EML 2022

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\big([X = k]\big) \ = \ q^k\, p \ = \ (1-p)^k\, p$$

PARTIE A

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. D'où : $Y(\Omega) = (X+1)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}\big([Y = k]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X+1 = k]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X = k-1]\big) \ = \ q^{k-1}\, p$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p).}$$

□

2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p)$. La v.a.r. Y admet donc une variance (et donc une espérance).
  On en déduit que la v.a.r. $X = Y - 1$ admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée affine d'une v.a.r. qui en admet une.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X) & = & \mathbb{E}(Y-1) & \\ & = & \mathbb{E}(Y) - 1 & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{p} - 1 & \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1-p}{p} = \dfrac{q}{p}}$$

- Enfin :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{V}(Y-1) \ = \ \mathbb{V}(Y) \ = \ \frac{q}{p^2} \qquad \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p)\textit{)}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}}$$

□

3. Compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en entrée le réel p, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```
1 function X = simule_X(p)
2     Y = ......
3     while ......
4         Y = Y + 1
5     end
6     X = Y - 1
7 endfunction
```

Démonstration.
On propose de compléter la fonction de la manière suivante :

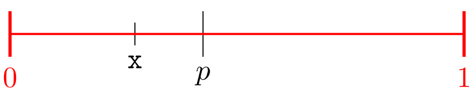
```
1 function X = simule_X(p)
2     Y = 1
3     while rand() > p
4         Y = Y + 1
5     end
6     X = Y - 1
7 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simule_X`,
  × elle prend en entrée le paramètre `p`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `X`.

```
1 function X = simule_X(p)
```

- **Contenu de la fonction**
  Les lignes 2 à 5 consistent à simuler la v.a.r. Y de loi $\mathcal{G}(p)$, et de stocker ce résultat dans la variable `Y`. Ceci peut se faire à l'aide de `rand()`, instruction qui sert à simuler une v.a.r. U qui suit la loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. Détaillons la manière de procéder.
  On commence par choisir aléatoirement un réel (notons-le `x`) dans $]0,1[$:



Cette valeur `x` obtenue est plus petite que p avec probabilité : $\mathbb{P}\big([U \leqslant p]\big) = p$.
Cette valeur `x` est strictement plus grande que p avec probabilité :

$$\mathbb{P}\big([U > p]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([U \leqslant p]\big) = 1 - p$$

On peut ainsi simuler une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès p : si $rand() \leqslant$ `p` alors il y a succès (ce qui se produit avec probabilité `p`) et si $rand() >$ `p` alors il y a échec (ce qui se produit avec probabilité $1 -$ `p`).

Cela permet de simuler la v.a.r. Y :

(i) on initialise tout d'abord à 1 un compteur permettant de mémoriser le numéro de l'épreuve de Bernoulli à venir.

```
Y = 1
```

(ii) on teste si l'épreuve résulte en un échec. Tant que c'est le cas, on doit réitérer l'expérience.

```
while rand() > p
```

À chaque nouvelle expérience, on doit mettre à jour le compteur `Y` qui stocke le numéro de l'épreuve à venir.

```
while rand() > p
    Y = Y + 1
end
```

On sort de la boucle en cas de réussite de l'épreuve de Bernoulli. Les mises à jour successives du compteur `Y` assurent que cette variable contient le rang du premier succès dans la succesion d'épreuves de Bernoulli effectuées. Autrement dit, `Y` contient une simulation de la v.a.r. Y

- **Fin de la fonction**
  Pour simuler la v.a.r. X, il reste alors à utiliser la relation entre les v.a.r. X et Y : $X = Y - 1$.

```
X = Y - 1
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le script **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

PARTIE B

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si k est égal à 0, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit k variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(X_1 + \cdots + X_k)$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.
Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.
On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi : $Z_0 = 1$.
On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

4. Compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n.
Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
1  function Z = simule_Z(n, p)
2      Z = 1
3      for i = 1 : n
4          s = 0
5          for j = 1 : Z
6              ......
7          end
8          Z = ......
9      end
10 endfunction
```

Démonstration.
On propose de compléter la fonction de la manière suivante :

```
1  function Z = simule_Z(n, p)
2      Z = 1
3      for i = 1 : n
4          s = 0
5          for j = 1 : Z
6              s = s + simule_X(p)
7          end
8          Z = s
9      end
10 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - cette fonction se nomme `simule_Z`,
  - elle prend en entrée les paramètres `n` et `p`,
  - elle admet pour variable de sortie `Z`.

```
1  function Z = simule_Z(n, p)
```

  En ligne 2, la variable `Z`, qui contiendra une simulation de la v.a.r. Z_n, est initialisée à 1 : la valeur prise par la v.a.r. Z_0.

