

ECRICOME 2022

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F .

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

L'ensemble F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

• La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$:

× est libre car constituée uniquement de deux matrices non colinéaires.

× engendrent F d'après le point précédent.

On en déduit que \mathcal{F} est une base de F .

Ainsi : $\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2$.

Commentaire

- Il est relativement fréquent de trouver dans les sujets de concours des ensembles de matrices écrites à l'aide de paramètres (c'était notamment le cas des sujets EDHEC 2021, EML 2021 et ECRICOME 2020). Il faut donc être à l'aise sur la compréhension et la manipulation de tels ensembles.

Commentaire

- Dans l'énoncé, on demande si F est un espace vectoriel. On écrit alors cet ensemble sous la forme d'un espace vectoriel engendré par la famille \mathcal{F} . L'avantage d'une telle rédaction est qu'elle fournit une famille génératrice de F . Cette famille est donc un candidat pour être une base de F (elle l'est car elle est libre). Pour des espaces paramétrés de matrices, il faut privilégier cette démonstration à celle qui consiste à vérifier les propriétés axiomatiques de la notion d'espace vectoriel. Cependant cette dernière manière de procéder doit aussi être connue car, dans certains sujets, l'ensemble étudié ne se décrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Rappelons ci-dessous cette rédaction.

(i) $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

(ii) $F \neq \emptyset$ car $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in F^2$.

× Comme $M \in F$, il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}$.

× Comme $N \in F$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.

Démontrons que $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in F$. On a :

$$\lambda \cdot M + \mu \cdot N = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 & \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 & \lambda a_1 + \mu a_2 \end{pmatrix} \in F$$

On reconnaît en effet l'écriture d'une matrice de F avec : $a = \lambda a_1 + \mu a_2$ et $b = \lambda b_1 + \mu b_2$.

L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

□

2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G .

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que I_3 est un élément de G . En effet : $I_3^2 = I_3$.
- Or : $(-I_3)^2 = (-1)^2 \cdot I_3^2 = I_3 \neq -I_3$.
On en conclut que G n'est pas stable par multiplication externe par un réel.

Ainsi, G n'est pas un espace vectoriel.

Commentaire

- Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :

× « L'ensemble G est-il un sous-espace vectoriel de E ? »

× « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes? »

× « La v.a.r. X admet-elle une variance? »

× « La matrice A est-elle diagonalisable? »

× « La suite (u_n) est-elle majorée? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

- La formulation de l'énoncé est un peu trompeuse. En effet, l'ajout de :

« Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G »

laisse penser que l'ensemble G est un espace vectoriel. D'ailleurs, cette même formulation est utilisée dans la question précédente alors que F est bien un espace vectoriel. Il faut donc garder suffisamment de recul quant à la remarque du point précédent. La manière dont l'énoncé est formulé donne souvent une indication de la réponse attendue. Il arrive cependant qu'un concepteur opte pour une formulation piègeuse comme c'était le cas ici.

- Il faut s'habituer à avoir une intuition sur le caractère vectoriel ou non d'un ensemble. Ici, on considère l'ensemble des matrices dont l'élévation au carré donne la matrice initiale. Cette définition met en jeu un produit de matrices (à ne pas confondre avec une multiplication externe). Dans ce cas, il est fréquent que l'ensemble considéré ne soit pas un espace vectoriel.

Si on n'a pas cette intuition, on peut tenter, au brouillon de démontrer que l'ensemble est un espace vectoriel en considérant la démonstration précédente. On ne parvient évidemment pas à aboutir ce qui doit nous conduire à considérer que G n'est pas un espace vectoriel.

- Pour démontrer qu'un ensemble G n'est pas un sous-espace vectoriel de E , on pourra, dans cet ordre :

1) vérifier : $0_E \notin G$ (si $0_E \in G$, on essaie de vérifier le point suivant).

2) exhiber un vecteur $u \in G$ tel que $(-1) \cdot u \notin G$ (si on ne parvient pas à trouver un tel vecteur u , on essaie de démontrer le point suivant).

