \exp\left(-\lambda\, \frac{t^2}{2}\right)\ dt}$$

□

c) En utilisant une loi normale, établir : $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,\lambda}}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. T admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(T) \;=\; \int_0^{+\infty} \lambda\, t^2\, \exp\left(-\lambda\, \frac{t^2}{2}\right)\ dt$$

- Soit $t \in \,]0, +\infty[$.

$$\lambda\, t^2\, \exp\left(-\lambda\, \frac{t^2}{2}\right) \;=\; \lambda\, t^2\, \exp\left(-\frac{t^2}{2\, \frac{1}{\lambda}}\right) \;=\; \sqrt{2\,\pi\,\lambda}\ \ t^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\, \frac{1}{\lambda}}}\ \exp\left(-\frac{t^2}{2\,\frac{1}{\lambda}}\right)$$

On en déduit :

$$\lambda\, t^2\, \exp\left(-\lambda\, \frac{t^2}{2}\right) \;=\; \sqrt{2\,\pi\,\lambda}\ \ t^2\ \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t)$$

où $\varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}$ est une densité d'une v.a.r. Z de loi $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} \lambda\, t^2\, \exp\left(-\lambda\, \frac{t^2}{2}\right) \\
&= \int_0^{+\infty} \sqrt{2\,\pi\,\lambda}\ \ t^2\ \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t)\ dt \\
&= \sqrt{2\,\pi\,\lambda}\ \int_0^{+\infty} t^2\ \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t)\ dt \\
&= \sqrt{2\,\pi\,\lambda}\ \frac{1}{2}\ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\ \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t)\ dt \qquad \textit{(car la fonction } t \mapsto t^2\, \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t) \textit{ est paire)} \\
&= \sqrt{2\,\pi\,\lambda}\ \frac{1}{2}\ \mathbb{E}(Z^2)
\end{aligned}$$

- Or, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{E}(Z^2) \;=\; \mathbb{V}(Z) + \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2 \;=\; \frac{1}{\lambda} + 0^2 \qquad \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)\textit{)}$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}(T) \;=\; \frac{\sqrt{2\,\pi\,\lambda}}{2} \times \frac{1}{\lambda} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2\,\lambda}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2\,\lambda}}}$$

Commentaire

- Revenons sur l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} t^2 \, \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t) \, dt \; = \; \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t) \, dt$$

  × Tout d'abord, démontrons que la fonction $h : t \mapsto t^2 \, \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t)$ est paire.
  Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $-t \in \mathbb{R}$.

$$h(-t) \; = \; (-t)^2 \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(-t) \; = \; t^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\frac{1}{\lambda}}} \, \exp\left(-\frac{(-t)^2}{2\,\frac{1}{\lambda}}\right) \; = \; t^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\frac{1}{\lambda}}} \, \exp\left(-\frac{t^2}{2\,\frac{1}{\lambda}}\right) \; = \; h(t)$$

  × D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \, \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t) \, dt$ est convergente. On effectue alors le changement de variable $\boxed{x = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} x = -t \text{ (donc } t = -x) \\ \hookrightarrow \; dx = - \, dt \quad \text{ et } \quad dt = - \, dx \\ \bullet \; t = 0 \; \Rightarrow \; x = 0 \\ \bullet \; t = +\infty \; \Rightarrow \; x = -\infty \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : x \mapsto -x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$. On obtient :

$$\int_0^{+\infty} h(t) \, dt \; = \; \int_0^{-\infty} h(-x)(- \, dx) \; = \; - \int_0^{-\infty} h(x) \, dx \; = \; \int_{-\infty}^0 h(x) \, dx$$

  On en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \, dt \; = \; \int_{-\infty}^0 h(t) \, dt + \int_0^{+\infty} h(t) \, dt \; = \; 2 \int_0^{+\infty} h(t) \, dt$$

  On retrouve bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \, dt$.

- Notons que les questions ***5.b)*** et ***5.c)*** auraient pu s'articuler de façon plus naturelle. En effet :

  × en question ***5.c)***, on démontre, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$: $t \, f_T(t) \; = \; \sqrt{2\,\pi\,\lambda} \times t^2 \, \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t)$.

  Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t) \, dt$ est convergente car il s'agit du moment d'ordre 2 d'une v.a.r. Z de loi $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{\lambda}\right)$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \, \varphi_{0,\frac{1}{\lambda}}(t) \, dt$ est également convergente.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \, f_T(t)$ est convergente.
  (on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par un réel non nul)
  La v.a.r. T admet donc une espérance (et on effectue ensuite le calcul de $\mathbb{E}(T)$ comme détaillé plus haut) .

  × en question ***5.b)***, on démontre que la v.a.r. T admet une espérance à l'aide d'un critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives.

  On démontre donc deux fois l'existence de $\mathbb{E}(T)$. La question ***5.c)*** était en fait suffisante pour conclure à la fois quant à l'existence de $\mathbb{E}(T)$ et sa valeur.

Commentaire

- Le concepteur a sans doute jugé bon d'intercaler la question ***5.b)*** pour fournir le résultat intermédiaire :
$$\mathbb{E}(T) \;=\; \int_0^{+\infty} \lambda\, t^2 \exp\left(-\lambda\, \frac{t^2}{2}\right)\, dt$$
Il aurait cependant été plus judicieux de fournir l'expression de f_T en question ***5.a)*** pour éviter la redondance des questions ***5.b)*** et ***5.c)***.
- Il est d'ailleurs certain qu'un candidat démontrant l'existence de $\mathbb{E}(T)$ en reconnaissant (à une constante près) le moment d'ordre 2 d'une loi normale se verrait obtenir tous les points alloués à la question ***5.b)*** (et ceux de la question ***5.c)*** également si le calcul de $\mathbb{E}(T)$ a abouti).

□

6. On suppose dans cette question que a est un entier, $a \geqslant 2$ et :
$$\forall i \in \{1, \ldots, a\},\ \forall t \in [i-1, i[,\ \gamma_T(t) = \gamma_i$$
Par convention, $\sum\limits_{k=1}^{0} \gamma_k$ vaut 0.

a) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, a\}$ et $t \in [i-1, i[$:
$$F_T(t) = 1 - \exp\Big(-\gamma_i\, \big(t - (i-1)\big)\Big)\ \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right)$$

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, a]\!]$. Soit $t \in [i-1, i[$.

- Tout d'abord, d'après (1) :
$$F_T(t) \;=\; 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)\, dx\right)$$
- Commençons par calculer $\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\, dx$.
Par relation de Chasles :
$$\begin{aligned}
&\int_0^t \gamma_T(x)\, dx \\
=\;& \int_0^1 \gamma_T(x)\, dx + \int_1^2 \gamma_T(x)\, dx + \cdots + \int_{i-2}^{i-1} \gamma_T(x)\, dx + \int_{i-1}^t \gamma_T(x)\, dx && \textit{(car } t \in [i-1, i[\textit{)} \\
=\;& \sum_{k=1}^{i-1} \left(\int_{k-1}^k \gamma_T(x)\, dx\right) + \int_{i-1}^t \gamma_T(x)\, dx \\
=\;& \sum_{k=1}^{i-1} \left(\int_{k-1}^k \gamma_k\, dx\right) + \int_{i-1}^t \gamma_i\, dx && \textit{(par définition de } \gamma_T \textit{ dans cette question)} \\
=\;& \sum_{k=1}^{i-1} \left(\gamma_k\ \big[\, x\, \big]_{k-1}^{k}\right) + \gamma_i\ \big[\, x\, \big]_{i-1}^{t} \\
=\;& \sum_{k=1}^{i-1} \Big(\gamma_k \big(k - (k-1)\big)\Big) + \gamma_i \big(t - (i-1)\big) \\
=\;& \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k + \gamma_i \big(t - (i-1)\big)
\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \exp\left(-\left(\gamma_i\left(t-(i-1)\right) + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right)\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\gamma_i\left(t-(i-1)\right) - \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\gamma_i\left(t-(i-1)\right)\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall i \in [\![1, a]\!]$, $\forall t \in [i-1, i[$, $F_T(t) = 1 - \exp\left(-\gamma_i\left(t-(i-1)\right)\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right)$. □

b) En déduire que pour tout $t \in [0, a[$:

$$F_T(t) = 1 - \exp\Big(-\gamma_{\lfloor t \rfloor + 1}\big(t - \lfloor t \rfloor\big)\Big) \exp\left(-\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \gamma_k\right) \qquad (2)$$

Démonstration.
Soit $t \in [0, a[$.

- Pour se ramener à la question précédente, on cherche un entier $i \in [\![1, a]\!]$ tel que : $t \in [i-1, i[$.
  Or, par définition de la partie entière, $\lfloor t \rfloor$ est l'unique entier tel que :

$$\lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$$

  Ainsi, en posant $i = \lfloor t \rfloor + 1$, on obtient :

$$i - 1 \leqslant t < i$$

  De plus, comme $t \in [0, a[$, alors : $\lfloor t \rfloor \in [\![0, a-1]\!]$. D'où : $i = \lfloor t \rfloor + 1 \in [\![1, a]\!]$.
- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \exp\left(-\gamma_i\left(t-(i-1)\right)\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right) \\ &= 1 - \exp\Big(-\gamma_{\lfloor t \rfloor + 1}\big(t - \lfloor t \rfloor\big)\Big) \exp\left(-\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \gamma_k\right) \qquad \textit{(par définition de } i\textit{)} \end{aligned}$$

Finalement : $\forall t \in [0, a[$, $F_T(t) = 1 - \exp\Big(-\gamma_{\lfloor t \rfloor + 1}\big(t - \lfloor t \rfloor\big)\Big) \exp\left(-\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \gamma_k\right)$.

□

c) On suppose que le vecteur **Scilab** `gammaTab` contient les valeurs $\gamma_1, \ldots, \gamma_a$.
Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $F_T(t)$ obtenue dans l'égalité (2) si l'on suppose que `t` contient une valeur de l'intervalle $[0, a[$:

```
function r = F(t, gammaTab)
    produit = ...
    i = ...
    for k = 1:(i-1)
        produit = produit ⋆ exp(-gammaTab(k))
    end
    r = 1 - exp(-gammaTab(i) ⋆ (...)) ⋆ produit
endfunction
```

Commentaire

- On s'est permis ici de fournir le programme dans une version plus classique de l'indentation.
- Rappelons que lors de l'écriture d'un programme, on se soumet généralement à quelques règles de bonne conduite :

(1) utilisation de commentaires indiquant le but de chaque fonction,

(2) réflexion autour du découpage en sous-fonctions pouvant être réutilisées,

(3) utilisation de noms explicites pour les fonctions et les variables,

(4) indentation du code (utilisation correcte d'espaces et sauts de lignes).

Le but de ces règles est de produire un code lisible, intelligible et facilement modifiable à l'avenir. Évidemment, on ne s'attend pas, dans un sujet de concours, à ce que soit commentée la fonction dont il est demandé d'expliciter le calcul. Par contre, on s'attend à ce que les autres règles de bonne conduite soient respectées. Ne pas le faire correspond à ce que l'on nomme de l'**obfuscation** (pas forcément volontaire) de code. Sous ce terme, on désigne les méthodes permettant de rendre un code difficile à déchiffrer. Le but de telles techniques est de protéger son code. Typiquement, une entreprise ayant investi afin de développer un algorithme pourra procéder à une obfuscation de code afin que ses concurrents industriels ne puissent comprendre la manière dont procède cet algorithme.

- Dans l'énoncé original, le programme était présenté sous la forme suivante.

```
1 function r = F(t, gammaTab)
2     produit = ...
3     i = ...
4 for k = 1:(i-1)
5         produit = produit ⋆ exp(-gammaTab(k))
6     end
7     r = 1 - exp(-gammaTab(i) ⋆ (...)) ⋆ produit
8 endfunction
```

On peut regretter cette indentation en ligne 4 qui rend le code difficile à lire : il est en effet difficile de percevoir l'imbrication de la structure itérative.

Démonstration.
Notons qu'on cherche à ce que la fonction proposée renvoie la valeur de $F_T(\mathtt{t})$, *i.e.* , d'après (2) :

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \exp\Big(-\gamma_{\lfloor \mathtt{t} \rfloor +1}\big(\mathtt{t} - \lfloor \mathtt{t} \rfloor\big)\Big) \, \exp\Bigg(-\sum_{k=1}^{\lfloor \mathtt{t} \rfloor} \gamma_k\Bigg) \\ &= 1 - \exp\Big(-\gamma_{\lfloor \mathtt{t} \rfloor +1}\big(\mathtt{t} - \lfloor \mathtt{t} \rfloor\big)\Big) \, \exp\Bigg(\sum_{k=1}^{\lfloor \mathtt{t} \rfloor} (-\gamma_k)\Bigg) \\ &= 1 - \exp\Big(-\gamma_{\lfloor \mathtt{t} \rfloor +1}\big(\mathtt{t} - \lfloor \mathtt{t} \rfloor\big)\Big) \, \prod_{k=1}^{\lfloor \mathtt{t} \rfloor} \exp\left(-\gamma_k\right) \end{aligned}$$

On propose la fonction suivante :

```
1 function r = F(t, gammaTab)
2     produit = 1
3     i = floor(t) + 1
4     for k = 1:(i-1)
5         produit = produit ⋆ exp(-gammaTab(k))
6     end
7     r = 1 - exp(-gammaTab(i) ⋆ (t - (i - 1))) ⋆ produit
8 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `F`,
  × elle prend en entrée les paramètres `t` et `gammaTab`,
  × elle admet pour variable de sortie `r`.

```
1 function r = F(t, gammaTab)
```

En ligne 2, la variable `produit` qui contiendra la valeur $\prod_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \exp(-\gamma_k)$, est initialisée à 1 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder un produit puisque 1 est l'élément neutre de l'opérateur de produit).

```
2     produit = 1
```

En ligne 3, on stocke dans la variable `i` la valeur $\lfloor t \rfloor + 1$, conformément à la question précédente.

```
3     i = floor(t) + 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 6 consistent à mettre à jour la variable `produit` pour qu'elle contienne la valeur $\prod_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \exp(-\gamma_k) = \prod_{k=1}^{i-1} \exp(-\gamma_k)$. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle for).

```
4     for k = 1:(i-1)
5         produit = produit ⋆ exp(-gammaTab(k))
6     end
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `produit` contient la valeur $\prod_{k=1}^{i-1} \exp(-\gamma_k)$. Il reste alors à mettre à jour la variable de sortie `r` pour qu'elle contienne la valeur :

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \exp\Big(- \gamma_{\lfloor t \rfloor + 1}\big(t - \lfloor t \rfloor\big)\Big) \prod_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \exp(-\gamma_k) \\ &= 1 - \exp\Big(- \gamma_i\big(t - (i-1)\big)\Big) \prod_{k=1}^{i-1} \exp(-\gamma_k) \end{aligned}$$

```
7     r = 1 - exp(-gammaTab(i) ⋆ (t - (i - 1))) ⋆ produit
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le script **Scilab** démontre la bonne compréhension de la fonction et permet certainement d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- On peut s'étonner de la volonté de l'énoncé d'avoir voulu faire coder le produit $\prod\limits_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \exp(-\gamma_k)$ plutôt que la somme $\sum\limits_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \gamma_k$ qui apparaissait naturellement dans l'expression de $F_T(t)$. Pour coder cette somme, on pouvait procéder de deux façons :

1) en exploitant les fonctionnalité **Scilab** :

```
function S = Somme_gamma(j, gammaTab)
    S = sum( gammaTab(1:n) )
endfunction
```

2) en utilisant une structure itérative (boucle for) :

```
function S = Somme_gamma(j, gammaTab)
    S = 0
    for k = 1:j
        S = S + gammaTab(k)
    end
endfunction
```

Une fonction permettant de renvoyer la valeur de $F_T(t)$ serait alors :

```
function r = F(t, gammaTab)
    S = Somme_gamma(floor(t), gammaTab)
    r = 1 - exp(-gammaTab(floor(t) + 1) ⋆ (t - floor(t))) ⋆ exp(-S)
endfunction
```

Partie 2 - Modélisation du prix du CDS

On définit le modèle qui suit.

