EDHEC 2022

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1 - p$.
Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés 1, 2, ..., n, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.
Pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note R_k l'événement : « le joueur réussit le niveau k ».

1. Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur de p.

```
import random as rd
p = float(input('entrez la valeur de p dans ]0,1[ :'))
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
X = -----
while ----- and (rd.random() <= p) :
    X = -----
print('le niveau du joueur est :' + str(X))
```

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
import random as rd
p = float(input('entrez la valeur de p dans ]0,1[ :'))
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
X = 0
while (X < n) and (rd.random() <= p) :
    X = X + 1
print('le niveau du joueur est :' + str(X))
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  On commence par importer la librairie `random` sous l'abréviation `rd`.

```
import random as rd
```

  Il est ensuite demandé à l'utilisateur de rentrer les valeurs des variables `p` et `n`.

```
p = float(input('entrez la valeur de p dans ]0,1[ :'))
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
```

Enfin, on souhaite que la variable `X` contienne le niveau du joueur pour un jeu comportant `n` niveaux. Son niveau minimal étant 0 (dans le cas où le joueur échoue au niveau 1), on initialise la variable `X` à 0.

```
4   X = 0
```

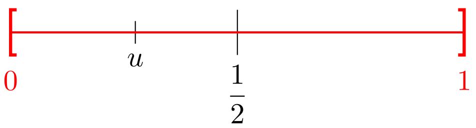
- **Structure itérative**

  × Les lignes 5 à 6 consistent à mettre à jour la variable `X` jusqu'à ce que le joueur échoue à un niveau ou qu'il ait réussi les `n` niveaux. Autrement dit, on doit mettre à jour la variable `X` tant que le joueur réussit un niveau et qu'il n'a pas réussi le niveau `n`. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while).

```
5   while (X < n) and (rd.random() <= p) :
```

  Pour simuler la réussite ou l'échec d'un niveau, on souhaite que l'instruction correspondante :
  - renvoie le booléen `True` avec probabilité p,
  - renvoie le booléen `False` avec probabilité $1-p$.

  C'est ce que permet l'instruction `(rd.random() <= p)`.
  Détaillons ce point. L'instruction `rd.random()` renvoie un réel u choisit aléatoirement dans $[0,1]$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que : $U \sim \mathcal{U}([0,1])$.



  Deux cas se présentent :
  - si $u \leqslant p$, alors l'instruction `(rd.random() <= p)` prend la valeur `True`.
    Ce cas se produit avec la probabilité :
    $$\mathbb{P}(\{0 \leqslant U \leqslant p\}) = \mathbb{P}(\{U \leqslant p\}) = p$$
    Ce qui est bien la probabilité de réussir un niveau.
  - si $u \geqslant \frac{1}{2}$, alors l'instruction `(rd.random() <= p)` prend la valeur `False`.
    Ce cas se produit avec la probabilité :
    $$1 - \mathbb{P}(\{0 \leqslant U \leqslant p\}) = 1-p$$
    Ce qui est bien la probabilité d'échouer un niveau.

  × La variable `X` est alors incrémentée de 1 à chaque itération pour signaler qu'un nouveau niveau a été réussi.

```
6         X = X + 1
```