```
2      Z = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 9 consistent, au fur et à mesure des activations de la machine, à mettre à jour la variable `Z` pour qu'elle contienne successivement une réalisation de Z_1, Z_2, ..., Z_n. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle for) :

```
3      for i = 1 : n
```

× Si la variable Z contient la valeur k à l'issue du $i^{\text{ème}}$ tour de boucle, alors c'est que la v.a.r. Z_i prend la valeur k. Autrement dit, avant la $(i+1)^{\text{ème}}$ activation de la machine, le joueur possède k jetons.
D'après l'énoncé, le joueur les insère alors tous dans la machine. Toujours d'après l'énoncé, la machine simule alors k v.a.r. $X_1, \ldots, X_k$ indépendantes et de même loi que X. Et dans ce cas, le nombre de jetons obtenus par le joueur à l'issue de la $(i+1)^{\text{ème}}$ activation de la machine est une simulation de la v.a.r. $X_1 + \cdots + X_k$. Autrement dit Z_{i+1} prend la même valeur que $X_1 + \cdots + X_k$.
Pour mettre à jour la variable Z, il faut donc :

1) simuler la v.a.r. $X_1 + \cdots + X_k$. On stockera la valeur de cette simulation dans la variable s.

2) mettre à jour la variable Z pour qu'elle contienne la même valeur que la variable s.

Détaillons la manière de procéder.

1) (i) En ligne 4, on commence par initialiser la variable s à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
4        s = 0
```

(ii) Les lignes 5 à 7 permettent de mettre à jour la variable s pour qu'elle contienne une simulation de la somme $X_1 + \cdots + X_k$, où k est la valeur stockée dans la variable Z. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle for) et on utilise la fonction simule_X définie en question précédente pour obtenir des simulations de $X_1, \ldots, X_k$ qui sont indépendantes et de même loi que X.

```
5        for j = 1 : Z
6            s = s + simule_X(p)
7        end
```

2) On met enfin à jour la variable Z pour qu'elle contienne la même valeur que la variable s.