- L'unité de temps est l'année.
- $r \in \left]0, +\infty\right[$ et si t_0 et t sont des réels positifs, on suppose qu'un euro investi sur un actif sans risque à l'instant t_0 donne un capital e^{rt} à l'instant $t_0 + t$.
- A achète le CDS à B à l'instant initial (0), au prix de s euros de prime par an, pour une obligation de l'organisation C de valeur faciale 1 euro et de maturité m années.
- **On suppose que A et B investissent les sommes d'argent qu'ils s'échangent sur l'actif non risqué dès qu'ils les reçoivent.**
- A paie la prime à B en N ($N > 2$) versements identiques aux instants $k\theta$ tels que $\theta = \dfrac{m}{N}$ et $k \in \{1, \ldots, N\}$.
  Par exemple, si $m = 4$ années et $N = 16$ alors A effectue des paiements tous les $\frac{1}{4}$ d'année donc tous les trois mois, le montant de ceux-ci représentant $\frac{1}{4}$ de la prime annuelle.
- Si le défaut survient à un instant appartenant à $\left]k\theta, (k+1)\theta\right]$, alors A fait un dernier paiement à B d'une valeur de $(T - k\theta)\, s$ euro pour la période comprise entre $k\theta$ et T.
- $\delta(t)$ est le taux déterministe de recouvrement en cas de défaut à l'instant t, c'est-à-dire que A recevra $\big(1 - \delta(t)\big)$ euros en cas de défaut à l'instant t.

Commentaire

- La première chose que l'on peut signaler dans cette modélisation est un léger manque de rigueur concernant l'entier k. Dans le $5^{\text{ème}}$ item, on indique qu'il appartient à l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$. Dans le point suivant, il convient de considérer que k est dans l'ensemble $\{0, \ldots, N-1\}$ pour que cet item ait du sens.
- De manière générale, cette présentation souffre de beaucoup de non-dits qui peuvent avoir pour conséquence une impossibilité de compréhension de la modélisation effectuée. En tout début de modélisation, on évoque la notion d'actif « sans risque » puis plus loin d'actif « non risqué ». Ces deux notions (qui n'en sont qu'une) ne sont définies nulle part. Il en est de même de la notion de « capital » ainsi que de l'expression « donne un capital », extrêmement vague. La notion d'euro « investi » n'est elle non plus pas définie. Le concepteur ne veut pas trop entrer dans des détails qui ne servent pas pour la suite du sujet. C'est alors au candidat de boucher les trous. Il faut comprendre que l'argent reçu par A (respectivement B) sert directement à acheter un produit financier **sans rapport avec les obligations achetées par** A et que c'est ce produit qui est sans risque. On y revient ci-dessous.
- Pour comprendre précisément le modèle, tentons de donner une vision globale de celui-ci.
  - × On a vu en **Partie 1** qu'une entité A a acheté des obligations à maturité m à un organisation C en manque de liguidités. L'achat d'obligations est un pari sur l'avenir :
    - si l'organisation C a profité des liquidités offertes pour croître et augmenter substantiellement son chiffre d'affaire, elle pourra honorer tous les paiements liés aux obligations vendues. Cela permettra à A d'obtenir de C strictement plus que la somme initialement versée.
    - si l'organisation C ne tire pas suffisamment profit de ces liquidités, il est possible qu'elle se retrouve en défaut de paiement : elle n'effectue pas alors les m paiements prévus et A risque alors de n'être remboursé que d'une partie de l'argent initialement versé à C.

    Ce qu'il faut retenir de cette partie est que A achète à C un produit financier de maturité m années et que l'argent touché par A dépend d'un éventuel défaut de paiement se produisant à la date $t \in \left]0, m\right]$.

Commentaire

× Pour couvrir ses éventuelles pertes, l'entité A s'assure auprès d'une entité B contre ce risque. Au lieu de choisir un contrat d'assurance classique (paiement régulier de cotisations et indemnisation de l'assurance si jamais le défaut de paiement a lieu), l'entité A décide de signer avec l'entité B un contrat de type CDS consistant à placer de l'argent sur un produit financier non risqué. Un exemple d'actif non risqué est le « livret Bleu » (aussi dénommé livret A). Ce livret est un compte qui à un taux d'intérêt fixe. Lorsque l'on place 500 euros sur un livret Bleu qui a un taux annuel de 1%, on obtient, au bout d'un an, un gain de 5 euros. Ce produit n'est pas risqué car son utilisation ne peut qu'augmenter le capital initial de 500 euros. Si l'augmentation est certaine, il faut cependant constater qu'elle peut être très faible si le taux l'est.
Revenons au CDS liant A et B. Celui-ci va durer m années. Autrement dit, A souscrit auprès de B un CDS qui dure aussi longtemps que la maturité m des obligations achetées par A (auprès de C). Finalement A se lie à C par un contrat d'obligations de m années et se lie à B par un contrat CDS de m années également. L'entité A (et il en sera de même de l'entité B) pourra alors déterminer son éventuel gain / éventuelle perte à la fin de ces deux contrats souscrits simultanément. Voici comment se déroule un CDS :

- A paie à B chaque année une prime s d'un montant convenu dans le contrat. En réalité, cette prime est versée en plusieurs fois chaque année. Par exemple, à chaque trimestre (c'est-à-dire tous les 3 mois), A verse $\frac{1}{4}$ de s à B.
- B place chaque versement reçu sur un actif non risqué. Considérons, par mesure de simplification, qu'il s'agit d'un livret Bleu.

Deux cas se présentent alors.

Soit il n'y a pas défaut de paiement de l'organisation C. L'entité B n'aura rien à verser à A. Elle empoche alors, à la date de maturité m, tout l'argent contenu sur le livret Bleu (argent issu des versements de A et des intérêts du livret). L'entité B est ravie de ce dénouement puisque son bilan ne fait apparaître aucune dépense mais seulement une rentrée d'argent. L'entité A n'a en revanche fait que cumuler des dépenses sur ce contrat CDS. Mais elle se rattrape sur le contrat d'obligations. Puisque celui-ci est allé à maturité, A a touché des intérêts versés par C pendant m années et a été de plus remboursé, en date m, de l'intégralité de la somme intialement versée.

Soit il y a défaut de paiement de l'organisation C sur le contrat d'obligations, au bout d'un temps $t \in]0, m]$. Dans ce cas, le CDS entre dans une seconde phase. Plus précisément, à cette date t :

- l'entité A stoppe définitivement ses versements à B. Le livret Bleu ouvert par B n'est plus alimenté mais l'argent qui y a été placé (ainsi que les intérêts cumulés) restent sur ce livret jusqu'à la maturité m, ce qui aura pour effet de produire de nouveaux intérêts.
- l'entité B reverse alors à A un montant convenu dans le contrat de $(1 - \delta(t))$ euros.
  Dès réception de ce versement, A place cette somme de $(1 - \delta(t))$ euros sur un nouveau livret Bleu, de même taux et de même date de clôture que celui de B.

En fin de contrat CDS, c'est-à-dire en date m, on fait les comptes. Chaque entité récupère tout l'argent de son livret Bleu. Pour déterminer l'éventuel gain de A, il ne faut pas oublier de retrancher les versements effectués par A en phase 1. L'éventuel gain de B est déterminé de manière similaire : argent récupéré sur le livret en date m auquel on retranche le versement effectué par B en phase 2.

Commentaire

- Après avoir détaillé le contrat CDS, on comprend mieux pourquoi le concepteur n'a pas opté pour cette option : définir rigoureusement tous les termes est extrêmement long et demande un niveau de détail trop important. Prendre le temps de détailler risque alors de détouner les candidats du cœur d'un sujet de mathématiques, à savoir vérifier que les candidats sont aptes dans cette matière. Le pari du concepteur est donc de volontairement laisser les candidats dans l'incompréhension lors de la lecture de la modélisation. Le concepteur ne souhaite pas donner d'explications précises au candidat et semble considérer qu'il est pertinent que la compéhension de la modélisation se fasse lors de la réponse aux questions qui suivent cette modélisation. Typiquement, c'est en comprenant les égalités qui définissent la valeur à maturité du capital versé par A à B (et inversement), qu'on peut saisir les notions insuffisamment introduites par la modélisation. C'est la mise en équation qui donne finalement les clés de compréhension d'une modélisation trop peu détaillée. On se retrouve alors avec des questions (***7.a)***, ***8.a)*** et ***8.b)***) qui ont deux buts :
  - × vérifier si les candidats ont compris la modélisation,
  - × aider les candidats à comprendre la modélisation.

  Il y a peu de chances que les candidats puissent traiter convenablement ces questions en temps limité. Cela demande un recul que peu auront lors de l'épreuve.
- Il peut être frustrant de ne pas saisir toutes les subtilités de la modélisation. Cependant, le temps d'une épreuve n'étant pas extensible, il est fortement conseillé aux candidats n'ayant pas compris la modélisation de se concentrer sur les questions mathématiques qui suivront. Typiquement, la mise en équation en question ***7.a)*** fournit une v.a.r. dont on cherche l'espérance en ***7.b)***. Que l'on comprenne ou non les valeurs prises par cette v.a.r. et son rôle dans la modélisation, rien n'empêche, sa définition étant donnée, de déterminer son espérance.

On rappelle que si E est un événement, $\mathbb{1}_E$ désigne la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 sur E et 0 sur le complémentaire de E.

Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note aussi $\mathbb{1}_J$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui prend pour valeur 1 pour les éléments de J et 0 pour les autres réels.

Commentaire

- Il convient de **rappeler** que les variables aléatoires indicatrices ne font pas partie du programme d'`ECE` et ce même si elles sont fréquemment utilisées dans les sujets du `TOP3`. Cet usage fréquent nous amène à expliciter la définition fournie dans ce sujet et donner quelques propriétés de ces v.a.r. indicatrices.

  Soit A un événement. On note $\mathbb{1}_A$ la v.a.r. ($\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$) définie par :

  $$\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  - × Loi de $\mathbb{1}_A$.
    - Par définition de $\mathbb{1}_A$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 et 1.
      Donc $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$.
    - Soit $\omega \in \Omega$.
      $$\omega \in [\mathbb{1}_A = 1] \ \Leftrightarrow\ \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \ \Leftrightarrow\ \omega \in A$$
      D'où : $[\mathbb{1}_A = 1] = A$. Ainsi : $\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 1]) = \mathbb{P}(A)$.

    On en déduit : $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(A)\right)$.
  - × En particulier : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{V}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)\left(1 - \mathbb{P}(A)\right)$.

Commentaire

- Il peut aussi être utile de savoir démontrer les propriétés suivantes.
  Soient B et C deux événements.

  $$\boxed{\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\overline{B}} = 1}$$

  On peut se référer au sujet `ESSEC-II 2018` pour la démonstration de ces deux propriétés.

7. *Valeur à maturité du capital versé par B à A*

a) Montrer que la valeur aléatoire U à maturité du capital que B verse à A est :

$$U \;=\; \big(1-\delta(T)\big)\ \mathrm{e}^{r\,(m-T)}\ \mathbb{1}_{[T\leqslant m]} \;=\; \big(1-\delta(T)\big)\ \mathrm{e}^{r\,(m-T)}\ \mathbb{1}_{]0,m]}(T)$$

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si l'organisme C n'entre pas en défaut de paiement

  Cela se produit si et seulement si T prend une valeur strictement plus grande que m.
  Dans ce cas, B ne verse rien à A. Ainsi, A ne perçoit rien lors de ce contrat CDS et n'investit donc aucune somme sur l'actif non risqué.
  Autrement dit, si T prend une valeur strictement plus grande que m, alors B ne verse rien à A.

Finalement, si T prend une valeur strictement plus grande que m, alors U prend la valeur 0.

- Si l'organisme C entre en défaut de paiement à une date $t \in\,]0,m]$

  Cela se produit si et seulement si T prend pour valeur t.
  Dans ce cas, B verse $\big(1-\delta(t)\big)$ en date t à A. La réception du versement est immédiate et A investit directement cette somme sur un actif sans risque à la date t. Cet investissement de A lui fournit, en date de maturité $m = t + (m-t)$, un capital de $\big(1-\delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{r\,(m-t)}$ euros.
  Autrement dit, si T prend une valeur $t \in\,]0,m]$, alors le capital versé par B à A, vaut, en date m de maturité, $\big(1-\delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{r\,(m-t)}$ euros.

Finalement si T prend une valeur $t \in\,]0,m]$, alors U prend la valeur $\big(1-\delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{r\,(m-t)}$.

- On déduit de cette disjonction de cas que U prend pour valeur :

  × $\big(1-\delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{r\,(m-t)}$ si T prend une valeur $t \in\,]0,m]$ *(c'est-à-dire si l'événement $[T \leqslant m]$ est réalisé)*

  × 0 si T prend une valeur plus grande que m *(c'est-à-dire si l'événement $[T \leqslant m]$* `N`*'est* `PAS` *réalisé)*

  Comme $\mathbb{1}_{[T\leqslant m]}$ prend pour valeur 1 si $[T \leqslant m]$ est réalisé et 0 sinon, on retrouve ci-dessus les valeurs prises par $\big(1-\delta(T)\big)\ \mathrm{e}^{r\,(m-T)}\ \mathbb{1}_{[T\leqslant m]}$.

  $$\boxed{\text{On a bien : } U \;=\; \big(1-\delta(T)\big)\ \mathrm{e}^{r\,(m-T)}\ \mathbb{1}_{[T\leqslant m]}.}$$

- Il reste à démontrer $\mathbb{1}_{[T \leqslant m]} \ = \ \mathbb{1}_{]0,m]}(T)$. Plus précisément, on doit démontrer :

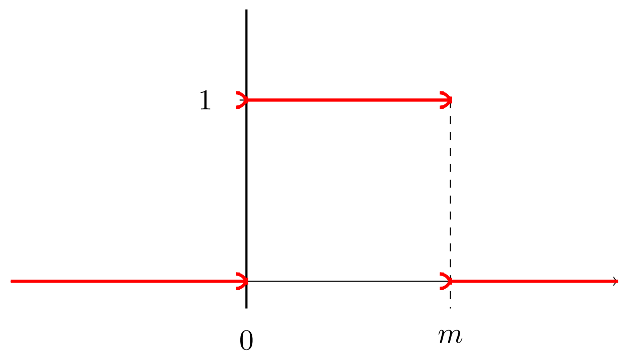
$$\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{1}_{[T \leqslant m]}(\omega) \ = \ \mathbb{1}_{]0,m]}\big(T(\omega)\big)$$

Commentaire

- Dans la remarque précédente, on a détaillé la notion de variable indicatrice. L'énoncé présente aussi, brièvement, la notion de **fonction indicatrice** qui n'est, elle non plus, pas au programme de la filière `ECE`. Les notions de variable indicatrice et fonction indicatrice partagent la même notation (utilisation du symbole $\mathbb{1}$). Pour autant, ce sont des objets de nature très différente. Pour bien le comprendre commençons par détailler la notion de fonction indicatrice
- Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.
  La fonction indicatrice de J, est la fonction $\mathbb{1}_J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbb{1}_J : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{si } x \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

  En particulier, dans l'énoncé, on introduit la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{]0,m]}$, fonction dont la représentation graphique est la suivante.



- On prendra garde à ne pas confondre **variable aléatoire** indicatrice et **fonction** indicatrice. En effet :
  × une variable aléatoire indicatrice est, bien évidemment, une variable aléatoire réelle.
  En cette qualité, c'est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
  Dans l'énoncé, $\mathbb{1}_{[T \leqslant m]}$ est une variable indicatrice (et $[T \leqslant m]$ est un événement)
  × une fonction indicatrice est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  Dans l'énoncé, $\mathbb{1}_{]0,m]}$ est une fonction indicatrice (et $]0, m]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$).
- Comme $\mathbb{1}_{]0,m]}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir la transformée $\mathbb{1}_{]0,m]}(T)$. C'est la v.a.r. définie par :

$$\mathbb{1}_{]0,m]}(T) : \omega \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{si } T(\omega) \in \,]0, m] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

  Si la notation $\mathbb{1}_{]0,m]}(T)$ peut paraître troublante à première lecture, rappelons qu'en probabilités, on manipule à longueur de temps des transformées de variables aléatoires comme $T + 1$ (transformée affine de la v.a.r. T), $2\,T^2$ (transformée polynomiale) ou encore e^T.
  De fait, la notation $g(T)$ (où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction) est classique. Elle est simplement utilisée, dans ce sujet, dans le cas où : $g = \mathbb{1}_{]0,m]}$.