(on teste ici si \cdot est une loi de composition externe ; si cette propriété est vérifiée pour -1 , on peut aussi la tester pour 2 ou 3 etc)

3) exhiber deux vecteurs $(u, v) \in G^2$ tels que $u + v \notin G$.

(on teste ici la stabilité de G par somme)

3. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $A \in F \cap G$.

Démonstration.

• Tout d'abord : $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $A \in F$.

• D'autre part :

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \times \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Ainsi : $A \in G$

On a bien : $A \in F \cap G$. □

b) En déduire un polynôme annulateur de A .

Démonstration.

D'après la question précédente : $A^2 = A$ ou encore : $A^2 - A = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Ainsi, le polynôme $Q(X) = X^2 - X = X(X - 1)$ est un polynôme annulateur de la matrice A .

Commentaire

- Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède TOUJOURS un polynôme annulateur non nul Q .
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n .
- Si Q est un polynôme annulateur de M alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme αQ est toujours un polynôme annulateur de M puisque :

$$(\alpha Q)(M) = \alpha Q(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Cela suffit à démontrer que M possède une infinité de polynômes annulateurs.

On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X - 5)Q(X)$ est un polynôme annulateur de M puisqu'on a alors :

$$R(M) = (M - 5I_3)Q(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Il faut donc parler d'UN polynôme annulateur d'une matrice. □

- c) Déterminer les valeurs propres de A , et donner une base de chaque sous-espace propre associé.

Démonstration.

- D'après la question précédente, $Q(X) = X(X - 1)$ est un polynôme annulateur de A .
Ainsi : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, 1\}$.

Ainsi : $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$ et les seules valeurs propres possibles de A sont 0 et 1.

Commentaire

Les racines d'un polynôme annulateur d'une matrice M ne sont pas forcément toutes valeurs propres de M . En effet, si c'était le cas, en reprenant les notations de la remarque précédente, on pourrait démontrer que M admet une infinité de valeurs propres (alors qu'elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X - 5)Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Vérifions maintenant si 1 est bien valeur propre de A .

$$\begin{aligned} A - I_3 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes égales ($C_1 = C_2$).

On en déduit que 1 est bien valeur propre de A .

- Déterminons $E_1(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_1(A) &\iff (A - I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{(en multipliant par } 3 \neq 0) \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y - z \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_1(A)$ suivante :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = U\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -y - z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

• La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_1(A)$,

× est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, \mathcal{F}_1 est une base de $E_1(A)$.

On en déduit : $\dim(E_1(A)) = \text{Card}(\mathcal{F}_1) = 2$.

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ (ou des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ) par lecture de la matrice $A - \lambda I_3$. Ici on a $\lambda = 1$. On cherche donc les

vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= -\frac{x}{3} \cdot C_1 - \frac{y}{3} \cdot C_2 - \frac{z}{3} \cdot C_3 \\ &= -\frac{x}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{y}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{z}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur nul à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut notamment choisir :

× $z = 0$ et $x = -y$.

En particulier, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

× $y = 0$ et $x = -z$.

En particulier, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

On en déduit : $E_1(A) \supset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. On conclut alors à l'égalité de ces deux espaces

vectoriels en remarquant, à l'aide du théorème du rang, qu'ils ont même dimension 2.

Plus précisément, on a : $\dim(E_1(A)) + \text{rg}(A - I_3) = 3$.

||

1

- Vérifions maintenant si 0 est bien valeur propre de A .

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Cette matrice est non inversible car sa troisième ligne est nulle.

On en déduit que 0 est bien valeur propre de A .

- Déterminons $E_0(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_0(A) &\iff AU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{en multipliant par } 3 \neq 0) \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y = z \\ 3y = 3z \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}{\iff} \begin{cases} 2x - y = z \\ y = z \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2x = 2z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_0(A)$ suivante :

$$\begin{aligned}
 E_0(A) &= \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \text{ et } y = z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_0(A)$,

× est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car constituée uniquement d'une matrice non nulle.