```
8        Z = s
```

- **Fin de la fonction**
À l'issue de la $1^{\text{ère}}$ boucle (sur i), la variable Z contient une simulation de la v.a.r. Z_n.

□

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)$.
On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. a) Préciser les valeurs de u_0 et de u_1.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme Z_0 est la variable aléatoire constante égale à 1, alors :

$$u_0 \;=\; \mathbb{P}\big([Z_0 = 0]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

$$\boxed{u_0 = 0}$$

- D'après l'énoncé, la v.a.r. Z_1 suit la même loi que la v.a.r. X. Ainsi :

$$u_1 \;=\; \mathbb{P}\big([Z_1 = 0]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([X = 0]\big) \;=\; q^0\, p \;=\; p$$

$$\boxed{u_1 = p}$$

□

b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Si l'événement $[Z_n = 0]$ est réalisé, c'est que le joueur n'a plus de jetons après n activations de la machine. Si c'est le cas, il n'aura pas non plus de jetons après $(n + 1)$ activations. En effet, la machine ne verse aucun jeton au joueur s'il n'en insère pas. On en déduit que l'événement $[Z_{n+1} = 0]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ [Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0].}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rccll} & [Z_n = 0] & \subset & [Z_{n+1} = 0] & \\ \text{donc} & \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) & \leqslant & \mathbb{P}\big([Z_{n+1} = 0]\big) & \textit{(par croissance de } \mathbb{P}\textit{)} \\ \text{d'où} & u_n & \leqslant & u_{n+1} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

- La suite (u_n) est donc :
  × croissante,
  × majorée par 1. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

□

Dans la suite de l'exercice, on note : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. Justifier : $\mathbb{P}(R) = \ell$.

Démonstration.

- Remarquons :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événement } R \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{Le joueur finit par ne plus avoir de jetons} \\ \Leftrightarrow & \text{Il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que le joueur n'a plus de jetons après la } n^{\text{ème}} \\ & \text{activation} \\ \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N}^*,\ [Z_n = 0] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{Après la } 1^{\text{ère}} \text{ activation, le joueur n'a plus de jetons} \\ \texttt{OU} & \text{après la } 2^{\text{ème}} \text{ activation, le joueur n'a plus de jetons} \\ \texttt{OU} & \text{après la } 3^{\text{ème}} \text{ activation, le joueur n'a plus de jetons} \\ \dots & \dots \\ \texttt{OU} & \text{après la } n^{\text{ème}} \text{ activation, le joueur n'a plus de jetons} \\ \dots & \dots \end{array} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0] \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } R = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0].}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(R) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0]\right) & \\ & = & \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} [Z_n = 0]\right) & \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)} \end{array}$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$$

On en conclut :

$$\bigcup_{n=1}^{N} [Z_n = 0] \ = \ [Z_N = 0] \qquad \textit{(la suite } \big([Z_n = 0]\big)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite croissante d'événements)}$$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(R) & = & \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} [Z_n = 0]\right) & \\ & = & \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_N = 0]\big) & \\ & = & \lim\limits_{N\to+\infty} u_N & \textit{(par définition de } u_N\textit{)} \\ & = & \ell & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}(R) = \ell.}$$

Commentaire

- Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

1) Introduire des événements simples (« tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage », « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ...) liés à l'expérience considérée.
Nommer l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

2) Décomposer l'événement A à l'aide d'événements simples.

3) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union d'une suite croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Commentaire

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :

  × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.

  × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le corollaire du théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant l'événements contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection d'une suite décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.

  × si c'est le cas, on utilise la formule associée.

  × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule des probabilités composées.

- Dans un exercice de probabilités discrètes, il est assez fréquent de considérer des expériences qui font intervenir un nombre infini d'étapes. Dès lors, il est assez naturel de s'interroger sur la probabilité qu'une propriété puisse se réaliser une infinité (successive) de fois ou qu'une propriété soit réalisé au moins une fois au cours de l'expérience. Cela revient à considérer des événements qui s'écrivent à l'aide d'une union et / ou d'une intersection infinie d'événements. Pour déterminer la probabilité de tels événements, la méthode usuelle consiste à utiliser le théorème de la limite monotone. Il stipule, si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

  Il est à noter qu'aucune hypothèse n'est faite sur la suite (A_k) d'événements. Elle peut être une suite croissante ou décroissante d'événements ou n'être ni décroissante, ni croissante. Cette question de la monotonie de la suite ne se pose pas lors de l'utilisation du théorème de la limite monotone. Elle n'apparaît que dans l'étape suivante où l'on cherche à déterminer la probabilité d'une intersection / union **finie** d'événements.