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

× Si $\omega \in [T \leqslant m]$ alors :
  – par définition : $\mathbb{1}_{[T \leqslant m]}(\omega) = 1$.
  – $T(\omega) \leqslant m$ et donc $T(\omega) \in \,]0, m]$. Ainsi : $\mathbb{1}_{]0,m]}\big(T(\omega)\big) = 1$.

× Si $\omega \notin [T \leqslant m]$ alors :
  – par définition : $\mathbb{1}_{[T \leqslant m]}(\omega) = 0$.
  – $T(\omega) \notin \,]0, m]$ et ainsi : $\mathbb{1}_{]0,m]}\big(T(\omega)\big) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{1}_{[T \leqslant m]}(\omega) \ = \ \mathbb{1}_{]0,m]}\big(T(\omega)\big).}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } U \ = \ \big(1 - \delta(T)\big) \ \mathrm{e}^{r\,(m-T)} \ \mathbb{1}_{[T \leqslant m]} \ = \ \big(1 - \delta(T)\big) \ \mathrm{e}^{r\,(m-T)} \ \mathbb{1}_{]0,m]}(T).}$$

Commentaire

Dans un énoncé de probabilités, on manipule différents niveaux d'objets.

1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Ici, Ω est un ensemble fixé au début du problème par l'énoncé.

2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$.
On peut écrire : $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A\}$.
Lorsque $\omega \in A$, on dit que ω **réalise** l'événement A.

3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :
  – elles prennent comme argument un résultat possible de l'expérience et renvoient une valeur réelle. Par exemple, la v.a.r. T de l'énoncé prend pour valeur la date de défaut de paiement (qui est un réel strictement positif). Ainsi, si $\omega \in \Omega$, $T(\omega)$ est une valeur réelle strictement positive.
  – elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $[T \leqslant m]$ est un événement. Il regroupe **toutes** les réalisations ω tels que : $T(\omega) \leqslant m$.
  Autrement dit : $[T \leqslant m] = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leqslant m\} \subset \Omega$.

Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

□

b) En déduire que U admet une espérance et que l'on a :

$$\mathbb{E}(U) \ = \ \mathrm{e}^{rm} \int_0^m \big(1 - \delta(t)\big) \ \mathrm{e}^{-r\,t} \ f_T(t) \ dt$$

Démonstration.

- Dans la suite, on note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g : t \mapsto \big(1 - \delta(t)\big) \ \mathrm{e}^{r\,(m-t)} \ \mathbb{1}_{]0,m]}(t)$.
On cherche à démontrer que la v.a.r. $U = g(T)$ admet une espérance.
- Remarquons que :
  × la fonction f_T est nulle en dehors de $[0, +\infty[$ (on peut le considérer car T est une v.a.r. à densité à valeurs positives).
  × la fonction g est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de telles fonctions.

  Ainsi, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $g(T)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t) \ f_T(t) \ dt$ est absolument convergente.

Cela revient à démontrer la convergence car l'intégrande est positif.

(même si ce n'est pas précisé dans l'énoncé, on peut quand même considérer que pour tout $t \in [0, m]$, $\big(1 - \delta(t)\big) \geqslant 0$, sans quoi le versement de B à A serait en fait négatif et devrait ainsi être considéré comme un versement de A vers B)

Enfin :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\ f_T(t)\ dt \ = \ \int_0^{m} g(t)\ f_T(t)\ dt$$

(car l'intégrande est nulle en dehors de $[0, m]$ car $\mathbb{1}_{]0,m]}$ l'est)

- Sous réserve que la fonction f_T soit continue sur $[0, m]$, la fonction $t \mapsto g(t)\ f_T(t)$ est continue par morceaux sur le `SEGMENT` $[0, m]$ car g l'est.
  Ainsi, l'intégrale précédente est bien définie et $U = g(T)$ admet bien une espérance. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \int_0^m \big(1 - \delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{r\,(m-t)}\ \mathbb{1}_{]0,m]}(t)\ f_T(t)\ dt \\ &= \int_0^m \big(1 - \delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{r\,m}\ \mathrm{e}^{-r\,t}\ f_T(t)\ dt \qquad \textit{(car : } \forall t \in]0, m],\ \mathbb{1}_{]0,m]}(t) = 1\textit{)} \end{aligned}$$

Finalement, la v.a.r. U admet bien une espérance de valeur :
$$\mathbb{E}(U) \ = \ \mathrm{e}^{r\,m} \int_0^m \big(1 - \delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{-r\,t}\ f_T(t)\ dt.$$

Commentaire

- En l'absence d'hypothèse sur f_T, il semble difficile de pouvoir conclure quant à l'existence de $\mathbb{E}(U)$. En question ***1.***, on suppose que f_T est continue sur $[0, +\infty[$, ce qui suffit pour conclure que f_T l'est sur $[0, m]$. Malheureusement, il est précisé que cette hypothèse n'est faite qu'en question ***1***. On se permet donc d'émettre une réserve concernant cette propriété. Il ne faut pas y voir une rédaction usuelle mais simplement une indication sur le fait qu'on ajoute une hypothèse par rapport à l'énoncé initial.
- Le théorème de transfert est un résultat incontournable et très largement utilisé dans les sujets du `TOP3`. Il est primordial de réussir à citer correctement ses hypothèses.

☐

8. *Valeur à maturité du capital versé par A à B*

a) Quel est le montant de la prime versée par A à B à chaque échéance ?

Démonstration.

- D'après l'énoncé, A paie à B une prime de s euros par an.
  Si l'organisation C n'entre pas en défaut de paiement, A aura donc payé en tout ms euros à B.
  Il est enfin précisé dans l'énoncé que ce paiement s'effectue en N versements identiques.

Ainsi, si C n'entre pas en défaut de paiement, A paie à B à chaque échéance $\dfrac{m}{N}\ s = \theta\, s$ euros.

- Si l'organisation C entre en défaut de paiement à la date t, alors A n'effectue que les versements pour les échéances qui précèdent strictement cette date. Les échéances ultérieures ne donnent pas lieu à un versement de A à B.

Ainsi, si C entre en défaut de paiement à la date t, A aura payé $\theta\, s$ euros à B pour chaque échéance précédant strictement la date de défaut de paiement et ne fait aucun versement pour les échéances ultérieures.

Commentaire

- La valeur des versements effectués par A à B dépend de la date à laquelle C entre (éventuellement) en défaut de paiement. Cette date étant modélisée par la v.a.r. T, le montant de la prime versée par A à B est en réalité une « valeur aléatoire » (pour reprendre la terminologie adoptée par le sujet) dépendant de T.
- Plus précisément pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, le versement aléatoire lors de la $k^{\text{ème}}$ échéance est :

$$\theta\, s \cdot \mathbb{1}_{]k\,\theta, +\infty[}(T) \ = \ \theta\, s \cdot \mathbb{1}_{[T > k\,\theta]}$$

- Au vu de la formulation de cette question et de la suivante, l'énoncé n'attendait pas ici un montant aléatoire mais bien la précision sur le montant des primes qui sont réellement versées. En revanche, cette discussion apparaîtra en question ***8.c)***. □

b) En déduire que, pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$, si $[i\theta < T \leqslant (i+1)\theta]$ est réalisé, alors A aura versé à B un capital qui vaut à maturité :

$$s \left(\theta \sum_{k=1}^{i} \mathrm{e}^{r\,(m-k\theta)} + \mathrm{e}^{r\,(m-T)}\ (T - i\theta) \right)$$

Calculer aussi ce capital lorsque $[T \leqslant \theta]$ est réalisé puis lorsque $[T > N\theta]$ est réalisé.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$.
On suppose que l'événement $[i\theta < T \leqslant (i+1)\theta]$ est réalisé.
Ainsi, la v.a.r. T prend une valeur t qui appartient à l'ensemble $]i\theta, (i+1)\theta]$.
Autrement dit, le défaut de paiement à lieu à une date t strictement ultérieure à la date du $i^{\text{ème}}$ versement et antérieure (de manière large) au $(i+1)^{\text{ème}}$ versement.

- On en déduit que :
  - × lors de la $1^{\text{ère}}$ échéance, A verse $s\,\theta$ euros à B.
    Ce versement est effectuée en date θ. L'entité B perçoit l'argent et investit directement cette somme sur l'actif sans risque à cette date. Cet investissement lui fournit, en date de maturité $m = \theta + \big(m - \theta\big)$, un capital de $s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-\theta)}$ euros.
  - × lors de la $2^{\text{ème}}$ échéance, A verse $s\,\theta$ euros à B.
    Ce versement est effectuée en date $2\,\theta$. L'entité B perçoit l'argent et investit directement cette somme sur l'actif sans risque à cette date. Cet investissement lui fournit, en date de maturité $m = 2\,\theta + \big(m - 2\,\theta\big)$, un capital de $s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-2\,\theta)}$ euros.
  - × ...
  - × lors de la $i^{\text{ème}}$ échéance, A verse $s\,\theta$ euros à B.
    Ce versement est effectuée en date $i\,\theta$. L'entité B perçoit l'argent et investit directement cette somme sur l'actif sans risque à cette date. Cet investissement lui fournit, en date de maturité $m = 2\,\theta + \big(m - i\,\theta\big)$, un capital de $s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-i\,\theta)}$ euros.

  Finalement, le capital versé par A à B lors des i premières échéances (qui précèdent strictement le défaut de paiement), vaut à maturité :

$$\begin{aligned} & s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-\theta)} + s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-2\,\theta)} + \dots + s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-i\,\theta)} \\ = \ & s\,\theta \times \big(\mathrm{e}^{r\,(m-\theta)} + \mathrm{e}^{r\,(m-2\,\theta)} + \dots + \mathrm{e}^{r\,(m-i\,\theta)}\big) \ = \ s\,\theta \sum_{k=1}^{i} \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } [i\theta < T \leqslant (i+1)\theta] \text{ est réalisé, le capital versé par } A \text{ à } B \text{ vaut, à maturité : } s\,\theta \sum_{k=1}^{i} \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)}\big).}$$

- Le défaut de paiement ayant lieu à une date $t \in \,]i\,\theta, (i+1)\,\theta]$, alors, d'après l'énoncé, A doit effectuer à B un dernier versement au prorata du temps écoulé entre la date $i\,\theta$ du $i^{\text{ème}}$ paiement et la date t.
  Plus précisément, A verse à B la somme de $(t - i\,\theta)\,s$ en date t. L'entité B perçoit l'argent et investit directement cette somme sur l'actif sans risque à cette date. Cet investissement lui fournit, en date de maturité $m = t + \big(m - t\big)$, un capital de $(t - i\,\theta)\,s \times \mathrm{e}^{r\,(m-t)}$ euros.

  Comme t est la valeur prise par la v.a.r. T, on en déduit que le dernier versement effectué par A à B vaut à maturité : $s\,(T - i\,\theta) \times \mathrm{e}^{r\,(m-T)}$ euros.

Commentaire

Notons qu'il est possible, avec cette modélisation, que l'organisation C entre en défaut de paiement exactement à la date de maturité m. Cela se produit si T prend la valeur $t = m = N\,\theta$. En particulier l'événement $[(N-1)\,\theta < T \leqslant N\,\theta]$ est réalisé. Selon la formule de l'énoncé, l'entité A effectue donc un dernier versement à B d'exactement $(t - N\,\theta)\,s$, versement qui apporte en date de maturité $m = m + \big(m - m\big)$, un capital de

$$(t - N\,\theta)\,s \times \mathrm{e}^{r\,(m-m)} \;=\; (t - N\,\theta)\,s \;\text{ euros}$$

On retrouve alors la valeur correspondant au capital à maturité du $N^{\text{ème}}$ versement dans le cas où l'organisation C n'entre pas en défaut de paiement.

- Finalement, le capital versé par A à B vaut à maturité : $s\,\theta \sum\limits_{k=1}^{i} \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)}\big) + s\,(T - i\,\theta) \times \mathrm{e}^{r\,(m-T)}$.

  La valeur du capital versé par A à B vaut bien, à maturité :
  $$s\left(\theta \sum_{k=1}^{i} \mathrm{e}^{r\,(m-k\theta)} + \mathrm{e}^{r\,(m-T)}\;(T - i\theta)\right).$$

On suppose maintenant que l'événement $[T \leqslant \theta]$ est réalisé.
Ainsi, la v.a.r. T prend une valeur t qui appartient à l'ensemble $]0, \theta]$.
Autrement dit, le défaut de paiement à lieu à une date t antérieure (de manière large) au 1^{er} versement.

- D'après l'énoncé, A doit alors effectuer à B un versement au prorata du temps écoulé entre la date initiale 0 et la date t.
  Plus précisément, A verse à B la somme de $(t - 0)\,s$ en date t. L'entité B perçoit l'argent et investit directement cette somme sur l'actif sans risque à cette date. Cet investissement lui fournit, en date de maturité $m = t + \big(m - t\big)$, un capital de $t\,s \times \mathrm{e}^{r\,(m-t)}$ euros.

  Si l'événement $[T \leqslant \theta]$ est réalisé, le capital versé par A à B vaut à maturité : $s\,T \times \mathrm{e}^{r\,(m-T)}$ euros.

On suppose que l'événement $[T > N\,\theta]$ est réalisé.
Ainsi, la v.a.r. T prend une valeur t qui appartient à l'ensemble $]N\,\theta, +\infty[$.
Autrement dit, le défaut de paiement a lieu à une date t strictement ultérieure à la date du $N^{\text{ème}}$ versement.

- D'après l'énoncé, A effectue les N versements à B et n'a donc plus rien à payer par la suite.

Si l'événement $[T > N\,\theta]$ est réalisé, on démontre (par la méthodologie présentée dans le premier point) que le capital versé par A à B vaut à maturité : $s\,\theta \sum\limits_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)}$ euros. □

c) En déduire que la valeur aléatoire V à maturité du capital versé par A à B vérifie :

$$V \;=\; s\left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{r\,(m-k\theta)}\ \mathbb{1}_{[T>k\theta]} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{r\,(m-T)}\ (T-k\theta)\ \mathbb{1}_{[k\theta<T\leqslant(k+1)\,\theta]}\right)$$

ou encore :

$$V \;=\; s\mathrm{e}^{rm}\ \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\ \mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}(T) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-rT}\ (T-k\theta)\ \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(T)\right)$$

Démonstration.

- Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, si le défaut de paiement se produit à la date $(k+1)\,\theta$ (date prévue pour la $(k+1)^{\text{ème}}$ échéance), alors A verse à B un montant de $s\,\theta$ euros.
  Pour bien comprendre la suite, insistons sur le fait que, dans la modélisation ($6^{\text{ème}}$ item), ce versement n'est pas considéré comme le versement d'une échéance mais comme un dernier versement de complément à la suite d'un défaut de paiement.
- Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on note X_k la v.a.r. égale à la valeur aléatoire à maturité du capital de $k^{\text{ème}}$ échéance versé par A à B.
  Soit $k \in [\![1, N]\!]$. D'après la question précédente, la v.a.r. X_k prend la valeur :

$\times$	$s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)}$	si T prend une valeur t strictement supérieure à $k\,\theta$	*(c'est-à-dire si l'événement* $[T > k\,\theta]$ *est réalisé)*
$\times$	0	si T prend une valeur t inférieure à $k\,\theta$	*(c'est-à-dire si l'événement* $[T > k\,\theta]$ `N`*'est* `PAS` *réalisé)*

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } k \in [\![1, N]\!],\ X_k = s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)} \cdot \mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}}$$

- On en déduit que la valeur aléatoire à maturité du capital versé par A à B par le paiement des échéances est :

$$\sum_{k=1}^{N} X_k \;=\; \sum_{k=1}^{N} s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)} \cdot \mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, la valeur aléatoire à maturité du capital versé par } A \text{ à } B \text{ par le} \\ \text{paiement des échéances est : } s\,\theta \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)} \cdot \mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}.\end{array}}$$

- De la même manière, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on note Y_k la v.a.r. égale à la valeur aléatoire à maturité de l'éventuel versement de complément versé par A à B dans l'intervalle de temps $]k\,\theta, (k+1)\,\theta]$.
  Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$. D'après la question précédente, la v.a.r. Y_k prend la valeur :

$\times$	$s\,\big(t - k\,\theta\big) \times \mathrm{e}^{r\,(m-t)}$	si T prend une valeur $t \in \,]k\,\theta, (k+1)\,\theta]$	*(c'est-à-dire si l'événement* $[k\,\theta < T \leqslant (k+1)\,\theta]$ *est réalisé)*
$\times$	0	si T prend une valeur $t \notin \,]k\,\theta, (k+1)\,\theta]$	*(c'est-à-dire si l'événement* $[k\,\theta < T \leqslant (k+1)\,\theta]$ `N`*'est* `PAS` *réalisé)*

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } k \in [\![0, N-1]\!],\ Y_k = s\,\big(T - k\,\theta\big) \times \mathrm{e}^{r\,(m-T)} \cdot \mathbb{1}_{[k\,\theta<T\leqslant(k+1)\,\theta]}.}$$

- On en déduit que la valeur aléatoire à maturité du capital versé par A à B par l'éventuel versement de complément est :

$$\sum_{k=0}^{N-1} Y_k \ = \ \sum_{k=0}^{N-1} s\left(T - k\,\theta\right) \times \mathrm{e}^{r\,(m-T)} \cdot \mathbb{1}_{[k\,\theta < T \leqslant (k+1)\,\theta]}$$

> Finalement, la valeur aléatoire à maturité du capital versé par A à B par l'éventuel versement de complément est : $s \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(T - k\,\theta\right) \times \mathrm{e}^{r\,(m-T)} \cdot \mathbb{1}_{[k\,\theta < T \leqslant (k+1)\,\theta]}$.

- On en déduit que la valeur aléatoire V à maturité du capital versé par A à B est :

$$V = s\,\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)} \cdot \mathbb{1}_{[T>k\,\theta]} + s \sum_{k=0}^{N-1} \left(T - k\,\theta\right) \times \mathrm{e}^{r\,(m-T)} \cdot \mathbb{1}_{[k\,\theta < T \leqslant (k+1)\,\theta]}$$

> On trouve bien : $V = s \left(\theta \sum\limits_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{r\,(m-k\theta)}\ \mathbb{1}_{[T>k\theta]} + \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{r\,(m-T)}\ (T-k\theta)\ \mathbb{1}_{[k\theta<T\leqslant(k+1)\,\theta]} \right)$.

- Enfin :

$$\begin{aligned} V &= s \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{r\,m}\ \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\ \mathbb{1}_{[T>k\theta]} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{r\,m}\ \mathrm{e}^{-r\,T}\ (T-k\theta)\ \mathbb{1}_{[k\theta<T\leqslant(k+1)\,\theta]} \right) \\ &= s\,\mathrm{e}^{r\,m} \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\ \mathbb{1}_{[T>k\theta]} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-r\,T}\ (T-k\theta)\ \mathbb{1}_{[k\theta<T\leqslant(k+1)\,\theta]} \right) \\ &= s\,\mathrm{e}^{r\,m} \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\ \mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}(T) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-r\,T}\ (T-k\theta)\ \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(T) \right) \end{aligned}$$

La dernière égalité est vérifiée car, par une démonstration analogue à celle détaillée en ***7.a)*** :
× pour tout $k \in [\![1, N]\!]$: $\mathbb{1}_{[T>k\theta]} = \mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}(T)$.
× pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$: $\mathbb{1}_{[k\theta<T\leqslant(k+1)\,\theta]} = \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(T)$.

> On a aussi : $V = s\,\mathrm{e}^{r\,m} \left(\theta \sum\limits_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\ \mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}(T) + \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-r\,T}\ (T-k\theta)\ \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(T) \right)$.

Commentaire

- En fin de question, on utilise le fait que pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{1}_{T\in J} \ = \ \mathbb{1}_J(T) \quad (*)$$

On l'a déjà dit dans une remarque précédente : la notion de fonction indicatrice n'est pas au programme officiel et doit être considérée comme difficile. Cependant, elle est introduite bien trop rapidement et le lien avec la notion de variable aléatoire indicatrice n'est pas mis en avant. Il eût certainement été préférable que ce soit le cas. Plus précisément, la relation $(*)$ aurait pu donner lieu à une question préliminaire en début de **Partie 2**.

Commentaire

- Une critique générale que l'on peut faire au sujet est le manque de découpage en sous-questions. Typiquement, en question ***8.c)***, on répond en réalité à 3 questions distinctes qu'on aurait pu faire apparaître en tant que telles.
- Dans la rédaction choisie, on n'utilise pas directement le résultat de la question précédente. Au vu de la formulation de la question (« En déduire ... »), on peut en conclure que le concepteur avait certainement en tête une autre rédaction. L'idée était certainement de démontrer que la v.a.r. V introduite dans cette question prend les mêmes valeurs que celles définies dans la question précédente. On donne ci-dessous le schéma de cette démonstration.
- Soit $\omega \in \Omega$.
  Comme la famille $\big([T \leqslant \theta], [\theta < T \leqslant (N-1)\,\theta], [T > N\,\theta]\big)$ constitue un système complet d'événements, trois cas se présentent.
  × Si $\omega \in [T \leqslant \theta]$ alors pour tout $k \in [\![1, N]\!]$: $\mathbb{1}_{[T>k\theta]}(\omega) = 0$.
  De même, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$:
  $$\mathbb{1}_{[k\theta<T\leqslant(k+1)\,\theta]}(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{[0<T\leqslant\theta]}(\omega) = 1$$
  Finalement, dans ce cas : $V(\omega) = s\,T(\omega)\,\mathrm{e}^{r\,(m-T(\omega))}$. On retrouve bien l'expression de la question précédente dans le cas où l'événement $[T \leqslant \theta]$ est réalisé.

  × Si $\omega \in [\theta < T \leqslant N\,\theta]$ alors, il existe un unique entier $i \in [\![1, N-1]\!]$ tel que l'événement $[i\,\theta < T \leqslant (i+1)\,\theta]$ est réalisé. Dans ce cas :
  $$\forall k \in [\![1, i]\!],\ \mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}(\omega) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![i+1, N]\!],\ \mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}(\omega) = 0$$
  De même, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!] \setminus \{i\}$, $\mathbb{1}_{[k\theta<T\leqslant(k+1)\,\theta]}(\omega) = 0$.
  Finalement, dans ce cas :
  $$V(\omega) = s\left(\theta \sum_{k=1}^{i} \mathrm{e}^{r\,(m-k\theta)} + \mathrm{e}^{r\,(m-T(\omega))}\ (T(\omega) - i\theta)\right)$$
  On retrouve bien l'expression de la question précédente dans le cas où l'événement $[i\,\theta < T \leqslant (i+1)\,\theta]$ est réalisé.

  × Si $\omega \in [T > N\,\theta]$ alors pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\mathbb{1}_{[k\theta<T\leqslant(k+1)\,\theta]}(\omega) = 0$.
  De même, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$: $\mathbb{1}_{[T>k\theta]}(\omega) = 1$.
  Finalement, dans ce cas : $V(\omega) = s\,\mathrm{e}^{r\,m}\ \theta \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}$. On retrouve bien l'expression de la question précédente dans le cas où l'événement $[T > N\,\theta]$ est réalisé.
- Si la rédaction de la remarque apparaît plus courte que celle présentée, c'est parce qu'on a évité de présenter tous les détails dans la remarque. Il est à noter que ce niveau de détail est bien suffisant pour obtenir tous les points alloués à la question. Dans un sujet de `TOP3`, faire comprendre au correcteur qu'on a compris le fonctionnement de la question peut rapporter la majorité des points alloués à la question et ce même si certaines précisions ou certains arguments sont manquants.

□

d) En conclure que V possède une espérance qui vérifie :

$$\mathbb{E}(V) \;=\; s\mathrm{e}^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta} \, \big(1 - F_T(k\theta)\big) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt} \, (t-k\theta) \; f_T(t) \; dt \right)$$

Démonstration.

- Dans la question précédente, on a démontré : $V \;=\; \sum\limits_{k=1}^{N} X_k \;+\; \sum\limits_{k=0}^{N-1} Y_k$.
  On propose de démontrer que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_N$ et les v.a.r. $Y_0, \ldots, Y_{N-1}$ admettent chacune une espérance.
- Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, la v.a.r. $X_k = s\,\theta \times \mathrm{e}^{r\,(m-k\,\theta)} \cdot \mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}$ admet une espérance car elle est finie. De plus, comme $\mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}(\Omega) = \{0,1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}\right) &= 1 \times \mathbb{P}\left(\left[\mathbb{1}_{[T>k\,\theta]} = 1\right]\right) + 0 \times \mathbb{P}\left(\left[\mathbb{1}_{[T>k\,\theta]} = 0\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\big(\,[T > k\,\theta]\,\big) \end{aligned}$$

  Ce dernier résultat provient de l'égalité : $\left[\mathbb{1}_{[T>k\,\theta]} = 1\right] = [T > k\,\theta]$.
  En effet, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}(\omega) = 1 \;\Leftrightarrow\; T(\omega) > k\,\theta$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![1, N]\!], \text{ la v.a.r. } \mathbb{1}_{[T>k\,\theta]} \text{ admet une espérance donnée par : } \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}\right) = \mathbb{P}\big(\,[T > k\,\theta]\,\big)}$$

  On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_k) &= \mathbb{E}\left(s\,\theta\;\mathrm{e}^{r(m-k\theta)}\;\mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}\right) \\ &= s\,\theta\;\mathrm{e}^{r(m-k\theta)}\;\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[T>k\,\theta]}\right) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= s\,\theta\;\mathrm{e}^{r(m-k\theta)}\;\mathbb{P}\big(\,[T > k\,\theta]\,\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![1, N]\!], \text{ la v.a.r. } X_k \text{ admet une espérance donnée par : } \mathbb{E}(X_k) = s\,\theta\;\mathrm{e}^{r(m-k\theta)}\;\mathbb{P}\big(\,[T > k\,\theta]\,\big)}$$

- Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$.
  Démontrons maintenant que la v.a.r. $Y_k \;=\; s\,\mathrm{e}^{r\,(m-T)}\;(T - k\theta)\;\mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(T)$ admet une espérance.
  Dans la suite, on note $h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$h_k : t \mapsto s\,\mathrm{e}^{r\,(m-t)}\;(t - k\theta)\;\mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\theta]}(t)$$

  On souhaite démontrer que $Y_k = h_k(T)$ admet une espérance.

- Remarquons que :
  - × la fonction f_T est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
  - × la fonction h_k est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de telles fonctions.

  Ainsi, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $h_k(T)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_k(t)\ f_T(t)\ dt$ est absolument convergente.
  Cela revient à démontrer la convergence car l'intégrande est positif.
  Enfin :

$$\int_0^{+\infty} h_k(t)\ f_T(t)\ dt \ = \ \int_{k\theta}^{(k+1)\,\theta} h_k(t)\ f_T(t)\ dt \qquad \textit{(car l'intégrande est nulle en dehors de } [k\theta,(k+1)\theta] \textit{ car } \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\theta]} \textit{ l'est)}$$

- Sous réserve que la fonction f_T soit continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto h_k(t)\ f_T(t)$ est continue par morceaux sur le `SEGMENT` $[k\theta,(k+1)\theta]$ car h_k l'est.
  Ainsi, l'intégrale précédente est bien définie et $Y_k = h_k(T)$ admet bien une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_k) \ &= \ \int_{k\theta}^{(k+1)\,\theta} s\,\mathrm{e}^{r\,(m-t)}\ (t-k\theta)\ \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\theta]}(t)\ f_T(t)\ dt \\ &= \ \int_{k\theta}^{(k+1)\,\theta} s\,\mathrm{e}^{r\,(m-t)}\ (t-k\theta)\ f_T(t)\ dt \qquad \textit{(car : } \forall t \in\,]k\theta,(k+1)\theta],\ \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(t)=1\textit{)}\end{aligned}$$

> Finalement, la v.a.r. Y_k admet une espérance. De plus :
> $$\mathbb{E}(Y_k) \ = \ s\,\mathrm{e}^{rm} \int_{k\theta}^{(k+1)\,\theta} \mathrm{e}^{-rt}\ (t-k\theta)\ f_T(t)\ dt.$$

- La v.a.r. V admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
  De pus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V) \ &= \ \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \ + \ \sum_{k=0}^{N-1} Y_k\right) \\ &= \ \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(X_k) \ + \ \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}(Y_k) \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \ \sum_{k=1}^{N} s\theta\ \mathrm{e}^{rm}\ \mathrm{e}^{-rk\,\theta}\ \ (1-F_T(k\theta)) \ + \ \sum_{k=0}^{N-1} s\,\mathrm{e}^{rm} \int_{k\theta}^{(k+1)\,\theta} \mathrm{e}^{-rt}\ (t-k\theta)\ f_T(t)\ dt \\ &= \ s\,\mathrm{e}^{rm}\ \theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-rk\,\theta}\ \ (1-F_T(k\theta)) \ + \ s\,\mathrm{e}^{rm} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\,\theta} \mathrm{e}^{-rt}\ (t-k\theta)\ f_T(t)\ dt\end{aligned}$$

> On a bien démontré que la v.a.r. V admet une espérance et que celle-ci vaut :
> $$\mathbb{E}(V) \ = \ s\mathrm{e}^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\ \big(1-F_T(k\theta)\big) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt}\ (t-k\theta)\ f_T(t)\ dt\right).$$

Commentaire

- On a traité cette question en 3 phases distinctes. On aurait d'ailleurs pu découper cette question en 3 sous-questions.

  1) démontrer que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, la v.a.r. X_k admet une espérance et écrire cette espérance sous la forme souhaitée.

  2) démontrer que pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, la v.a.r. Y_k admet une espérance et écrire cette espérance sous la forme souhaitée.

  3) en conclure que V admet une espérance et écrire celle-ci sous la forme souhaitée.

  Lorsqu'une question demande trop d'initiative, il y a un risque important qu'elle ne soit tout simplement pas traitée. Or, une question non traitée est une question qui ne permet pas de classer les candidats. Le découpage en sous-questions suggéré ci-dessus aurait certainement permis de mieux évaluer le niveau de chacun.

- Si ce découpage n'est pas fait, on peut imaginer que c'est parce que le concepteur avait une autre rédaction en tête. Il était possible d'appliquer le théorème de transfert en une fois, en introduisant la fonction :

$$h : t \mapsto s\,\mathrm{e}^{r\,m} \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\ \mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-r\,t}\ (t-k\theta)\ \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(t) \right)$$

  Il s'agit alors de démontrer que $V = h(T)$ admet une espérance en appliquant le théorème de transfert. Toute la difficulté d'une telle rédaction est de démontrer l'existence de cette espérance. Si on souhaite le faire proprement, on se retrouve à traiter séparément l'étude de chacune des intégrales qui va naturellement apparaître dans le calcul. Autrement dit, on retombe sur la démonstration précédente.

- Si on laisse de côté l'aspect rigueur pour se concentrer sur les manipulations algébriques, on peut alors opter pour la rédaction suivante.
  Par théorème de transfert, en remarquant que h est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V) &= \int_0^{+\infty} s\mathrm{e}^{r\,m} \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\ \mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-r\,t}(t-k\theta)\ \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(t) \right) f_T(t)\ dt \\
&= s\,\mathrm{e}^{r\,m}\ \theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}(t)\ f_T(t)\ dt \\
&\quad + s\,\mathrm{e}^{r\,m} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r\,t}\ (t-k\theta)\ \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(t)\ f_T(t)\ dt
\end{aligned}$$

  Enfin, comme $\mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}$ est nulle en dehors de $[k\theta, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}(t)\ f_T(t)\ dt\ =\ \int_{k\theta}^{+\infty} \mathbb{1}_{]k\theta,+\infty[}(t)\ f_T(t)\ dt\ =\ \int_{k\theta}^{+\infty} f_T(t)\ dt$$

  De même :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r\,t}\ (t-k\theta)\ \mathbb{1}_{]k\theta,(k+1)\,\theta]}(t)\ f_T(t)\ dt\ =\ \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-r\,t}\ (t-k\theta)\ f_T(t)\ dt$$

  On obtient ainsi le résultat souhaité mais toutes les difficultés sont cachées. En particulier, les différentes manipulations algébriques (dont la linéarité de l'intégrale) ne sont autorisées que si les intégrales en présence sont convergentes.