- **Fin du programme**

  À la fin de la structure itérative, la variable `X` contient une simulation de la v.a.r. X_n. Il reste donc à afficher cette valeur.

```
7   print('le niveau du joueur est :' + str(X))
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

2. ***a)*** Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\subset$) Le jeu comporte n niveaux. Le joueur peut donc échouer dès le premier (il a alors le niveau 0) ou, au mieux, tous les réussir (il a alors le niveau n).
On en déduit : $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

($\supset$) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Trois cas se présentent :

× si $k = 0$, alors le 1-tirage suivant réalise l'événement $\{X_n = 0\}$:

$$\omega_0 \;=\; (\text{Échec})$$

On en déduit : $\omega_0 \in \{X_n = 0\}$, *i.e.* : $X_n(\omega_0) = 0$. D'où : $0 \in X_n(\Omega)$.

× si $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors le $(k+1)$-tirage suivant réalise l'événement $\{X_n = k\}$:

$$\omega_k \;=\; (\underbrace{\text{Réussite}, \ldots, \text{Réussite}}_{k \text{ fois}}, \text{Échec})$$

On en déduit : $\omega_k \in \{X_n = k\}$, *i.e.* : $X_n(\omega_k) = k$. D'où : $k \in X_n(\Omega)$.

× si $k = n$, alors le n-tirage suivant réalise l'événement $\{X_n = n\}$:

$$\omega_n \;=\; (\text{Réussite}, \ldots, \text{Réussite}, \text{Réussite})$$

On en déduit : $\omega_n \in \{X_n = n\}$, *i.e.* : $X_n(\omega_n) = n$. D'où : $n \in X_n(\Omega)$.

Finalement : $[\![0, n]\!] \subset X_n(\Omega)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

□

b) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big)$.

Démonstration.
L'événement $\{X_n = 0\}$ est réalisé si et seulement si le joueur perd dès le 1er niveau. Autrement dit, cet événement est réalisé si et seulement si $\overline{R_1}$ est réalisé. Ainsi :

$$\{X_n = 0\} \;=\; \overline{R_1}$$

D'où :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) \;=\; \mathbb{P}(\overline{R_1}) \;=\; 1 - \mathbb{P}(R_1) \;=\; 1 - p$$

En effet, la probabilité d'échec de chaque niveau, en particulier celui du niveau 1, est de $1 - p$ d'après l'énoncé.

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) = 1 - p}$$

□

c) Écrire l'événement $\{X_n = n\}$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cl} & \text{l'événement } \{X_n = n\} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{le joueur réussit les } n \text{ niveaux} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau } 1\end{array} \ \texttt{ET} \ \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau } 2\end{array} \ \texttt{ET} \ \cdots \ \texttt{ET} \ \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau } n\end{array} \\ \Leftrightarrow & R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n \quad \text{est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \{X_n = n\} = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n.}$$

- D'après la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) \\ = & \mathbb{P}\big(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n\big) \\ = & \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-2}}(R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}}(R_n) \\ = & p \times p \times \cdots \times p \times p \end{array}$$

Détaillons cette dernière égalité.

× D'après la question précédente : $\mathbb{P}(R_1) = p$.

× Si l'événement $R_1 \cap \cdots R_{n-1}$ est réalisé, c'est que le joueur a réussi les $n-1$ premiers niveaux. Dans ce cas, l'événement R_n est réalisé si et seulement si le joueur réussit le niveau n. On en déduit, d'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}}(R_n) \ = \ p$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) = p^n.}$$

□

d) Écrire, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, l'événement $\{X_n = k\}$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cl} & \text{l'événement } \{X_n = k\} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{le joueur réussit les } k \text{ premiers niveaux et échoue au } (k+1)^{\text{ème}} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau } 1\end{array} \ \texttt{ET} \ \cdots \ \texttt{ET} \ \begin{array}{c}\text{le joueur réussit}\\ \text{le niveau } k\end{array} \ \texttt{ET} \ \begin{array}{c}\text{le joueur échoue}\\ \text{le niveau } k+1\end{array} \\ \Leftrightarrow & R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \quad \text{est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \{X_n = k\} = R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}.}$$

- D'après la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \\ = & \mathbb{P}\big(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}\big) \\ = & \mathbb{P}(R_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k}(\overline{R_{k+1}}) \\ = & p \times \cdots \times p \times p \times (1-p) \end{array}$$

En effet, si l'événement $R_1 \cap \cdots R_k$ est réalisé, c'est que le joueur a réussi les k premiers niveaux.
Dans ce cas, l'événement $\overline{R_{k+1}}$ est réalisé si et seulement si le joueur échoue le niveau $k+1$.
On en déduit, d'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k}(\overline{R_{k+1}}) = 1 - p$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = p^k\,(1-p) = p^k\,q.}$$

- Enfin, dans le cas $k = 0$:
  × d'une part, d'après ***2.a)*** : $\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) = 1 - p = q$,
  × d'autre part : $p^0\,q = q$.

$$\boxed{\text{La formule obtenue est donc valable pour } k = 0.}$$

□

3. Vérifier par le calcul : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 1$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} p^k\,q + p^n \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.d)}} \textit{ et } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)} \\ & = & q \sum\limits_{k=0}^{n-1} p^k + p^n \\ & = & \cancel{q}\,\dfrac{1-p^n}{\cancel{1-p}} + p^n \\ & = & 1 - \cancel{p^n} + \cancel{p^n} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 1.}$$

□