- On a vu dans le point précédent que certaines propriétés s'expriment naturellement à l'aide d'une union / intersection infinie d'événements. En conséquence, l'utilisation du théorème de la limite monotone est assez fréquente aux concours. Lors de la session `2021`, les sujets `ECRICOME`, `EDHEC`, `ESSEC-I`, `ESSEC-II` contenaient tous une question qui nécissitait l'utilisation de ce théorème. □

7. a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2=0]\big) = (u_1)^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Si l'événement $[Z_1 = k]$ est réalisé, c'est que le joueur possède k jeton après la $1^{\text{ère}}$ activation de la machine. Il en possède donc k juste avant la $2^{\text{ème}}$ activation.
  Dans ce cas :

  l'événement $[Z_2 = 0]$ est réalisé
  $\Leftrightarrow$ Le joueur ne reçoit aucun jeton à la $2^{\text{ème}}$ activation
  $\Leftrightarrow$ La v.a.r. $X_1 + \cdots + X_k$ prend la valeur 0
  $\Leftrightarrow$ Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, la v.a.r. X_i prend la valeur 0 *(car X_1, …, X_k sont à valeurs positives)*
  $\Leftrightarrow$ $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $[X_i = 0]$ est réalisé
  $\Leftrightarrow$ L'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé
  `ET` L'événement $[X_2 = 0]$ est réalisé
  … …
  `ET` L'événement $[X_k = 0]$ est réalisé
  $\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcap\limits_{i=1}^{k} [X_i = 0]$ est réalisé

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2=0]\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i=0]\Big) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big([X_i=0]\big) && \textit{(car } X_1, \ldots, X_k \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big([X=0]\big) && \textit{(car } X_1, \ldots, X_k \textit{ suivent la même loi que } X\textit{)} \\
&= \Big(\mathbb{P}\big([X=0]\big)\Big)^k
\end{aligned}$$

  Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
(u_1)^k &= \Big(\mathbb{P}\big([Z_1=0]\big)\Big)^k \\
&= \Big(\mathbb{P}\big([X=0]\big)\Big)^k && \textit{(car } Z_1 \textit{ suit la même loi que } X\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2=0]\big) = \Big(\mathbb{P}\big([X=0]\big)\Big)^k = (u_1)^k.}$$

□

On **admet** que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_{n+1}=0]\big) = (u_n)^k$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,(u_n)^k = \dfrac{p}{1-q\,u_n}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  La famille $\big([Z_1=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & \mathbb{P}\big([Z_{n+1}=0]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\cap[Z_{n+1}=0]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_{n+1}=0]\big) & \textit{(car : } \forall k\in\mathbb{N}, \\ & & & \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big) = \mathbb{P}\big([X=k]\big) \neq 0\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,(u_n)^k & \textit{(d'après l'énoncé)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,(u_n)^k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme Z_1 et X suivent la même loi :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1=k]\big)\,(u_n)^k \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\,(u_n)^k \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k\,p\,(u_n)^k \\ & = & p\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (q\,u_n)^k \\ & = & p \times \dfrac{1}{1-q\,u_n} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{p}{1-q\,u_n}.}$$

□

8. a) Montrer que ℓ vérifie : $(\ell-1)(q\,\ell-p) = 0$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{p}{1-q\,u_n}$. Donc :

$$(1-q\,u_n)\,u_{n+1} \ = \ p$$

- Par passage à la limite dans cette égalité, on obtient :

$$(1-q\,\ell)\,\ell \ = \ p \quad \text{donc} \quad \ell - q\,\ell^2 = p$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}(\ell-1)\,(q\,\ell-p)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad q\,\ell^2-p\,\ell-q\,\ell+p=0\\ &\Leftrightarrow \quad q\,\ell^2-(p+q)\,\ell+p=0\\ &\Leftrightarrow \quad q\,\ell^2-\ell+p=0 \qquad\qquad \textit{(car : } p+q=1\textit{)}\\ &\Leftrightarrow \quad p=\ell-q\,\ell^2\end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie d'après le point précédent. Grâce au raisonnement par équivalence, la $1^{\text{ère}}$ assertion l'est aussi.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (\ell-1)\,(q\,\ell-p)=0.}$$

□

b) On suppose : $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\mathbb{P}(R)=1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***6.*** : $\mathbb{P}(R)=\ell$. Il faut donc démontrer dans cette question : $\ell=1$.
- D'après la question ***5.b)***, on sait que la suite (u_n) est majorée par 1, *i.e.* : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant 1$. Ainsi, par passage à la limite : $\ell\leqslant 1$.
- De plus, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{lccc} & & (\ell-1)\,(q\,\ell-p) \ = \ 0 & \\ \text{donc} & \ell-1=0 & \texttt{OU} & q\,\ell-p=0\\ \text{d'où} & \ell=1 & \texttt{OU} & \ell=\dfrac{p}{q}\end{array}$$

- Cherchons à quel intervalle appartient le réel $\dfrac{p}{q}$.

$$\begin{array}{lccl} & p & \geqslant & \dfrac{1}{2}\\ \text{donc} & -p & \leqslant & -\dfrac{1}{2}\\ \text{d'où} & 1-p & \leqslant & \dfrac{1}{2}\\ \text{ainsi} & q & \leqslant & \dfrac{1}{2}\\ \text{alors} & \dfrac{1}{q} & \geqslant & 2 \qquad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)}\end{array}$$

On sait alors :

$$p \ \geqslant \ \frac{1}{2} \ \geqslant \ 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{q} \ \geqslant \ 2 \ \geqslant \ 0$$

On en déduit :

$$\frac{p}{q} \ \geqslant \ \frac{1}{2}\times 2=1$$

$$\boxed{\text{Si on suppose } p\geqslant \frac{1}{2}, \text{ alors : } \frac{p}{q}\geqslant 1.}$$

- Deux cas se présentent alors :
  × si $\frac{p}{q} = 1$, c'est-à-dire :