□

9. En déduire que :

$$s \;=\; \dfrac{\displaystyle\int_0^m \; \big(1-\delta(t)\big)\; \mathrm{e}^{-rt}\; f_T(t)\; dt}{\theta \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-rk\theta}\; \big(1-F_T(k\theta)\big) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \; \mathrm{e}^{-rt}\; (t-k\theta)\; f_T(t)\; dt} \tag{3}$$

est l'unique valeur de la prime annuelle qui est équitable pour A et B.

Démonstration.

- Le contrat CDS conclu entre A et B est équitable si et seulement si chacune des deux entités obtient, en moyenne, le même capital à maturité.
  Autrement dit, le CDS est équitable si et seulement si $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V)$.
- Or :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{r\,m} \int_0^m \; \big(1-\delta(t)\big)\; \mathrm{e}^{-r\,t}\; f_T(t)\; dt \\
& = \; s\mathrm{e}^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\; \big(1-F_T(k\theta)\big) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt}\; (t-k\theta)\; f_T(t)\; dt \right) \\
\Longleftrightarrow \quad & s \;=\; \dfrac{\cancel{\mathrm{e}^{r\,m}} \displaystyle\int_0^m \; \big(1-\delta(t)\big)\; \mathrm{e}^{-r\,t}\; f_T(t)\; dt}{\cancel{\mathrm{e}^{rm}} \left(\theta \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\; \big(1-F_T(k\theta)\big) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt}\; (t-k\theta)\; f_T(t)\; dt \right)}
\end{aligned}$$

  Cette dernière étape n'est valide que si le dénominateur est non nul. Or :
  - × d'après la question ***2*** : $\forall t > 0,\ F_T(t) \in \,]0,1[$. On en déduit que pour tout $k \in [\![1,N]\!]$:

  $$0 < F_T(k\theta) < 1 \qquad \text{et donc} \qquad 1 > 1 - F_T(k\theta) > 0$$

    Finalement, comme $\mathrm{e}^{-rk\theta} > 0$ et $\theta > 0$, alors : $\theta\ \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\ \big(1-F_T(k\theta)\big) > 0$.
  - × comme pour tout $t \in [k\theta, (k+1)\theta]$:

  $$(t-k\theta) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-rt} > 0 \qquad \text{et} \qquad f_T(t) \geqslant 0$$

    alors, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k\theta < (k+1)\theta$) :

  $$\int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt}\; (t-k\theta)\; f_T(t)\; dt \geqslant 0$$

  On en déduit finalement, par somme de termes strictement positifs et positifs :

  $$\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,k\theta}\; \big(1-F_T(k\theta)\big) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt}\; (t-k\theta)\; f_T(t)\; dt \;>\; 0$$

L'unique valeur de la prime annuelle qui rend le CDS équitable est bien :

$$\boxed{s \;=\; \dfrac{\displaystyle\int_0^m \; \big(1-\delta(t)\big)\; \mathrm{e}^{-rt}\; f_T(t)\; dt}{\theta \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-rk\theta}\; \big(1-F_T(k\theta)\big) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt}\; (t-k\theta)\; f_T(t)\; dt}}$$

□

10. On s'intéresse, dans cette question, au comportement de la relation (3) lorsqu'on fait tendre N vers $+\infty$.
De ce fait, on notera s_N plutôt que s l'expression située après le signe égal dans la relation (3).

a) Si g est une fonction continue sur le segment $[0, m]$, rappeler quelle est la limite quand $N \to +\infty$ de $\dfrac{m}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} g\left(k\, \dfrac{m}{N}\right)$?

Démonstration.
Comme la fonction g est continue sur le `SEGMENT` $[0, m]$, on peut en conclure :

$$S_N(f, 0, m) \; = \; \frac{m-0}{N} \sum_{k=1}^{N} g\left(0 + k\, \frac{m-0}{N}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^m g(t)\ dt$$

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} \frac{m}{N} \sum_{k=1}^{N} g\left(k\, \frac{m}{N}\right) = \int_0^m g(t)\ dt}$$

□

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{m}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-rk\frac{m}{N}} \left(1 - F_T\left(k\frac{m}{N}\right)\right) \; = \; \int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\big(1 - F_T(t)\big)\ dt.$

Démonstration.

- On note :
$$g : t \mapsto \mathrm{e}^{-r\,t}\ \big(1 - F_T(t)\big)$$
La fonction g est continue sur $[0, m]$ car elle est le produit $g = g_1 \times g_2$ où :
  × $g_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{-r\,t}$ est continue sur $[0, m]$.
  × $g_2 : t \mapsto 1 - F_T(t)$ est continue sur $[0, m]$ comme transformée affine de la fonction F_T, continue sur $\mathbb{R}$ (et donc $[0, m]$) en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.
- En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient :
$$\frac{m}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-rk\frac{m}{N}} \left(1 - F_T\left(k\frac{m}{N}\right)\right) \; = \; \frac{m}{N} \sum_{k=1}^{N} g\left(k\, \frac{m}{N}\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^m g(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \lim_{N \to +\infty} \frac{m}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-rk\frac{m}{N}} \left(1 - F_T\left(k\frac{m}{N}\right)\right) \; = \; \int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\big(1 - F_T(t)\big)\ dt.}$$

□

c) Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, N-1\}$:

$$0 \; \leqslant \; \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\frac{m}{N}\right) f_T(t)\ dt \; \leqslant \; \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t)\ dt$$

En conclure : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\frac{m}{N}\right) f_T(t)\ dt = 0$ puis :

$$\lim_{N \to +\infty} s_N \; = \; \frac{\displaystyle\int_0^m \big(1 - \delta(t)\big)\mathrm{e}^{-rt}\ f_T(t)\ dt}{\displaystyle\int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\big(1 - F_T(t)\big)\ dt}$$

Démonstration.
Rappelons tout d'abord, par définition : $\theta = \dfrac{m}{N}$. Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$.

- Soit $t \in [k\theta, (k+1)\theta]$.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Alors} & k\theta \leqslant t \leqslant (k+1)\theta & \\
\text{donc} & 0 \leqslant t - k\theta \leqslant \theta & \\
\text{donc} & 0 \leqslant \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\theta\right) \leqslant \mathrm{e}^{-rt}\ \theta & \textit{(car } \mathrm{e}^{-rt} \geqslant 0\textit{)} \\
\text{donc} & 0 \leqslant \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\theta\right) f_T(t) \leqslant \mathrm{e}^{-rt}\ \theta\ f_T(t) & \textit{(car } f_T(t) \geqslant 0\textit{)} \\
\text{donc} & 0 \leqslant \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\theta\right) f_T(t) \leqslant \theta\ f_T(t) & \textit{(car, comme } \mathrm{e}^{-rt} \leqslant 1, \mathrm{e}^{-rt}\ \theta\ f_T(t) \leqslant \theta\ f_T(t)\textit{)}
\end{array}$$

- Finalement, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k\theta \leqslant (k+1)\theta$) :

$$0 \leqslant \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\theta\right) f_T(t)\ dt \leqslant \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \theta\ f_T(t)\ dt = \theta \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t)\ dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, on a bien :} \\ \forall k \in [\![0, N-1]\!],\ 0 \leqslant \displaystyle\int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\frac{m}{N}\right) f_T(t)\ dt \leqslant \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t)\ dt.\end{array}}$$

- En sommant les inégalités précédentes, on obtient :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\frac{m}{N}\right) f_T(t)\ dt \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t)\ dt$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t)\ dt = \frac{m}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t)\ dt = \frac{m}{N} \int_{0}^{N\theta} f_T(t)\ dt \qquad \textit{(par relation de Chasles)}$$

On en conclut :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\frac{m}{N}\right) f_T(t)\ dt \leqslant \frac{m}{N} \int_{0}^{N\theta} f_T(t)\ dt$$

Or :
× $0 \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
× $\dfrac{m}{N} \displaystyle\int_0^{N\theta} f_T(t)\ dt \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

En effet : $\dfrac{m}{N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_T(t)\ dt$ est convergente (puisque T est une v.a.r. à densité), on a :

$$\int_0^{N\theta} f_T(t)\ dt \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f_T(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt} \left(t - k\,\frac{m}{N}\right) f_T(t)\ dt = 0.}$$

- Rappelons tout d'abord :

$$s_N \;=\; \frac{\displaystyle\int_0^m \big(1-\delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{-rt}\ f_T(t)\ dt}{\theta \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-rk\theta}\ \big(1-F_T(k\theta)\big) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt}\ \big(t-k\theta\big)\ f_T(t)\ dt}$$

En combinant le résultat des questions ***7.b)*** et celui que l'on vient de démontrer, on obtient que le dénominateur de s_N admet une limite finie comme somme de quantités qui en admettent chacune une. De plus :

$$\begin{aligned}
& \lim_{N\to+\infty} \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-rk\theta}\ \big(1-F_T(k\theta)\big) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt}\ \big(t-k\theta\big)\ f_T(t)\ dt\right) \\
= \ & \lim_{N\to+\infty} \left(\theta \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-rk\theta}\ \big(1-F_T(k\theta)\big)\right)\ +\ \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \mathrm{e}^{-rt}\ \big(t-k\theta\big)\ f_T(t)\ dt\right) \\
= \ & \int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\big(1-F_T(t)\big)\ dt + 0
\end{aligned}$$

De plus, par une démonstration similaire à celle effectuée en ***9*** :

$$\forall t \in [0,m],\ \ \mathrm{e}^{-rt}\ \big(1-F_T(t)\big) > 0$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-rt}\ \big(1-F_T(t)\big)$ est continue sur le `SEGMENT` $[0,m]$. Ainsi, par stricte croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\ \big(1-F_T(t)\big)\ dt\ >\ 0$$

- D'autre part :

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\int_0^m \big(1-\delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{-rt}\ f_T(t)\ dt\right)\ =\ \int_0^m \big(1-\delta(t)\big)\ \mathrm{e}^{-rt}\ f_T(t)\ dt$$

Le dénominateur de s_N admettant une limite finie **non nulle**, la quantité s_N admet une limite finie par quotient de telles quantités. De plus :

$$\lim_{N\to+\infty} s_N \;=\; \frac{\displaystyle\int_0^m \big(1-\delta(t)\big)\mathrm{e}^{-rt}\ f_T(t)\ dt}{\displaystyle\int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\big(1-F_T(t)\big)\ dt}$$

□

d) Quelle est la valeur de cette limite si T suit la loi exponentielle de paramètre λ et δ est une fonction constante ?

Démonstration.

- Comme δ est une fonction constante, il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \delta(t) = u$$

D'autre part, comme $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors, pour tout $t \geqslant 0$:

$$f_T(t)\ =\ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{ et } \quad F_T(t)\ =\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^m \left(1-\delta(t)\right)\mathrm{e}^{-rt}\ f_T(t)\ dt &= \int_0^m \left(1-u\right)\mathrm{e}^{-rt}\ f_T(t)\ dt \\ &= \left(1-u\right)\ \int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt \\ &= \lambda\ \left(1-u\right)\ \int_0^m \mathrm{e}^{-(r+\lambda)\,t}\ dt\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\left(1-F_T(t)\right)\ dt &= \int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\ \left(\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\right)\ dt \\ &= \int_0^m \mathrm{e}^{-(r+\lambda)\,t}\ dt\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty} s_N = \frac{\displaystyle\int_0^m \left(1-\delta(t)\right)\mathrm{e}^{-rt}\ f_T(t)\ dt}{\displaystyle\int_0^m \mathrm{e}^{-rt}\left(1-F_T(t)\right)\ dt} = \frac{\lambda\ \left(1-u\right)\ \cancel{\displaystyle\int_0^m \mathrm{e}^{-(r+\lambda)\,t}\ dt}}{\cancel{\displaystyle\int_0^m \mathrm{e}^{-(r+\lambda)\,t}\ dt}} = \lambda\ \left(1-u\right)$$

$$\boxed{\text{Si } \delta \text{ est une fonction constante et } T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\text{, on a : } \lim_{N\to+\infty} s_N = \lambda\ \left(1-u\right).}$$

□

Partie 3 - Cotation du CDS et intensité de défaut

Dans cette partie, on va évaluer l'intensité de défaut d'une organisation à partir de cotations de CDS sur ses obligations dont les maturités sont respectivement $1, 2, \ldots, a$ années ($a \geqslant 2$).

On suppose que les primes annuelles de ces CDS sont cotées sur le marché respectivement $s_1, s_2, \ldots, s_a$ avec $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_a$.

On reprend les notations des parties 1 et 2.

On fait alors les hypothèses suivantes :

× le taux de recouvrement est constant et on le note encore δ, où $\delta \in [0, 1[$;

× pour tout $k \in \{1, \ldots, a\}$:

$$s_k = (1-\delta)\ \frac{\displaystyle\int_0^k \mathrm{e}^{-rt} f_T(t)\ dt}{\displaystyle\int_0^k \mathrm{e}^{-rt}\ \left(1-F_T(t)\right)\ dt}$$

× l'intensité de défaut est définie sur l'intervalle $[0, a[$ de manière analogue à ce qui avait été fait dans le question ***6***, par $\gamma_1, \ldots, \gamma_a$ des réels strictement positifs tels que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, a\}, \forall t \in [i-1, i[,\ \ \gamma_T(t) = \gamma_i$$

× on pose $A_0 = 1$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, a\}$:

$$\alpha_k = r + \gamma_k \quad \text{ et } \quad A_k = A_{k-1}\exp(-\alpha_k)$$

11. Vérifier : $\gamma_1 = \dfrac{s_1}{1-\delta}$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)***, on a, pour tout $t \in [0,1[$:
$$F_T(t) \ = \ 1 - \exp\Big(-\gamma_1 \ \big(t - (\cancel{1} - \cancel{1})\big)\Big) \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{0} \gamma_k\Big) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\gamma_1 t}\,\mathrm{e}^0 \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\gamma_1 t}$$
En particulier, la fonction F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et, pour tout $t \in]0,1[$:
$$f_T(t) \ = \ F_T'(t) \ = \ \gamma_1 \ \mathrm{e}^{-\gamma_1 t}$$
- Or, par définition de s_1 :
$$\begin{aligned} s_1 \ &= \ (1-\delta) \ \frac{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-rt} \ f_T(t) \ dt}{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-rt} \ (1 - F_T(t)) \ dt} \\ &= \ (1-\delta) \ \frac{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-rt} \ \gamma_1\,\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} \ dt}{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-rt} \ \Big(\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\gamma_1 t})\Big) \ dt} \\ &= \ (1-\delta)\,\gamma_1 \ \frac{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} \ dt}{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-rt} \ \mathrm{e}^{-\gamma_1 t} \ dt} \ = \ (1-\delta)\,\gamma_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Comme } \delta \neq 1, \text{ alors : } 1-\delta \neq 0 \text{ et : } \gamma_1 = \dfrac{s_1}{1-\delta}.}$$

□

12. ***a)*** Montrer que pour tout $i \in \{1,\ldots,a\}$ et pour tout $t \in [i-1, i[$:
$$\mathrm{e}^{-rt} \ \big(1 - F_T(t)\big) \ = \ A_{i-1} \exp\Big(-\alpha_i \ \big(t - (i-1)\big)\Big)$$

Démonstration.