Ainsi, \mathcal{F}_0 est une base de $E_0(A)$.

On en déduit : $\dim(E_0(A)) = \text{Card}(\mathcal{F}_0) = 1$.

□

d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, le réel 0 est valeur propre de A .

On en conclut que la matrice A n'est pas inversible.

- D'après la question précédente : $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$. De plus :

$$\dim(E_1(A)) + \dim(E_0(A)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

Ainsi, la matrice A est diagonalisable.

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que la matrice A est symétrique réelle et donc diagonalisable. Au vu de la position de cette question dans l'énoncé, le concepteur attendait certainement la caractérisation à l'aide des dimensions des sous-espaces propres. L'utilisation du caractère symétrique réel est souvent associée à la formulation suivante :

« Démontrer sans calcul que la matrice A est diagonalisable »

□

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. a) Démontrer :

$$M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Tout d'abord : $M^2 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 & 2ab + b^2 & 2ab + b^2 \\ 2ab + b^2 & a^2 + 2b^2 & 2ab + b^2 \\ 2ab + b^2 & 2ab + b^2 & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix}$.

- Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in G &\Leftrightarrow M^2 = M \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 & 2ab + b^2 & 2ab + b^2 \\ 2ab + b^2 & a^2 + 2b^2 & 2ab + b^2 \\ 2ab + b^2 & 2ab + b^2 & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ 2ab + b^2 = b \\ 2ab + b^2 = b \\ 2ab + b^2 = b \\ a^2 + 2b^2 = a \\ 2ab + b^2 = b \\ 2ab + b^2 = b \\ 2ab + b^2 = b \\ a^2 + 2b^2 = a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ 2ab + b^2 - b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(2a + b - 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

□

b) Montrer alors : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.

Démonstration.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord :

$$M \in F \cap G \Leftrightarrow M \in F \quad \text{ET} \quad M \in G$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad \text{ET} \quad M^2 = M$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad \text{ET} \quad \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(2a + b - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad \text{ET} \quad (S) \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b = 0 \quad \text{OU} \quad (2a + b - 1) = 0 \end{cases}$$

• Et :

$$(S) \Leftrightarrow (S_1) \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad (S_2) \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b = 1 - 2a \end{cases}$$

• Or :

$$\begin{aligned} (S_1) &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ OU } a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (S_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b = 1 - 2a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2(1 - 2a)^2 = a \\ b = 1 - 2a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2(1 - 4a + 4a^2) = a \\ b = 1 - 2a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 9a + 2 = 0 \\ b = 1 - 2a \end{cases} \end{aligned}$$

Notons $P(X) = 9X^2 - 9X + 2$. Ce polynôme admet pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-9)^2 - 4 \times (-9) \times 2 \\ &= 81 - 8 \times 9 \\ &= 81 - 72 = 9 \end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$, on en déduit que P admet deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-9) + \sqrt{9}}{2 \times 9} & x_2 &= \frac{-(-9) - \sqrt{9}}{2 \times 9} \\ &= \frac{9 + 3}{2 \times 9} & &= \frac{9 - 3}{2 \times 9} \\ &= \frac{12}{18} = \frac{2}{3} & &= \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} (S_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \text{ OU } a = \frac{1}{3} \\ b = 1 - 2a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 1 - 2a \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 - 2a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

- Finalement, les seules matrices $M \in F \cap G$ sont celles qui s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ et telles que :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'ensemble $F \cap G$ contient donc exactement 4 matrices :

$$\begin{aligned} \times M_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ \times M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \\ \times M_3 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A \\ \times M_4 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = I_3 - A \quad (\text{d'après le calcul réalisé en 3.c}) \end{aligned}$$

On a bien : $F \cap G = \{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, I_3, A, I_3 - A\}$.

□

5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que (A, B) est une base de F .

Démonstration.