$$p = q \ \Leftrightarrow\ p = 1 - p \ \Leftrightarrow\ 2\,p = 1 \ \Leftrightarrow\ p = \frac{1}{2}$$

  Alors :

$$\begin{array}{rcl} \Big(\ell = 1 \quad \texttt{OU} \quad \ell = \frac{p}{q}\Big) & \Leftrightarrow & \Big(\ell = 1 \quad \texttt{OU} \quad \ell = 1\Big) \\ & \Leftrightarrow & \ell = 1 \end{array}$$

  On en déduit : $\mathbb{P}(R) = \ell = 1$.

  × si $\frac{p}{q} > 1$, alors :

$$\Big(\ell = 1 \quad \texttt{OU} \quad \ell = \frac{p}{q}\Big) \ \Leftrightarrow\ \ell = 1 \qquad \textit{(car : } \ell \leqslant 1 \textit{ et } \frac{p}{q} > 1\textit{)}$$

  On en déduit : $\mathbb{P}(R) = \ell = 1$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, si } p \geqslant \frac{1}{2}\text{, on obtient : } \mathbb{P}(R) = 1.}$$

□

c) On suppose : $p < \frac{1}{2}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbb{P}(R) < 1$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$.
  - ▸ **Initialisation** : D'après la question ***5.a)*** : $u_0 = 0 \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$).
    × Tout d'abord : $u_{n+1} = \mathbb{P}\big([Z_{n+1} = 0]\big) \geqslant 0$.
    × Ensuite, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{lccll} & u_n & \leqslant & \frac{p}{q} & \\ \text{donc} & -q\,u_n & \geqslant & -p & \textit{(car : } -q < 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - q\,u_n & \geqslant & 1 - p & \\ \text{ainsi} & 1 - q\,u_n & \geqslant & q & \\ \text{alors} & \frac{1}{1 - q\,u_n} & \leqslant & \frac{1}{q} & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{puis} & \frac{p}{1 - q\,u_n} & \leqslant & \frac{p}{q} & \textit{(car : } p > 0\textit{)} \\ \text{enfin} & u_{n+1} & \leqslant & \frac{p}{q} & \textit{(d'après \textbf{7.b)})} \end{array}$$

    Finalement : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{p}{q}$.
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right].}$$

- D'après le point précédent : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{p}{q}$.
  Par passage à la limite dans cet encadrement :
$$0 \leqslant \ell \leqslant \frac{p}{q}$$
- Cherchons à quel intervalle appartient le réel $\dfrac{p}{q}$.
$$\begin{array}{llcll} & p & < & \frac{1}{2} & \\ \text{d'où} & 1-p & > & \frac{1}{2} & \\ \text{ainsi} & q & > & \frac{1}{2} & \\ \text{alors} & \frac{1}{q} & < & 2 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \end{array}$$
  On sait alors :
$$0 \leqslant p < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{1}{q} < 2$$
  On en déduit :
$$\frac{p}{q} < \frac{1}{2} \times 2 = 1$$
  Si on suppose $p < \dfrac{1}{2}$, alors : $\dfrac{p}{q} < 1$. En particulier : $\ell \leqslant \dfrac{p}{q} < 1$.

  D'où : $\mathbb{P}(R) = \ell < 1$.

Commentaire

Plus précisément, on peut démontrer, grâce à la question ***8.a)*** que, dans le cas où $p < \dfrac{1}{2}$, alors : $\mathbb{P}(R) = \dfrac{p}{q}$. En effet :
$$\begin{array}{lll} & (\ell-1)\,(q\,\ell - p) = 0 & \\ \text{donc} & \ell = 1 \quad \texttt{OU} \quad \ell = \frac{p}{q} & \\ \text{d'où} & \ell = \frac{p}{q} & \textit{(car : } \ell < 1\textit{)} \end{array}$$

☐

d) Expliquer pourquoi le casino préfèrera choisir p dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.
Deux cas se présentent pour le casino.
- si $p \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors : $\mathbb{P}(R) = 1$.
  L'événement R est donc presque sûrement réalisé. Ainsi, presque sûrement, le joueur finit par ne plus avoir de jetons. Autrement dit, le joueur finit par perdre presque sûrement.
- si $p < \dfrac{1}{2}$, alors : $\mathbb{P}(R) < 1$.
  L'événement R n'est donc pas presque sûrement réalisé. Autrement dit, le joueur ne finit pas par perdre presque sûrement.

Le casino préfèrera donc par choisir $p \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ pour s'assurer d'être rentable.

☐

EXERCICE 2

On rappelle que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **trace de** M le réel noté $\text{tr}(M)$ défini par :

$$\text{tr}(M) = a + d$$

Soit J une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = M + \text{tr}(M)\, J$$

1. a) Montrer que l'application $\text{tr} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \text{tr}(M) \end{array} \right.$ est linéaire.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit $(M_1, M_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

  Ainsi, il existe $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathbb{R}^4$ et $(a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

- Par définition de la trace :

$$\begin{array}{rcl} \text{tr}\left(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\right) & = & \text{tr}\left(\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \text{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1\, a_1 & \lambda_1\, b_1 \\ \lambda_1\, c_1 & \lambda_1\, d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2\, a_2 & \lambda_2\, b_2 \\ \lambda_2\, c_2 & \lambda_2\, d_2 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \text{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2 & \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 \\ \lambda_1\, c_1 + \lambda_2\, c_2 & \lambda_1\, d_1 + \lambda_2\, d_2 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \left(\lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2\right) + \left(\lambda_1\, d_1 + \lambda_2\, d_2\right) \\ & = & \lambda_1\left(a_1 + d_1\right) + \lambda_2\left(a_2 + d_2\right) \\ & = & \lambda_1\ \text{tr}(M_1) + \lambda_2\ \text{tr}(M_2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application tr est bien linéaire.}}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, on définit l'application tr pour les matrices carrées d'ordre 2. On peut bien évidemment définir cette application pour les matrices carrées de tout ordre.
  Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ alors :

$$\text{tr}(M) \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

(la trace est la somme des coefficients diagonaux)