- Soit $i \in \{1,\ldots,a\}$. D'après la question ***6.a)***, on a, pour tout $t \in [0,1[$:
$$\begin{aligned} 1 - F_T(t) \ &= \ \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \exp\Big(-\gamma_i \ \big(t-(i-1)\big)\Big) \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big)\right) \\ &= \ \exp\Big(-\gamma_i \ \big(t-(i-1)\big)\Big) \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big) \\ &= \ \exp\Big(-(\alpha_i - r) \ \big(t-(i-1)\big)\Big) \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big) && \textit{(car } \alpha_i = r + \gamma_i\textit{)} \\ &= \ \exp\Big(-\alpha_i \ \big(t-(i-1)\big) + r \ \big(t-(i-1)\big)\Big) \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big) \\ &= \ \exp\Big(-\alpha_i \ \big(t-(i-1)\big)\Big) \ \exp\Big(r \ \big(t-(i-1)\big)\Big) \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big) \\ &= \ \exp\Big(-\alpha_i \ \big(t-(i-1)\big)\Big) \ \exp\big(r\,t - r\,(i-1)\big) \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big) \\ &= \ \exp\Big(-\alpha_i \ \big(t-(i-1)\big)\Big) \ \mathrm{e}^{r\,t} \ \mathrm{e}^{-r\,(i-1)} \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big) \end{aligned}$$

On en déduit, en multipliant de part et d'autre par $\mathrm{e}^{-r\,t}$:

$$\mathrm{e}^{-r\,t}\ \big(1 - F_T(t)\big) \ = \ \exp\Big(-\alpha_i\ \big(t-(i-1)\big)\Big)\ \mathrm{e}^{-r\,(i-1)}\ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big)$$

- On remarque alors :

$$-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k \ = \ -\sum_{k=1}^{i-1} (\alpha_k - r) \ = \ -\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k + \sum_{k=1}^{i-1} r \ = \ -\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k + r\,(i-1)$$

On en déduit :

$$\exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big) \ = \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k + r\,(i-1)\Big) \ = \ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k\Big)\ \mathrm{e}^{r\,(i-1)}$$

Finalement :

$$\mathrm{e}^{-r\,(i-1)}\ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\Big) \ = \ \cancel{\mathrm{e}^{-r\,(i-1)}}\ \cancel{\mathrm{e}^{r\,(i-1)}}\ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k\Big)$$

$$\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, a\},\ \forall t \in [i-1, i[,\ \mathrm{e}^{-rt}\ \big(1 - F_T(t)\big) \ = \ \exp\Big(-\alpha_i\ \big(t-(i-1)\big)\Big)\ \exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k\Big)}$$

- Or, par définition : $\forall k \in [\![1, a]\!]$, $A_k = A_{k-1}\ \exp(-\alpha_k)$ et $A_0 = 1$.
  Par une récurrence immédiate, on démontre : $\forall k \in [\![0, a]\!]$, $A_k > 0$.
  On peut alors écrire, pour tout $k \in [\![1, a]\!]$:

$$\ln\big(A_k\big) \ = \ \ln\big(A_{k-1}\ \exp(-\alpha_k)\big) \ = \ \ln\big(A_{k-1}\big) \ + \ \ln\big(\exp(-\alpha_k)\big) \ = \ \ln\big(A_{k-1}\big) \ - \ \alpha_k$$

ou encore :

$$-\alpha_k \ = \ \ln\big(A_k\big) - \ln\big(A_{k-1}\big)$$

Finalement, en sommant ces égalités :

$$-\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \ = \ \sum_{k=1}^{i-1} \Big(\ln\big(A_k\big) - \ln\big(A_{k-1}\big)\Big) \ = \ \ln\big(A_{i-1}\big) - \ln\big(A_0\big) \qquad \textit{(par sommation télescopique)}$$

et comme : $\ln\big(A_0\big) = \ln(1) = 0$, on a : $\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{i-1} \alpha_k\Big) \ = \ \exp\Big(\ln\big(A_{i-1}\big)\Big) \ = \ A_{i-1}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut, pour tout } i \in \{1, \ldots, a\} \text{ et tout } t \in [i-1, i[\text{ :}\\ \mathrm{e}^{-rt}\ \big(1 - F_T(t)\big) \ = \ \exp\Big(-\alpha_i\ \big(t-(i-1)\big)\Big)\ A_{i-1}\end{array}}$$

Commentaire

- On s'est permis de ne pas détailler la récurrence permettant de démontrer la stricte positivité des éléments de la famille $(A_k)_{0 \leqslant k \leqslant a}$ car cette propriété ne constitue pas le cœur de la démonstration. Évidemment, si l'objet de la question avait été de démontrer cette propriété, il aurait fallu détailler la récurrence.
- On aurait pu rédiger la fin de la démonstration autrement en remarquant :

$$\exp\Big(-\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k\Big) \ = \ \exp\Big(\sum_{k=1}^{i-1} \big(-\alpha_k\big)\Big) \ = \ \prod_{k=1}^{i-1} \mathrm{e}^{-\alpha_k} \ = \ \prod_{k=1}^{i-1} \frac{A_k}{A_{k-1}} \ = \ \frac{A_{i-1}}{A_0}$$

C'était certainement cette présentation que le concepteur avait en tête. La rédaction choisie dans ce corrigé privilégie la notion de somme télescopique car elle apparaît plus classique que celle de produit télescopique.

□

b) En déduire que pour tout $k \in \{1, \ldots, a\}$:

$$\sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \left(\frac{s_k}{1-\delta} - \gamma_i \right) \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i \big(t - (i-1)\big)\Big) \, dt = 0$$

Démonstration.
Soit $k \in \{1, \ldots, a\}$.

- En multipliant par $\dfrac{s_k}{1-\delta}$ les deux membres de l'égalité précédente, on obtient, pour tout $i \in \{1, \ldots, a\}$:

$$\frac{s_k}{1-\delta} \exp\Big(-\alpha_i \big(t - (i-1)\big)\Big) A_{i-1} \quad = \quad \frac{s_k}{1-\delta} \, \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big)$$

Ainsi, cette dernière égalité étant vérifiée pour tout $t \in [i-1, 1]$ et par linéarité :

$$\frac{s_k}{1-\delta} \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i \big(t - (i-1)\big)\Big) A_{i-1} \, dt \ = \ \frac{s_k}{1-\delta} \int_{i-1}^{i} \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, dt$$

- En sommant ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k} \frac{s_k}{1-\delta} \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i \big(t - (i-1)\big)\Big) A_{i-1} \, dt \\
= \ & \sum_{i=1}^{k} \frac{s_k}{1-\delta} \int_{i-1}^{i} \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, dt \\
= \ & \frac{s_k}{1-\delta} \sum_{i=1}^{k} \int_{i-1}^{i} \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, dt \\
= \ & \frac{s_k}{1-\delta} \int_{0}^{k} \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, dt & \textit{(par relation de Chasles)} \\
= \ & \frac{\displaystyle\int_0^k \mathrm{e}^{-rt} \, f_T(t) \, dt}{\displaystyle\int_0^k \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, dt} \int_{0}^{k} \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, dt & \textit{(par hypothèse de la } \textbf{Partie 3}\textit{)} \\
= \ & \int_0^k \mathrm{e}^{-rt} \, f_T(t) \, dt \\
= \ & \int_0^k \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, \gamma_T(t) \, dt & \textit{(par définition de } \gamma_T\textit{, sous} \\
& & \textit{l'hypothèse } f_T \textit{ continue sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{k} \int_{i-1}^{i} \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, \gamma_T(t) \, dt & \textit{(par relation de Chasles)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{k} \int_{i-1}^{i} \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, \gamma_i \, dt & \textit{(car : } \forall t \in [i-1, i[, \ \gamma_T(t) = \gamma_i\textit{)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \int_{i-1}^{i} \mathrm{e}^{-rt} \, \big(1 - F_T(t)\big) \, dt \\
= \ & \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i \big(t - (i-1)\big)\Big) A_{i-1} \, dt & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

- On a finalement obtenu (égalité entre première et dernière quantité) :

$$\sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \frac{s_k}{1-\delta} \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i\big(t-(i-1)\big)\Big)\, dt = \sum_{i=1}^{k} A_{i-1}\, \gamma_i \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i\big(t-(i-1)\big)\Big)\, dt$$

$$\boxed{\forall k \in \{1,\dots,a\},\ \sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \left(\frac{s_k}{1-\delta} - \gamma_i\right) \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i\big(t-(i-1)\big)\Big)\, dt = 0}$$

Commentaire

- Dans cette question, il faut successivement :
  1) utiliser le résultat précédent,
  2) utiliser la relation de Chasles (pour obtenir une intégrale sur l'intervalle $[0,r]$),
  3) utiliser la formule de $\dfrac{s_k}{1-\delta}$ donnée par l'énoncé,
  4) utiliser la définition de γ_T,
  5) utiliser de nouveau la relation de Chasles (pour découper l'intégrale sur $[0,r]$),
  6) utiliser de nouveau le résultat de la question précédente pour faire de nouveau apparaître la quantité initiale.

  Si chaque étape de la démonstration est à portée d'un bon élève de classe ECE, la prise d'initiative est beaucoup trop importante pour espérer qu'un élève en vienne à bout. C'est d'autant plus difficile que les étapes ***5*** et ***6*** semblent défaire ce qui est fait en étape ***2*** et ***3***. Un découpage en sous-questions aurait permis de rendre cette question accessible, au moins en partie. C'est d'ailleurs un reproche général à faire l'énoncé.
- Si une question n'est pas à la portée des candidats, elle sera certainement peu (ou pas) traitée. Ainsi, elle n'aura pas le rôle discriminant qu'ont généralement les questions de concours : classer les élèves selon qu'ils ont traité de manière satisfaisante ou non la question.
- La présence d'une telle question permet de comprendre la stratégie à adopter lors des concours :
  - il est essentiel de savoir repérer les questions les plus difficiles. Cela permet de discriminer les candidats puisqu'il faut avoir du recul pour juger du niveau d'une question.
  - il faut aborder ces questions en ayant en tête que le correcteur sera plus indulgent pour les candidats qui s'y aventurent. Cependant, il ne faut pas perdre du temps à essayer de les traiter jusqu'au bout : le nombre de points alloués ne sera certainement pas à la hauteur du temps investi pour traiter une telle question.

  Il ne faut donc pas hésiter à passer les questions les plus difficiles et aller chercher les points où ils sont, à savoir sur les questions plus abordables du sujet.
- En particulier, dans ce sujet, il ne faut pas baisser les bras ni abandonner. Que l'on passe 1, 2 ou même 3 questions d'affilée, il faut toujours tenter de faire la suivante. C'est particulièrement vrai dans cette **Partie 3** où le concepteur a pris soin de donner les résultats intermédiaires afin qu'aucune question ne soit bloquante.

□

- On pose, pour $k \in \{1,\dots,a\}$, $w_k = r + \dfrac{s_k}{1-\delta}$ et $\theta_k = \dfrac{1}{w_k}$.

c) En déduire que $\forall k \in \{1, \ldots, a\}$:

$$\sum_{i=1}^{k} (w_k - \alpha_i) \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = 0$$

puis :

$$\theta_k (1 - A_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha_i}}{\alpha_i}$$

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, a]\!]$. Commençons par calculer :

$$\begin{aligned}
\int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i\big(t - (i-1)\big)\Big)\, dt &= \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i t + \alpha_i\,(i-1)\Big)\, dt \\
&= \left[\frac{\exp\Big(-\alpha_i t + \alpha_i\,(i-1)\Big)}{-\alpha_i} \right]_{i-1}^{i} \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{\alpha_i\,(i-1)}}{\alpha_i} \Big[\mathrm{e}^{-\alpha_i\, t} \Big]_{i-1}^{i} \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{\alpha_i\,(i-1)}}{\alpha_i} \left(\mathrm{e}^{-\alpha_i\, i} - \mathrm{e}^{-\alpha_i\,(i-1)}\right) \\
&= -\frac{1}{\alpha_i} \left(\mathrm{e}^{\alpha_i\,(i-1)}\, \mathrm{e}^{-\alpha_i\, i} - \mathrm{e}^{\alpha_i\,(i-1)}\, \mathrm{e}^{-\alpha_i\,(i-1)}\right) \\
&= -\frac{1}{\alpha_i} \left(\mathrm{e}^{\alpha_i\, i}\, \mathrm{e}^{-\alpha_i}\, \mathrm{e}^{-\alpha_i\, i} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{\alpha_i} \left(\mathrm{e}^{-\alpha_i} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\alpha_i} \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha_i}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha_i} \left(1 - \frac{A_i}{A_{i-1}}\right) && \textit{(par définition des éléments de la famille } (A_i)_{i \in [\![1,a]\!]}\textit{)}
\end{aligned}$$

- On remplace alors la valeur obtenue dans l'égalité de la question précédente. On obtient ainsi, pour tout $k \in [\![1, a]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \left(\frac{s_k}{1-\delta} - \gamma_i\right) \frac{1}{\alpha_i} \left(1 - \frac{A_i}{A_{i-1}}\right) = 0$$

$$\text{donc} \quad \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{s_k}{1-\delta} - \gamma_i\right) \frac{1}{\alpha_i} \left(A_{i-1} - \cancel{A_{i-1}} \frac{A_i}{\cancel{A_{i-1}}}\right) = 0$$

- Or, par définition : $w_k = r + \dfrac{s_k}{1-\delta}$ et ainsi : $\dfrac{s_k}{1-\delta} = w_k - r$. Finalement :

$$\frac{s_k}{1-\delta} - \gamma_i \;=\; w_k - r - \gamma_i \;=\; w_k - (r+\gamma_i) \;=\; w_k - \alpha_i \qquad \textit{(par définition de } \alpha_i\textit{)}$$

$$\boxed{\text{On a bien obtenu : } \forall k \in [\![1,a]\!],\ \sum_{i=1}^{k} (w_k - \alpha_i)\ \frac{1}{\alpha_i}\ (A_{i-1} - A_i) = 0}$$

Commentaire

Le lien entre le calcul d'intégrale et la quantité $A_i - A_{i-1}$ est loin d'être évident.
Il aurait sûrement été préférable de suggérer au candidat de calculer cette intégrale.

- On déduit de cette égalité que pour tout $k \in [\![1,a]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(w_k \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} - \cancel{\alpha_i} \frac{A_{i-1} - A_i}{\cancel{\alpha_i}} \right) = 0$$

donc $\quad w_k \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{k} (A_{i-1} - A_i) = 0 \qquad$ *(par linéarité de la somme)*

donc $\quad w_k \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{k} (A_{i-1} - A_i)$

donc $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = \frac{1}{w_k} \sum_{i=1}^{k} (A_{i-1} - A_i)$

donc $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = \frac{1}{w_k} (A_0 - A_k) \qquad$ *(par sommation télescopique)*

$$\boxed{\text{Finalement, par définition de } \theta_k \text{ et comme } A_0 = 1, \text{ on a : } \theta_k\ \big(1 - A_k\big) = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i}.}$$

- Enfin :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \frac{1 - \frac{A_i}{A_{i-1}}}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha_i}}{\alpha_i}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1,a]\!],\ \theta_k\,(1 - A_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha_i}}{\alpha_i}}$$

□

d) En conclure :

$$\forall k \in \{2, \ldots, a\},\ \theta_k \left(1 - A_{k-1}\mathrm{e}^{-\alpha_k}\right) - A_{k-1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_{k-1}\,(1 - A_{k-1})$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1,a]\!]$:

$$\theta_k\,(1 - A_k) = \sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha_i}}{\alpha_i}$$

donc $\quad \theta_k\,(1 - A_k) = A_{k-1} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha_k}}{\alpha_k} + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} A_{i-1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha_i}}{\alpha_i}$

donc $\quad \theta_k\,(1 - A_k) - A_{k-1} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} A_{i-1} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha_i}}{\alpha_i}$

- Or, en considérant la relation de la question précédente au rang $k-1$ (ce qui nous oblige à supposer $k-1 \in [\![1, a]\!]$ et donc en particulier $k \geqslant 2$) :

$$\sum_{i=1}^{k-1} A_{i-1} \, \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha_i}}{\alpha_i} \;=\; \theta_{k-1}\,(1-A_{k-1})$$

- Pour conclure, il suffit alors de remarquer :

$$A_k \;=\; A_k \, \frac{A_{k-1}}{A_{k-1}} \;=\; A_{k-1} \, \frac{A_k}{A_{k-1}} \;=\; A_{k-1} \, \mathrm{e}^{-\alpha_k}$$

> En combinant ces trois égalités, on obtient bien :
> $$\forall k \in \{2, \dots, a\},\ \theta_k\,(1 - A_{k-1}\mathrm{e}^{-\alpha_k}) - A_{k-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_{k-1}\,(1-A_{k-1})$$

□

13. Montrer que si pour un $k \in \{2, \dots, a\}$, $s_{k-1} = s_k$, alors $\gamma_k = \dfrac{s_k}{1-\delta}$.

Démonstration.
Soit $k \in \{2, \dots, a\}$.

