EDHEC 2022

Exercice 1

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1 - p$.
Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés 1, 2, ..., n, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.
Pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note R_k l'événement : « le joueur réussit le niveau k ».

1. Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur de p.

```
import random as rd
p = float(input(‘entrez la valeur de p dans ]0,1[ :‘))
n = int(input(‘entrez la valeur de n :‘))
X = -----
while ----- and (rd.random() <= p) :
    X = -----
print(‘le niveau du joueur est :‘ + str(X))
```

2. ***a)*** Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big)$.

c) Écrire l'événement $\{X_n = n\}$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big)$.

d) Écrire, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, l'événement $\{X_n = k\}$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

3. Vérifier par le calcul : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 1$.

4. ***a)*** Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et de p.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

5. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$, on a : $\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = p^k\, q$.

b) En déduire que la suite $(X_n)_{n \in N^*}$ converge en loi vers une certaine variable aléatoire X.

c) On pose : $Y = X + 1$.
Reconnaître la loi de Y puis en déduire l'espérance de X et la comparer à $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 3

Problème