- On peut d'ailleurs démontrer le caractère linéaire de l'application tr.
  Détaillons la démonstration.

  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  On note alors $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = \big(b_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \text{tr}\left(\lambda \cdot A + \mu \cdot B\right) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda \cdot A + \mu \cdot B\right)_{i,i} & \textit{(par définition de l'application } \text{tr}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda\, a_{i,i} + \mu\, b_{i,i}\right) & \\ & = & \lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ & = & \lambda \ \text{tr}(A) + \mu \ \text{tr}(B) & \end{array}$$

- L'application tr n'est pas officiellement au programme `ECE`. Elle peut cependant être utilisée dans un exercice pour peu qu'elle soit définie au préalable, ce qui est bien le cas ici. Il est conseillé de connaître les propriétés générales de cette application en cas d'oral `HEC` car son utilisation est relativement fréquente.

☐

b) Déterminer une base du noyau de l'application tr et vérifier : $\dim\big(\text{Ker}(\text{tr})\big) = 3$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} M \in \text{Ker}(tr) & \Leftrightarrow & \text{tr}(M) = 0_{\mathbb{R}} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \ a + d = 0 \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \ a = -d \right. \end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \text{Ker}(\text{tr}) & = & \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0_{\mathbb{R}}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = -d\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\} \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : Ker(tr)} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).}$$

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Or : $(*) \iff \begin{pmatrix} -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \{ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(par remontées successives)

- Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est :
  × génératrice de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$,
  × libre.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}).}$$

□

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et soit $(M_1, M_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rll} & f\big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) & \\ = & \big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) + \mathrm{tr}\,\big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) \cdot J & \\ = & \big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) + \big(\lambda_1\ \mathrm{tr}(M_1) + \lambda_2\ \mathrm{tr}(M_2)\big) \cdot J & \textit{(par linéarité de l'application } \mathrm{tr}\textit{)} \\ = & \big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) + \big(\lambda_1\ \mathrm{tr}(M_1) \cdot J + \lambda_2\ \mathrm{tr}(M_2) \cdot J\big) & \textit{(par distributivité de la loi } \cdot \textit{ par rapport à la loi } + \textit{)} \\ = & \big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_1\ \mathrm{tr}(M_1) \cdot J\big) + \big(\lambda_2 \cdot M_2 + \lambda_2\ \mathrm{tr}(M_2) \cdot J\big) & \\ = & \lambda_1\ \big(M_1 + \mathrm{tr}(M_1) \cdot J\big) + \lambda_2\ \big(M_2 + \mathrm{tr}(M_2) \cdot J\big) & \\ = & \lambda_1 \cdot f(M_1) + \lambda_2 \cdot f(M_2) & \end{array}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  Alors : $\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{tr}(M) \cdot J \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  Ainsi : $M + \mathrm{tr}(M) \cdot J \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un endomorphisme de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

□

3. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.
Dans la suite, notons : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Avec ces notations : $J = 2 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3$.

- Procédons alors au calcul :

× $$\begin{aligned} f(E_1) &= E_1 + \mathrm{tr}(E_1) \cdot J \\ &= E_1 + 1 \cdot \big(2 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3\big) \ = \ 1 \cdot E_1 + 2 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(E_1,E_2,E_3,E_4)}\big(f(E_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $$\begin{aligned} f(E_2) &= E_2 + \mathrm{tr}(E_2) \cdot J \\ &= E_2 + 0 \cdot \big(2 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3\big) \ = \ 0 \cdot E_1 + 1 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(E_1,E_2,E_3,E_4)}\big(f(E_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $$\begin{aligned} f(E_3) &= E_3 + \mathrm{tr}(E_3) \cdot J \\ &= E_3 + 0 \cdot \big(2 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3\big) \ = \ 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(E_1,E_2,E_3,E_4)}\big(f(E_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $$\begin{aligned} f(E_4) &= E_4 + \mathrm{tr}(E_4) \cdot J \\ &= E_4 + 1 \cdot \big(2 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3\big) \ = \ 0 \cdot E_1 + 2 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3 + 1 \cdot E_4 \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(E_1,E_2,E_3,E_4)}\big(f(E_4)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Rappelons que déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ consiste à exprimer l'image par f des vecteurs E_1, E_2, E_3, E_4 suivant cette même base (E_1, E_2, E_3, E_4). C'est une méthode qu'il faut connaître et savoir appliquer, quel que soit l'espace vectoriel E considéré (si on considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$).
- Au cours de la résolution, on a démontré :

$$f(E_2) = 1 \cdot E_2 \qquad \text{et} \qquad f(E_3) = 1 \cdot E_3$$

Cela permet de conclure que 1 est valeur propre de f ainsi que : $E_1(f) \ \subset \ \mathrm{Vect}\,(E_2, E_3)$.

□

b) Vérifier : $(A - I_4)^2 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$ où I_4 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Par calcul :