- D'après la question ***12.b)*** :

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{k} A_{i-1} \left(\frac{s_k}{1-\delta} - \gamma_i \right) \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i\big(t-(i-1)\big)\Big)\,dt$$

En écrivant le résultat de la question ***12.b)*** au rang $k-1 \in \{1, \dots, a-1\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \sum_{i=1}^{k-1} A_{i-1} \left(\frac{s_{k-1}}{1-\delta} - \gamma_i \right) \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i\big(t-(i-1)\big)\Big)\,dt \\ &=\; \sum_{i=1}^{k-1} A_{i-1} \left(\frac{s_{k}}{1-\delta} - \gamma_i \right) \int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i\big(t-(i-1)\big)\Big)\,dt \qquad \textit{(car } s_{k-1} = s_k\textit{)} \end{aligned}$$

Dans la suite, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, notons : $u_i = A_{i-1} \left(\dfrac{s_k}{1-\delta} - \gamma_i \right) \displaystyle\int_{i-1}^{i} \exp\Big(-\alpha_i\big(t-(i-1)\big)\Big)\,dt$.

Les deux sommes mises en avant ci-dessus sont nulles.
Elles sont donc égales et leur différence est nulle. Ainsi :

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{k} u_i - \sum_{i=1}^{k-1} u_i \;=\; u_k \;=\; A_{k-1} \left(\frac{s_k}{1-\delta} - \gamma_k \right) \int_{k-1}^{k} \exp\Big(-\alpha_k\big(t-(i-1)\big)\Big)\,dt \quad (*)$$

- Remarquons alors :
  × $A_{k-1} > 0$ (d'après la question ***12.a)*** donc $A_{k-1} \neq 0$.
  × $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \exp\Big(-\alpha_k\big(t-(i-1)\big)\Big)\,dt > 0$ en tant qu'intégrale sur le `SEGMENT` $[k-1, k]$ de la fonction $t \mapsto \exp\Big(-\alpha_k\big(t-(i-1)\big)\Big)$, continue et strictement positive sur ce segment.

On en déduit, d'après $(*)$: $\dfrac{s_k}{1-\delta} - \gamma_k = 0$.

> Finalement, si pour un $k \in \{2, \dots, a\}$, $s_{k-1} = s_k$, alors $\gamma_k = \dfrac{s_k}{1-\delta}$.

□

- On définit, pour tout $k \in \{1, \dots, a\}$, la fonction φ_k sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi_k(t) = \theta_k\,\big(1 - A_{k-1}\mathrm{e}^{-t}\big) - A_{k-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

14. a) Montrer que pour tout $t > 0$: $\varphi_k'(t) = \dfrac{A_{k-1}}{t^2}\left(\left(\theta_k t^2 - t - 1\right) \mathrm{e}^{-t} + 1\right)$.

Démonstration.

- La fonction φ_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme $\varphi_k = \theta_k\, \psi_1 - A_{k-1}\ \psi_2$ où :
  - × $\psi_1 : t \mapsto 1 - A_{k-1}\ \mathrm{e}^{-t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ l'est.
  - × $\psi_2 : t \mapsto \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $\psi_2 = \dfrac{h_1}{h_2}$ où :
    - – $h_1 : t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
    - – $h_2 : t \mapsto t$:
      - ▸ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
      - ▸ `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi_k \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

Commentaire

- De manière générale, il n'est pas nécessaire de rédiger aussi précisément les questions portant sur la régularité de fonctions. Il est conseillé :
  - × de rédiger très proprement la régularité d'une fonction pour les questions que l'on traite en premier. On démontre ainsi au correcteur sa capacité à rédiger ce type de questions.
  - × de rédiger très proprement la régularité lorsqu'il s'agit du cœur de la question (« Démontrer que la fonction est continue / de classe $\mathcal{C}^1$ sur ... ».

  Dans les autres cas, on pourra se contenter d'écrire que la fonction f est continue / dérivable / de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle J car elle est la somme / le produit / le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas sur J, de fonctions continues / dérivables / de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle J.
- Si la fonction s'écrit comme une composée $g = g_2 \circ g_1$, rappelons que le schéma détaillé est le suivant. La fonction g est `[type de régularité]` sur l'intervalle I car elle est **la composée** $g = g_2 \circ g_1$ où :

× g_1 est :
  - – `[type de régularité]` sur I.
  - – telle que $g_1(I) \subset J$

× g_2 est `[type de régularité]` sur J.

  Lorsque g_1 et g_2 sont de la régularité attendue sur $\mathbb{R}$ tout entier, ce niveau de détail n'est pas opportun. On pourra alors signifier que g est `[type de régularité]` sur $\mathbb{R}$ car est la composée de deux fonctions `[type de régularité]` sur $\mathbb{R}$.
- Lorsque $g_1(I) \neq I$, affirmer que « g est `[type de régularité]` sur I car est la composée de deux fonctions `[type de régularité]` sur I » est inexact. Si on ne souhaite pas détailler le schéma précédent, il faudra alors a minima affirmer :

  « g est `[type de régularité]` sur I car est la composée de deux fonctions `[type de régularité]` sur des intervalles adéquats »

- De plus, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi_k'(t) &= \theta_k\, \psi_1'(t) - A_{k-1}\, \psi_2'(t) \\
&= \theta_k\, \left(A_{k-1}\, e^{-t}\right) - A_{k-1}\, \frac{e^{-t} \times t - (1 - e^{-t}) \times 1}{t^2} \\
&= \theta_k\, \left(A_{k-1}\, e^{-t}\right) - A_{k-1}\, \frac{t\, e^{-t} - 1 + e^{-t}}{t^2} \\
&= \frac{A_{k-1}}{t^2}\, \theta_k\, t^2\, e^{-t} - \frac{A_{k-1}}{t^2} \left((t+1)\, e^{-t} - 1\right) \\
&= \frac{A_{k-1}}{t^2}\, \theta_k\, t^2\, e^{-t} + \frac{A_{k-1}}{t^2} \left((-t-1)\, e^{-t} + 1\right) \\
&= \frac{A_{k-1}}{t^2} \Big(\big((\theta_k\, t^2 - t - 1\big)\ e^{-t} + 1)\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t > 0,\ \varphi_k'(t) \ = \ \frac{A_{k-1}}{t^2} \Big(\big(\theta_k\, t^2 - t - 1\big)\ e^{-t} + 1\Big).}$$

$\square$

b) En étudiant les variations de $t \mapsto 1 - (t+1)\, e^{-t}$ sur $]0, +\infty[$, montrer que φ_k est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction $h : t \mapsto 1 - (t+1)\, e^{-t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Soit $t \in\ ]0, +\infty[$.

$$h'(t) \ = \ -\Big(1 \times e^{-t} + (1+t)\left(-e^{-t}\right)\Big) \ = \ -\Big(e^{-t} - (1+t)\ e^{-t}\Big) \ = \ -\Big(\cancel{e^{-t}} - \cancel{e^{-t}} - t\ e^{-t}\Big) \ = \ t\ e^{-t}$$

Comme $t > 0$ et $e^{-t} > 0$, alors : $t\ e^{-t} > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } h \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$$

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\varphi_k'(t) &= \frac{A_{k-1}}{t^2} \Big(\big(\theta_k\, t^2 - t - 1\big)\ e^{-t} + 1\Big) \\
&= \frac{A_{k-1}}{t^2} \left(\theta_k\, t^2 + 1 - (t+1)\ e^{-t}\right) \\
&= \frac{A_{k-1}}{t^2} \left(\theta_k\, t^2 + h(t)\right)
\end{aligned}$$

Comme $t > 0$, alors : $\theta_k\, t^2 > 0$ et $\dfrac{A_{k-1}}{t^2} > 0$.

De plus, comme la fonction h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, alors :

$$h(t) > h(0) = \left(1 - (0+1)\ e^0\right) = 1 - 1 = 0$$

Finalement : $\varphi_k'(t) > 0$ comme produit et somme de termes strictement positifs.

$$\boxed{\text{On en conclut que } \varphi_k \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$$

$\square$

c) Déterminer les limites de φ_k en 0 et $+\infty$ et dresser le tableau de variations de φ_k sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord la limite en 0 de φ.
  × $\lim\limits_{t\to 0} \theta_k\ \left(1 - A_{k-1}\ \mathrm{e}^{-t}\right) \ = \ \theta_k\ \left(1 - A_{k-1}\ \mathrm{e}^{-0}\right) \ = \ \theta_k\ \left(1 - A_{k-1}\right)$

  × $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t} = -1$. En effet, si on note $s : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t} \ = \ \lim_{t\to 0} \frac{s(t)-s(0)}{t-0} \ = \ s'(0) \ = \ -\mathrm{e}^{-0} \ = \ -1$$

  Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0} \ -A_{k-1}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = \lim\limits_{t\to 0} A_{k-1}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t} = A_{k-1} \times (-1) = -A_{k-1}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{t\to 0} \varphi_k(t) = \lim_{t\to 0} \left(\theta_k\ \left(1 - A_{k-1}\mathrm{e}^{-t}\right) - A_{k-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) = \theta_k\ \left(1 - A_{k-1}\right) - A_{k-1}.}$$

Commentaire

On se sert ici de la définition de la notion de dérivée d'une fonction en un point (qui n'est autre que la limite d'un taux d'accroissement). On aurait aussi pu opter pour une présentation faisant appel à l'équivalent usuel :

$$\mathrm{e}^{u} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$$

Comme de plus $\lim\limits_{t\to 0} \ -t = 0$, on retrouve bien, par composition de limites :

$$\mathrm{e}^{-t} - 1 \underset{t\to 0}{\sim} -t$$

et ainsi :

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t}{t} = -1$$

- Déterminons maintenant la limite en $+\infty$ de φ.
  × $\lim\limits_{t\to +\infty} \theta_k\ \left(1 - A_{k-1}\ \mathrm{e}^{-t}\right) \ = \ \theta_k\ \left(1 - A_{k-1} \times 0\right) \ = \ \theta_k$

  × $\lim\limits_{t\to +\infty} \ -A_{k-1}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = -A_{k-1} \times 0 = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{t\to +\infty} \varphi_k(t) = \lim_{t\to +\infty} \left(\theta_k\ \left(1 - A_{k-1}\mathrm{e}^{-t}\right) - A_{k-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) = \theta_k + 0 = \theta_k.}$$

- On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
Signe de $\varphi_k'(t)$		$+$	
Variations de φ_k	$\theta_k\ \left(1 - A_{k-1}\right) - A_{k-1}$	$\nearrow$	θ_k

□

15. a) En remarquant que, pour tout $k \in \{2, \dots, a\}, \theta_k \leqslant \theta_{k-1}$, montrer :

$$\varphi_k(w_k) \leqslant \theta_{k-1}\big(1 - A_{k-1}\big)$$

Démonstration.
Soit $k \in \{2, \dots, a\}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \theta_k \leqslant \theta_{k-1} & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{w_k} \leqslant \dfrac{1}{w_{k-1}} & \textit{(par définition des éléments de la famille } \big(\theta_i\big)_{i\in[\![1,a]\!]}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & w_k \geqslant w_{k-1} & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \cancel{r} + \dfrac{s_k}{1-\delta} \geqslant \cancel{r} + \dfrac{s_{k-1}}{1-\delta} & \textit{(par définition des éléments de la famille } \big(w_i\big)_{i\in[\![1,a]\!]}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & s_k \geqslant s_{k-1} & \textit{(en multipliant par } \delta > 0\textit{)} \end{array}$$

  La dernière propriété étant vérifiée (par définition des éléments de la famille $(s_i)_{i\in[\![1,a]\!]}$), il en est de même de la première.

$$\boxed{\forall k \in \{2, \dots, a\},\ \theta_k \leqslant \theta_{k-1}}$$

- Par définition de la fonction φ_k :

$$\begin{array}{rcll} \varphi_k(w_k) & = & \theta_k\left(1 - A_{k-1}\mathrm{e}^{-w_k}\right) - A_{k-1}\,\dfrac{1-\mathrm{e}^{-w_k}}{w_k} & \\ & = & \theta_k\left(1 - A_{k-1}\mathrm{e}^{-w_k}\right) - A_{k-1}\,\theta_k\,\big(1-\mathrm{e}^{-w_k}\big) & \textit{(par définition de } \theta_k\textit{)} \\ & = & \theta_k - \cancel{A_{k-1}\theta_k\,\mathrm{e}^{-w_k}} - A_{k-1}\,\theta_k + \cancel{A_{k-1}\theta_k\,\mathrm{e}^{-w_k}} & \\ & = & \theta_k\,\big(1 - A_{k-1}\big) & \end{array}$$

- Par une récurrence immédiate, on démontre : $\forall k \in [\![0,a]\!],\ 0 < A_k \leqslant 1$.
  (cette propriété est vérifiée au rang 0 et si elle l'est à un rang $k-1 \in \mathbb{N}^*$, elle l'est aussi au rang suivant car A_k est obtenu comme le produit A_{k-1} où $0 < A_{k-1} \leqslant 1$ et $0 < \exp(\alpha_k) \leqslant 1$)

  Ainsi :

$$\begin{array}{rrcll} & \theta_k & \leqslant & \theta_{k-1} & \\ \text{donc} & \theta_k\,\big(1 - A_{k-1}\big) & \leqslant & \theta_{k-1}\,\big(1 - A_{k-1}\big) & \textit{(car } 1 - A_{k-1} \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \{2, \dots, a\},\ \theta_k\,\big(1 - A_{k-1}\big) \leqslant \theta_{k-1}\,\big(1 - A_{k-1}\big)}$$

□

b) Justifier l'égalité, pour tout $k \in \{2, \dots, a\}$: $\varphi_k(\alpha_k) = \theta_{k-1}\,\big(1 - A_{k-1}\big)$.

En déduire que nécessairement : $\theta_k > \theta_{k-1}\big(1 - A_{k-1}\big)$ et $\dfrac{s_k}{1-\delta} \leqslant \gamma_k$.

Démonstration.
Soit $k \in \{2, \dots, a\}$.

- Tout d'abord :

$$\varphi_k(\alpha_k) = \theta_k\left(1 - A_{k-1}\mathrm{e}^{-\alpha_k}\right) - A_{k-1}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_{k-1}\,\big(1 - A_{k-1}\big) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{12.d)}}\textit{)}$$

$$\boxed{\forall k \in \{2, \dots, a\},\ \varphi_k(\alpha_k) = \theta_{k-1}\,\big(1 - A_{k-1}\big)}$$

- D'après l'étude réalisée en question ***14***, on a :

$$\forall t \in \,]0, +\infty[, \ \varphi_k(t) \ < \ \theta_k$$

Or $\alpha_k > 0$ car $\alpha_k = r + \gamma_k$ avec $r > 0$ et $\gamma_k > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \varphi_k(\alpha_k) = \theta_{k-1} \, \big(1 - A_{k-1}\big) \ < \ \theta_k.}$$

- Il reste à démontrer : $\dfrac{s_k}{1-\delta} \ \leqslant \ \gamma_k$. On procède par équivalence.

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{s_k}{1-\delta} \ \leqslant \ \gamma_k & \Leftrightarrow & w_k - \cancel{r} \ \leqslant \ \alpha_k - \cancel{r} & \textit{(par définition de } w_k \textit{ et } \alpha_k\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \varphi(w_k) \ \leqslant \ \varphi(\alpha_k) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \varphi_k\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \varphi(w_k) \ \leqslant \ \theta_{k-1} \, \big(1 - A_{k-1}\big) & \end{array}$$

On retrouve le résultat de la question ***15.a)***. La dernière propriété étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\forall k \in \{2, \dots, a\}, \ \frac{s_k}{1-\delta} \ \leqslant \ \gamma_k}$$

□

c) Réciproquement, pour tout $k \in \{2, \dots, a\}, s_1, \dots, s_k, \delta$ et r étant donnés, montrer que si l'on a determiné $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$, la condition $\theta_k > \theta_{k-1} \, \big(1 - A_{k-1}\big)$ suffit pour affirmer que γ_k est défini de manière unique.