4. a) Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et de p.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_n \text{ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.}}$$

On calcule alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \quad + \quad n\,\mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,p^k\,q \qquad + \qquad n\,p^n \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.d)}} \textit{ et } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X_n) = q \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,p^k + n\,p^n.}$$

□

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(X_n) \;=\; q \sum_{k=0}^{n-1} k\,p^k + n\,p^n \;=\; qp \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} + n\,p^n$$

- Or :
  - × d'une part, la série $\sum k\,p^{k-1}$ est une série géométrique dérivée de raison $p \in \,]-1,1[$. Elle est donc convergente.
  - × d'autre part, comme $p \in \,]0,1[$, par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,p^n = 0$.

  On en déduit que la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)$ admet une limite. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) \;=\; qp \sum_{k=1}^{+\infty} k\,p^{k-1} + 0 \;=\; \cancel{q}\,p\,\frac{1}{(1-p)^{\cancel{2}}} \;=\; \frac{p}{1-p}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) \;=\; \frac{p}{q}.}$$

□

5. a) Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$, on a : $\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = p^k\,q$.

Démonstration.
On a démontré en question ***2.d)*** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \;=\; p^k\,q$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad (k < n) \;\Rightarrow\; \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = p^k\,q\Big)$$

Ou encore :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (k+1 \geqslant n) \;\Rightarrow\; \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = p^k\,q\Big)$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant k+1, \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = p^k\,q.}$$

Commentaire

Le coeur de cette question est la quantification. En effet, cette question ***5.a)*** est exactement la même que la question ***2.d)***. L'énoncé veut ici pointer du doigt une nuance dans la quantification de n et k en prévision de la question précédente. Plus précisément :

- en question ***2.d)***, on cherche à obtenir la loi de X_n. On commence donc par fixer la variable n (qui correspond au nombre de niveaux du jeu). Puis, on fixe la variable k pour obtenir $\mathbb{P}(\{X_n = k\})$.
- en question ***5.b)***, on cherche à établir une convergence en loi. On commencera donc par fixer la variable k dans $\mathbb{N}$ (car on a dans l'idée que la v.a.r. limite X vérifie : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$). Puis, on fixe la variable n pour déterminer la limite de la suite $\Big(\mathbb{P}(\{X_n = k\})\Big)$.

La question ***5.a)*** consiste à formuler le résultat obtenu en ***2.d)*** en privilégiant la quantification en k d'abord, plutôt que celle en n, dans l'objectif de démonstration d'une convergence en loi en question suivante.

□

b) En déduire que la suite $(X_n)_{n \in N^*}$ converge en loi vers une certaine variable aléatoire X.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
  Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $n \geqslant k+1$.
  Soit $n \geqslant n_0$. Alors : $n \geqslant k+1$. Ainsi, d'après la question précédente :
$$\mathbb{P}(\{X_n = k\}) \ = \ p^k\, q \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} p^k\, q$$
- On pose alors une v.a.r. X telle que :
  - × $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$
  - × $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X = k\}) = p^k\, q$

  Vérifions que la v.a.r. X définie bien une loi de probabilité.
  - × Tout d'abord : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p^k\, q \geqslant 0$.
  - × De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{N} p^k\, q \ = \ q \sum_{k=0}^{N} p^k$$
    Or, la série $\sum p^k$ est une série géométrique de raison $p \in\,]-1,1[$. Elle est donc convergente. De plus :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} p^k\, q \ = \ \cancel{q}\, \frac{1}{\cancel{1-p}} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ définie ci-dessus définit bien une loi de probabilité.}}$$

- On en déduit :
  - × $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$
  - × $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = p^k\, q = \mathbb{P}(\{X = k\})$

$$\boxed{\text{D'où : } X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X.}$$

□

c) On pose : $Y = X + 1$.
Reconnaître la loi de Y puis en déduire l'espérance de X et la comparer à $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors : $Y(\Omega) = (X+1)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X + 1 = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X = k-1\}\big) = p^{k-1}\, q \qquad \textit{(car } k-1 \in \mathbb{N}\textit{)}$$

D'où : $\mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) = (1-q)^{k-1}\, q$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \sim \mathcal{G}(q).}$$

- On remarque : $X = Y - 1$. Ainsi, la v.a.r. X admet une espérance en tant que transformée affine de la v.a.r. Y qui en admet une. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y-1) \\ &= \mathbb{E}(Y) - 1 && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{q} - 1 \\ &= \frac{1-q}{q} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textit{\textbf{4.b)}}\text{, on conclut : } \mathbb{E}(X) = \frac{p}{q} = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n).}$$

Commentaire

On a démontré :
1) en question ***5.b)*** : (X_n) converge en loi vers X,
2) dans cette question : $\mathbb{E}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$.
Cela pourrait laisser penser que 1) implique 2). Il n'en est rien :

$$(X_n) \text{ converge en loi vers } X \quad \not\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$$

De manière générale, on retiendra que la convergence en loi **n'implique pas** la convergence des moments (et vice versa évidemment).

□

Exercice 3

Problème