$$\begin{aligned}
\left(A - I_4\right)^2 &= \left(A - I_4\right) \times \left(A - I_4\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{(par définition des matrices } A \textit{ et } I_4\textit{)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \left(A - I_4\right)^2 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- Généralement, on trouve plutôt la formulation :

  « Déterminer / calculer $\left(A - I_4\right)^2$ »

  Il est à noter que la matrice A n'est pas fournie dans le sujet. Un candidat qui n'est pas parvenu à la déterminer ne peut donc pas répondre à cette question. Cependant, le résultat étant donné, il peut l'utiliser pour faire la suite. C'est certainement pour cette raison que le concepteur a opté pour cette formulation.
- Le résultat étant donné, écrire l'égalité fournie par l'énoncé (en prenant soin de remplacer la matrice $A - I_4$ par sa valeur) suffit à conclure. Il n'est même pas utile d'effectuer réellement le calcul. Pour autant, le faire n'est pas dénué d'intérêt : c'est une bonne mesure de vérification de la question précédente. En effet, si le calcul ne fournit pas $0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$, cela signifie qu'on a commis une erreur lors de la détermination de la matrice A.

□

c) En déduire les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = (X - 1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{1\}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Sp}(A) \subset \{1\} \text{ et } 1 \text{ est l'unique valeur propre possible de } A.}$$

- Démontrons que 1 est valeur propre de A.

  $$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice est non inversible car possède 1 colonne nulle (C_2 par exemple).

  $$\boxed{\text{On en déduit que 1 est l'unique valeur propre de } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède TOUJOURS un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :
  $$(\alpha\, Q)(A) \ = \ \alpha\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
  $$R(A) \ = \ (A - 5\, I)\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Il faut donc parler D'UN polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Démontrons enfin que A n'est pas diagonalisable.
  On procède par l'absurde.
  On suppose que la matrice A est diagonalisable. Il existe alors :
  × $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible,
  × $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

  telles que : $A = PDP^{-1}$.
  Or $\text{Sp}\big(A\big) = \{1\}$. Donc : $D = I_4$. Ainsi :
  $$A \ = \ P\, I_4\, P^{-1} \ = \ PP^{-1} \ = \ I_4$$
  Absurde !

  $\boxed{\text{On en conclut que la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Commentaire

Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on recontre les questions :
- « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
- « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
- « La v.a.r. X admet une variance ? »
- « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
- « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, NON (à justifier évidemment).

□

d) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question ***3.c)*** : $(A - I_4)^2 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A - I_4)^2 = A^2 - 2A + I_4 \quad \textit{(par la formule du binôme et car les matrices } A \textit{ et } I_4 \textit{ commutent)}$$

- On en déduit $A^2 - 2A + I_4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$

donc $A^2 - 2A = -I_4$

donc $-A^2 + 2A = I_4$

donc $A\left(-A + 2I_4\right) = I_4$

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -A + 2I_4.}$$

Commentaire

Il est évidemment possible d'obtenir l'inverse de la matrice A par le calcul, en procédant par pivot de Gauss. L'avantage de la méthode présentée est qu'elle est uniquement basée sur l'égalité de la question ***3.b)*** qui est fournie dans l'énoncé. □

4. On revient au cas général où J désigne une matrice non nulle quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de f et préciser la dimension du sous-espace propre associé.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$f(E_2) = E_2 + \cancel{\mathrm{tr}(E_2)} \cdot J = 1 \cdot E_2$$

$$\boxed{\text{Comme } E_2 \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}, \text{ le réel 1 est bien valeur propre de } f.}$$

- Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in E_1(f) &\Leftrightarrow f(M) = 1 \cdot M \\ &\Leftrightarrow \cancel{M} + \mathrm{tr}(M) \cdot J = \cancel{M} && \textit{(par définition de } f\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{tr}(M) \cdot J = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{tr}(M) = 0_{\mathbb{R}} \quad \texttt{OU} \quad J = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{tr}(M) = 0_{\mathbb{R}} && \textit{(car la matrice } J \textit{ est non nulle par hypothèse de l'énoncé)} \end{aligned}$$

On en conclut :

$$E_1(f) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = M\} = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0_{\mathbb{R}}\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$$

$$\boxed{\text{Finalement, 1 est bien valeur propre de } f \text{ et, d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}, \text{ le sous-espace propre associé } E_1(f), \text{ est de dimension 3.}}$$ □

b) Justifier que J est un vecteur propre de f et préciser la valeur propre associée.

Démonstration.
Remarquons :

$$f(J) \; = \; J + \mathrm{tr}(J) \cdot J \; = \; \big(1 + \mathrm{tr}(J)\big) \cdot J$$

$\boxed{\text{Comme } J \neq \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{, alors } J \text{ est un vecteur propre de } f \text{, associé à la valeur propre } 1 + \mathrm{tr}(J).}$

Commentaire

- Connaître la définition de vecteur propre suffit pour résoudre cette question et il n'est donc pas acceptable de ne pas la traiter. Profitons-en pour rappeler qu'une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours.