- D'après la question précédente, A et B sont deux matrices de $F \cap G$ et donc, a fortiori, des éléments de F .
- La famille (A, B) est :
 - × une famille libre d'éléments de F car elle est constituée uniquement de deux matrices non colinéaires.
 - × de cardinal $\text{Card}((A, B)) = 2 = \dim(F)$ (d'après la question 1).

On en déduit que la famille (A, B) est une base de F .

□

6. a) On note $\alpha = \frac{4a-b}{3}$ et $\beta = \frac{a+2b}{3}$. Vérifier :

$$M = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$$

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot A + \beta \cdot B = M \\ \Leftrightarrow & 3\alpha \cdot A + 3\beta \cdot B = 3 \cdot M \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3b \\ 3b & 3a & 3b \\ 3b & 3b & 3a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & -\alpha + \beta & -\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta & 2\alpha + \beta & -\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta & -\alpha + \beta & 2\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3b \\ 3b & 3a & 3b \\ 3b & 3b & 3a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3a \\ -\alpha + \beta = 3b \end{cases} \quad (\text{en identifiant un à un} \\ & \text{tous les coefficients}) \\ \stackrel{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} & \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3a \\ 3\beta = 3a + 6b \end{cases} \\ \stackrel{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\Leftrightarrow} & \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3a \\ \beta = a + 2b \end{cases} \\ \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} & \begin{cases} 2\alpha = 2a - 2b \\ \beta = a + 2b \end{cases} \end{aligned}$$

On en conclut : $M = \alpha \cdot A + \beta \cdot B \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (a - b, a + 2b)$.

Commentaire

- La résolution démontre que l'énoncé est faux. En effet, les valeurs fournies pour α et β ne permettent pas de conclure à l'égalité souhaitée.
- Il est globalement rare que les sujets contiennent des erreurs. Malheureusement, malgré la relecture soignée des concepteurs, il peut arriver que certaines coquilles subsistent. Un candidat repérant une coquille peut le signaler sur sa copie. Attention cependant au faux positif : signaler qu'on a repéré une coquille alors qu'il n'y en a pas fait plutôt mauvais effet. Il est à noter que, quand la coquille est avérée, la question sort généralement du barème. Il est à noter que cette coquille n'avait pas d'incidence pour la suite car, dans les questions qui suivent, on conserve les notations α et β (sans les remplacer par leurs valeurs respectives).
- On a rédigé ici de manière à mettre en avant l'erreur du sujet. Il est explicitement demandé de « Vérifier » une égalité. On ne demande donc pas de raisonner par équivalence, ce qui permet de trouver tous les couples (α, β) qui conviennent, mais seulement de vérifier qu'un couple fourni par l'énoncé donne le résultat souhaité.
- On a démontré en question précédente que (A, B) est une base de F . Le but de cette question est simplement de trouver les coordonnées de la matrice M (élément de F) dans cette base. \square

b) Calculer AB et BA .

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$AB = A(I_3 - A) = A - A^2 = A - A = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Rappelons que : $A^2 = A$ car, on a démontré en question 4.b) que A est un élément de G .

- De même :

$$BA = (I_3 - A)A = A - A^2 = A - A = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$AB = BA = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Commentaire

- Rappelons que le produit de matrices n'est pas commutatif. Cela signifie qu'il existe des matrices A et B telles que : $AB \neq BA$. Par exemple les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, vérifient :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Les matrices A et B de l'énoncé vérifient l'égalité : $AB = BA$. Ce n'est pas étonnant car une matrice A commute toujours avec les puissances de ces matrices :

$$\forall r \in \mathbb{N}, A \times A^r = A^{r+1} = A^r \times A$$

En particulier, A commute avec $A^0 = I_3$ et avec $A^1 = A$. La distributivité de la loi \times par rapport à la loi $+$ permet alors de conclure qu'une matrice A commute avec toute combinaison linéaire de matrices puissance de A .