Démonstration.
Soit $k \in \{2, \dots, a\}$.

- On suppose dans l'énoncé que les valeurs de $\gamma_1, \ \dots, \ \gamma_{k-1}$ sont connues.

  Dans ce cas, comme r est aussi une valeur connue (par hypothèse de la question), on obtient les valeurs $\alpha_1, \ \dots, \ \alpha_{k-1}$ $(\forall i \in [\![1, k-1]\!], \ \alpha_i = r + \gamma_i)$.

  On obtient alors aussi les valeurs $A_1, \ \dots, \ A_{k-1}$ $(\forall i \in [\![1, k-1]\!], \ A_i = A_{i-1} \exp(-\alpha_i))$.

- De la même manière, comme $s_1, \ \dots, \ s_k, \ r$ et δ sont des valeurs fournies, alors $w_1, \ \dots, \ w_k$ $(\forall i \in [\![1, k]\!], \ w_i = r + \dfrac{s_i}{1-\delta})$ et $\theta_1, \dots \theta_k$ le sont aussi $(\forall i \in [\![1, k]\!], \ \theta_i = \dfrac{1}{w_i})$.

- On en conclut alors que les fonctions $\varphi_1, \ \dots, \ \varphi_k$ sont elles aussi entièrement définies.

$$\boxed{\text{En particulier, si toutes les valeurs } s_1, \ \dots, \ s_k, \ \delta \text{ et } r \text{ sont fournies, alors la fonction } \varphi_k \text{ est entièrement déterminée.}}$$

- L'étude de la fonction φ_k en question ***14*** ne nécessite que les valeurs connues (listées ci-dessus).

  La fonction φ_k est :

  × continue sur $]0, +\infty[$.

  × strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (d'après l'étude réalisée en question ***14***).

  Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur :

$$\varphi_k\big(]0, +\infty[\big) \ = \ ]\lim_{t \to 0} \varphi_k(t), \lim_{t \to +\infty} \varphi_k(t)[\ = \ ]\theta_k \, \big(1 - A_{k-1}\big) + A_{k-1}, \theta_k[$$

Or : $\theta_{k-1}\ \big(1 - A_{k-1}\big) \in \,]\theta_k\ \big(1-A_{k-1}\big) + A_{k-1}, \theta_k[$. En effet :

× comme $\theta_{k-1} \geqslant \theta_k$ et $1 - A_{k-1} \geqslant 0$ alors :

$$\theta_{k-1}\ \big(1 - A_{k-1}\big) \ \geqslant\ \theta_k\ \big(1 - A_{k-1}\big)\ >\ \theta_k\ \big(1 - A_{k-1}\big) - A_{k-1} \qquad \textit{(car } A_{k-1} > 0\textit{)}$$

× $\theta_{k-1}\ \big(1 - A_{k-1}\big)\ <\ \theta_k$ par hypothèse.

On en déduit donc que $\theta_{k-1}\ \big(1 - A_{k-1}\big)$ admet un unique antécédent par φ_k sur $]0, +\infty[$. On note alors α_k cette valeur.

Si toutes les valeurs s_1, ..., s_k, δ et r sont fournies, alors α_k est définie de manière unique et il en est donc de même de $\gamma_k = \alpha_k - r$.

Commentaire

- La formulation de cette question laisse songeur car il est difficile de comprendre à quoi le terme « Réciproquement » fait référence.
- Si la loi de T est connue, la définition unique des valeurs γ_1, ..., γ_a ne fait aucun doute puisque ce sont les valeurs sur $[0, 1[$, ..., $[a-1, a[$ de la fonction γ_T définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \gamma_T(t) \ =\ \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

- Tout l'enjeu de la question semble donc de savoir si on peut déterminer la fonction intensité de défaut si on ne connaît pas la loi de T mais uniquement les valeurs des cotations s_1, ..., s_a ainsi que le taux de recouvrement δ et la valeur r permettant de déterminer le taux de l'actif sans risque. □

16. Pour obtenir assez facilement une valeur approchée des γ_k, on remplace les termes en e^{-t} dans l'expression de $\varphi_k(t)$ par $1 - t$.
On considère alors que les γ_k sont solutions du système, pour tout $k \in \{1, \dots, a\}$:

$$\theta_k\Big(1 - A_{k-1}\big(1 - \alpha_k\big)\Big) - A_{k-1} = \theta_{k-1}\ \big(1 - A_{k-1}\big) \qquad (4)$$

(on pose $\theta_0 = 1$)

a) Exprimer γ_k en fonction de $A_{k-1}, \theta_k, \theta_{k-1}$ et r.

Démonstration.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{D'après l'énoncé} & \theta_k\Big(1 - A_{k-1}\big(1-\alpha_k\big)\Big) - A_{k-1} & = & \theta_{k-1}\ \big(1 - A_{k-1}\big) \\[6pt]
\text{donc} & \theta_k\Big(1 - A_{k-1}\big(1-\alpha_k\big)\Big) & = & \theta_{k-1}\ \big(1 - A_{k-1}\big) + A_{k-1} \\[6pt]
\text{donc} & 1 - A_{k-1}\big(1-\alpha_k\big) & = & \dfrac{\theta_{k-1}}{\theta_k}\ \big(1 - A_{k-1}\big) + \dfrac{A_{k-1}}{\theta_k} \qquad \textit{(car } \theta_k \neq 0\textit{)} \\[6pt]
\text{donc} & -A_{k-1}\big(1-\alpha_k\big) & = & \dfrac{\theta_{k-1}}{\theta_k}\ \big(1 - A_{k-1}\big) + \dfrac{A_{k-1}}{\theta_k} - 1 \\[6pt]
\text{donc} & 1 - \alpha_k & = & -\dfrac{1}{A_{k-1}}\ \dfrac{\theta_{k-1}}{\theta_k}\ \big(1 - A_{k-1}\big) - \dfrac{1}{\theta_k} + \dfrac{1}{A_{k-1}} \\[6pt]
\text{donc} & -\alpha_k & = & -\dfrac{1}{A_{k-1}}\ \dfrac{\theta_{k-1}}{\theta_k}\ \big(1 - A_{k-1}\big) - \dfrac{1}{\theta_k} + \dfrac{1}{A_{k-1}} - 1 \\[6pt]
\text{donc} & \alpha_k & = & \dfrac{\theta_{k-1}}{\theta_k}\ \left(\dfrac{1}{A_{k-1}} - 1\right) + \dfrac{1}{\theta_k} - \dfrac{1}{A_{k-1}} + 1
\end{array}$$

Finalement : $\gamma_k = \alpha_k - r = \dfrac{\theta_{k-1}}{\theta_k}\ \left(\dfrac{1}{A_{k-1}} - 1\right) + \dfrac{1}{\theta_k} - \dfrac{1}{A_{k-1}} + 1 - r$.

Commentaire

- Cette **Partie 3**, très technique, fait la part belle aux calculs. Elle utilise assez peu de résultats mathématiques. Il s'agit la plupart du temps de réordonner des calculs tout en manipulant des variables qui sont définies par des variables qui sont elles-mêmes définies par d'autres variables (la quantité θ_k est définie par la quantité w_k qui est elle-même définie par la quantité s_k). Il s'agit donc parfois seulement d'un jeu d'écriture. Cela ne signifie pas pour autant que les questions sont faciles. Si les questions font essentiellement appel à des manipulations algébriques, celles-ci sont rarement guidées et demandent parfois une prise d'initiative qui risque d'empêcher les candidats de traiter la question.
- On peut comprendre la volonté du concepteur d'aborder le problème dans le cas des cotations. Cependant, l'enchaînement de questions de la **Partie 3** n'éclaire pas sur ce cas. Cet enchaînement a plutôt tendance à perdre les candidats dans la multitude de notations. Le thème est alors quelque peu délaissé et la question ***15.c)*** qui s'y rapporte n'est certainement pas suffisamment motivée pour que l'on comprenne le rôle de cette partie.
- Il est relativement fréquent que les sujets du `TOP3` soient des sujets « à thème ». L'objectif est alors de traiter les aspects mathématiques d'un sujet original, qu'il soit biologique (`ESSEC-II 2018` : étude de la diapause d'œufs d'insectes, `ESSEC-I 2021` : étude de la propagation d'un virus), économique (`ESSEC-I 2022` : étude du Credit Default Swap) ou encore statistique (`ESSEC-II 202` : étude du biais par la taille). Lorsque c'est le cas, il est relativement fréquent que le sujet introduise un grand nombre de notations. Les thèmes réels dépendant généralement d'un grand nombre de facteurs, on retrouve alors un grand nombre de variables lors de la mise en équation. Lorsque c'est le cas, il est conseillé de se munir d'une feuille séparée des autres sur laquelle on inscrit les définitions de variables au fur et à mesure de leur introduction. Cela permet généralement d'avoir les idées plus claires sur les dépendances entre variables ainsi que sur les différentes définitions. □

b) Écrire un script **Scilab** qui détermine et affiche, de proche en proche, les γ_k, solutions du système d'équations (4) si a, r, δ et $(s_1, \ldots, s_a)$ sont donnés par l'utilisateur.

Démonstration.

- On propose le programme suivant.

```
function G = calcGamma(r, delta, S)
    Theta = 1 ./ (r + S ./ (1 - delta))
    a = length(S)
    B = zeros(1,a)
    G = zeros(1, a)
    B(1) = 1
    G(1) = S(1) / (1 - delta)
    for k = 2:a
        B(k) = B(k-1) * exp(-r-G(k-1))
        G(k) = Theta(k-1)/Theta(k)*(1/B(k) - 1) + 1/Theta(k) - 1/B(k) + 1-r
    end
endfunction
```

- Détaillons les différents éléments de ce programme.

× **Début de la fonction**

On commence par préciser la structure de la fonction :

– cette fonction se nomme `calcGamma`.

– elle prend en entrée les paramètres `r` (variable qui définit la valeur de r), `delta` (variable qui définit la valeur de δ), et `S` (matrice ligne qui contient les valeurs $s_1, \dots, s_a$).

– elle admet pour variable de sortie `G` (matrice ligne de longueur a destinée à contenir les valeurs $\gamma_1, \dots, \gamma_a$).

```
function G = calcGamma(r, delta, S)
```

On définit alors 4 variables informatiques différentes :

– `Theta` est une matrice ligne de longueur a qui définit les valeurs $\theta_1, \dots, \theta_a$. Pour ce faire, on revient à la définition de ces valeurs :

$$\forall k \in [\![1, a]\!],\ \theta_k = \frac{1}{w_k} = \frac{1}{r + \frac{s_k}{\delta}}$$

Comme on a accès aux valeurs de r et δ ainsi qu'à la matrice ligne contenant les valeurs $s_1, \dots, s_a$, on peut se servir des fonctionnalités **Scilab** (en particulier de l'opérateur terme à terme `./`) afin de remplir `Theta` sans structure itérative.

```
Theta = 1 ./ (r + S ./ (1 - delta))
```

– `a` est la variable qui stocke la valeur de a. Comme $s_1, \dots, s_a$ sont des valeurs demandées à l'utilisateur, la valeur de a est déjà implicitement demandée à l'utilisateur. Il est inutile de lui demander explicitement. Pour obtenir cette valeur, il suffir alors de déterminer la taille de la matrice ligne `S`.

```
a = length(S)
```

– `B` est une matrice ligne de longueur a destinée à contenir les valeurs $B_1, \dots, B_a$. On définit cette nouvelle notation comme suit :

$$\forall k \in [\![1, a]\!],\ B_k = A_{k-1}$$

Autrement dit, la matrice ligne `B` contiendra à terme les valeurs $A_0, \dots, A_{k-1}$. On introduit la famille $(B_k)_{k \in [\![1,a]\!]}$ car toutes les autres familles considérées sont indicées à partir de 1 (et non de 0) et afin de ne pas introduire de décalage entre le premier terme de la famille (indicé 1) et l'indice du premier élément de la matrice (qui est 1 en **Scilab**). On crée alors une matrice ligne de la bonne taille à l'aide de la fonction `zeros`.

```
B = zeros(1,a)
```

On corrige alors le premier terme de `B` en le remplaçant par la valeur $B_1 = A_0 = 1$.

```
B(1) = 1
```

– `G` est une matrice ligne de longueur a destinée à contenir les valeurs $\gamma_1, \dots, \gamma_a$. On crée une matrice ligne de la bonne taille à l'aide de la fonction `zeros`.

```
G = zeros(1,a)
```

On corrige alors le premier terme de `G` en le remplaçant par la valeur $\gamma_1 = \dfrac{s_1}{1-\delta}$.

```
G(1) = S(1) / (1 - delta)
```

× **Structure itérative**

Les lignes 7 à 11 consistent à mettre à jour les variables `B` et `G`. Plus précisément, on met en place une structure itérative (boucle `for`) afin de mettre à jour successivemetn le $2^{\text{ème}}$, $3^{\text{ème}}$, …, $a^{\text{ème}}$ élément des matrices `B` et `G`.

```
8      for k = 2:a
9          B(k) = B(k-1) ⋆ exp(-r-G(k-1))
10         G(k) = Theta(k-1)/Theta(k)⋆(1/B(k) - 1) + 1/Theta(k) - 1/B(k) + 1-r
11     end
```

Cette structure itérative se base sur les formules obtenues dans l'énoncé :

$$\forall k \in [\![1, a]\!], \quad B_k = B_{k-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha_k} \ = \ B_{k-1}\,\mathrm{e}^{-r-\gamma_{k-1}}$$

$$\forall k \in [\![1, a]\!], \quad \gamma_k = \frac{\theta_{k-1}}{\theta_k}\left(\frac{1}{B_k} - 1\right) + \frac{1}{\theta_k} - \frac{1}{B_k} + 1 - r$$

Il est à noter qu'il est important que la ligne 9 soit placée avant la ligne 10. En effet, la valeur γ_k est définie à l'aide de la valeur B_k. Il faut donc que cette dernière valeur soit déjà connue si l'on souhaite obtenir γ_k.

Commentaire

- La présence du terme « affichage » dans la formulation de la question, laisse penser que l'énoncé demande au candidat un script utilisant l'instruction **`input`** pour recueillir les données utilisateurs et l'instruction **`disp`** pour réaliser l'affichage du résultat. Nous n'avons pas opté pour cette manière de faire dans le corrigé car la présentation sous forme de fonction semble plus pertinente. Pour le comprendre, rappelons que le but d'une fonction informatique est d'effectuer un calcul (et pas de réaliser un affichage. La présentation sous forme de fonction présente l'intérêt indéniable que le **calcul** effectué par une fonction peut être utilisé ailleurs en réalisant un appel à cette fonction. En particulier, il semble ici bien peu pertinent d'afficher un à un (à l'aide de la fonction `disp`) les éléments de la famille $(\gamma_k)_{k\in[\![1,a]\!]}$. Il est bien plus pertinent de les stocker dans une variable informatique ce qui permettra, plus tard, de tracer la courbe d'intensité présente dans le sujet. Notons au passage que si l'on souhaite réaliser l'affichage d'un calcul effectué par une fonction, il suffit d'ajouter une surcouche d'affichage :

```
r = input('Prière d''entrer la valeur du taux de l'actif non risqué')
delta = input('Prière d''entrer la valeur du taux de recouvrement')
S = input('Prière d''entrer la matrice ligne des valeurs de cotations')
G = calcGamma(r, delta, S)
disp(G, 'Les valeurs d'intensité de défaut sont : ')
```

- Afin d'obtenir le graphique présent en fin d'énoncé, on propose le script suivant.

```
r = 0.03
delta = 0.3
S = [0.01925, 0.0235, 0.0265, 0.0265, 0.0285, 0.03, 0.0335]
a = length(S)
G = calcGamma(r, delta, S)
for i = 1 : a
    plot([i-1,i], [G(i), G(i)])
end
```

□

Pour a égal à 7 ans, en disposant des cotations 0.01925, 0.0235, 0.0265, 0.0265, 0.0285, 0.03, 0.0335 pour les CDS de maturité respectives $1, 2, \ldots, 7$ ans, $r = 3\%$ et $\delta = 30\%$, on a la courbe d'intensité de défaut suivante :