- On a démontré dans la question précédente que le réel 1 était valeur propre de f. Ici, on démontre que le réel $1 + \mathrm{tr}(J)$ est aussi valeur propre. Il est à noter que rien ne dit, à ce stade, que ce dernier réel est différent de 1. Les questions qui suivent étudient justement le caractère diagonalisable de f selon qu'il y ait égalité de ces valeurs propres (c'est le cas si $\mathrm{tr}(J) = 0$) ou non.

□

c) (i) On considère dans cette sous-question le cas où $\mathrm{tr}(J) \neq 0$.
Montrer que f est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de chacun de ses sous-espaces propres.

Démonstration.

- Comme $\mathrm{tr}(J) \neq 0$, alors $1 + \mathrm{tr}(J) \neq 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) = \{1, 1 + \mathrm{tr}(J)\}.}$$

- Notons $\alpha = 1 + \mathrm{tr}(J)$.

$$\begin{array}{rcll} \dim\big(E_1(f)\big) + \dim\big(E_\alpha(f)\big) & = & 3 + \dim\big(E_\alpha(f)\big) & \textit{(d'après la question 4.a))} \\ & \geqslant & 3 + 1 \; = \; 4 & \textit{(car } \dim\big(E_\alpha(f)\big) \geqslant 1 \textit{ puisque } \alpha \textit{ est une valeur propre de } f\textit{)} \end{array}$$

Or, comme $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$, alors :

$$\dim\big(E_1(f)\big) + \dim\big(E_\alpha(f)\big) \; \leqslant \; \dim\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big) \; = \; 4$$

- Finalement, l'endomorphisme f possède exactement 2 valeurs propres (1 et α) qui vérifient :

$$\dim\big(E_1(f)\big) + \dim\big(E_\alpha(f)\big) \; = \; 4 \; = \; \dim\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big)$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

□

(ii) On considère dans cette question le cas où $\mathrm{tr}(J) = 0$.
On suppose qu'il existe une valeur propre λ de f différente de 1 et on note M un vecteur propre associé. Montrer : $\mathrm{tr}(M) = 0$.
Aboutir a une contradiction.

Démonstration.

- Tout d'abord $f(M) \;=\; \lambda \cdot M \quad (*)$ *(car M est vecteur propre de M associé à la valeur propre λ)*

  donc $M + \mathrm{tr}(M) \cdot J \;=\; \lambda \cdot M$ *(par définition de f)*

  donc $\mathrm{tr}(M) \cdot J \;=\; (\lambda - 1) \cdot M$

  donc $\mathrm{tr}\big(\mathrm{tr}(M) \cdot J\big) \;=\; \mathrm{tr}\big((\lambda - 1) \cdot M\big)$ *(en appliquant* tr *de part et d'autre)*

  donc $\mathrm{tr}(M)\ \mathrm{tr}(J) \;=\; (\lambda - 1)\ \mathrm{tr}(M)$ *(par linéarité de* tr*)*

  donc $(\lambda - 1)\ \mathrm{tr}(M) \;=\; 0$ *(puisque $\mathrm{tr}(J) = 0$ par hypothèse)*

  donc $(\lambda - 1) = 0$ `OU` $\mathrm{tr}(M) = 0$

  donc $\mathrm{tr}(M) = 0$ *(puisque $\lambda - 1 \neq 0$ par hypothèse)*

  $\boxed{\text{Si } M \text{ est un vecteur propre associé à une valeur propre } \lambda \neq 1, \text{ alors } \mathrm{tr}(M) = 0.}$

- Dans ce cas, on obtient :

$$f(M) \;=\; M + \cancel{\mathrm{tr}(M)} \cdot M \;=\; M$$

  En combinant avec l'égalité $(*)$, on obtient : $M = \lambda \cdot M$, ou encore :

$$\big(\lambda - 1\big) \cdot M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

  ce qui démontre : $\lambda \neq 1$ `OU` $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.
  La première égalité est exclue par hypothèse.
  La seconde est exclue car M est un vecteur propre.
  Absurde !

  $\boxed{\text{Dans le cas où } \mathrm{tr}(J) = 0, \text{ aucun réel différent de 1 n'est valeur propre de } f.}$

Commentaire

Au cours de la question, on démontre $f(M) \;=\; M$.
Cela permet de conclure que M est vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.
En réalité, il manque l'hypotèse $M \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ pour aboutir à cette conclusion. Mais cette propriété est bien vérifiée car M est, par hypothèse, un vecteur propre (associé à la valeur propre λ). On démontre donc que M est un vecteur propre associé à deux valeurs propres distinctes, ce qui est impossible. La rédaction de cette fin de question explicite précisément pourquoi c'est le cas.

□

(iii) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(J)$ pour que f soit diagonalisable.

Démonstration.

- En question ***4.c)(i)***, on démontre :

$$\mathrm{tr}(J) \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable}$$

- Démontrons maintenant :

$$\text{tr}(J) \neq 0 \ \Leftarrow \ \text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable}$$

On procède par l'absurde.

On suppose f diagonalisable et $\text{tr}(J) = 0$.
Cette dernière hypothèse, permet de conclure, grâce à la question précédente, que f possède pour unique valeur propre 1. Or, d'après la question ***4.a)*** :

$$\dim\big(E_1(f)\big) = \dim\big(\text{Ker}(\text{tr})\big) = \ 3 \ \neq \ 4 \ = \dim\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right)$$

Ainsi, f n'est pas diagonalisable.
Absurde !

$$\boxed{\text{Finalement : L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \ \text{tr}(J) \neq 0.}$$

□

d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\text{tr}(J)$ pour que f soit bijectif.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} f \text{ bijectif} & \Leftrightarrow & f \text{ injectif} \\ & \Leftrightarrow & 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f \end{array}$$

(car f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie)

- Deux cas se présentent alors.
  - × Si $\text{tr}(J) \neq 0$, alors $\text{Sp}(f) = \{1, 1 + \text{tr}(J)\}$.

$$\boxed{\text{Si } \text{tr}(J) \neq 0 : f \text{ est bijectif } \Leftrightarrow \ 1 + \text{tr}(J) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ \text{tr}(J) \neq -1.}$$

  - × Si $\text{tr}(J) = 0$, alors 1 est l'unique valeur propre de f.
    Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de f et f est donc bijectif.

$$\boxed{\text{Si } \text{tr}(J) = 0 : f \text{ est bijectif.}}$$

$$\boxed{\text{On en conclut finalement, dans les deux cas : } f \text{ est bijectif } \Leftrightarrow \ \text{tr}(J) \neq -1.}$$

□

EXERCICE 3