Ainsi, A commute notamment avec $B = 1 \cdot I_3 + (-1) \cdot A$.

- On s'est servi ici de la forme particulière de la matrice B . Toutefois, on pouvait aussi faire les calculs AB et BA directement à partir des valeurs numériques de A et B . □

- c) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$M^n = \alpha^n \cdot A + \beta^n \cdot B$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : M^n = \alpha^n \cdot A + \beta^n \cdot B$.

► **Initialisation :**

– D'une part : $M^0 = I_3$.

– D'autre part : $\alpha^0 \cdot A + \beta^0 \cdot B = A + B = \cancel{A} + (I_3 - \cancel{A}) = I_3$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $M^{n+1} = \alpha^{n+1} \cdot A + \beta^{n+1} \cdot B$).

On a :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= M \times (\alpha^n \cdot A + \beta^n \cdot B) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (\alpha \cdot A + \beta \cdot B) \times (\alpha^n \cdot A + \beta^n \cdot B) \\ &= \alpha^{n+1} \cdot A^2 + \alpha \beta^n \cdot AB + \beta \alpha^n \cdot BA + \beta^{n+1} \cdot B^2 \\ &= \alpha^{n+1} \cdot A^2 + \beta^{n+1} \cdot B^2 && \text{(car } AB = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = BA \text{ d'après la question précédente)} \\ &= \alpha^{n+1} \cdot A + \beta^{n+1} \cdot B && \text{(car } A^2 = A \text{ et } B^2 = B \text{ puisque } A \text{ et } B \text{ sont deux éléments de } G) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Commentaire

- Il était aussi possible d'utiliser la formule du binôme de Newton pour résoudre cette question. Détaillons ci-dessous la méthode.
- Les matrices A et B commutent ($AB = BA$). On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 M^n &= (\alpha \cdot A + \beta \cdot B)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha \cdot A)^{n-k} (\beta \cdot B)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \cdot A^{n-k} B^k \\
 &= \alpha^{n-0} \beta^0 \cdot A^{n-0} B^0 \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \cdot A^{n-k} B^k \quad (\text{cette somme est la matrice nulle si } n = 0 \text{ ou } n = 1) \\
 &\quad + \alpha^{n-n} \beta^n \cdot A^{n-n} B^n \\
 &= \alpha^n \cdot A^n \quad (\text{car } \beta^0 = 1 \text{ et } B^0 = I_3) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \cdot A^{n-k} B^k \\
 &\quad + \beta^n \cdot B^n \quad (\text{car } \alpha^0 = 1 \text{ et } A^0 = I_3) \\
 &= \alpha^n \cdot A \quad (\text{par une récurrence immédiate : } \forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = A) \\
 &\quad + AB \times \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \cdot A^{n-1-k} B^{k-1} \quad (\text{avec } n-1-k \geq 0 \text{ car } k \leq n-1 \\
 &\quad \text{et } k-1 \geq 0 \text{ car } k \geq 1) \\
 &\quad + \beta^n \cdot B \quad (\text{par une récurrence immédiate : } \forall k \in \mathbb{N}^*, B^k = B) \\
 &= \alpha^n \cdot A + \beta^n \cdot B \quad (\text{car } AB = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})})
 \end{aligned}$$

7. a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

Démonstration.

- Traitons tout d'abord le cas $a = 0$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(M) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix} \right) \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} b & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} b & b & 0 \\ 0 & -b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} b & b & 0 \\ 0 & -b & b \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).

Elle (et donc M) est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Autrement dit :

$$M \text{ inversible} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ -b \neq 0 \\ 2b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ \alpha \neq 0 \quad \text{ET} \quad \beta \neq 0$$

En effet, comme $a = 0$:

$$\alpha = a - b = -b \quad \text{et} \quad \beta = a + 2b = 2b$$

Dans le cas où $a = 0$, on a bien : M inversible $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ET $\beta \neq 0$.

- Supposons $a \neq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow aL_2 - bL_1 \\ L_3 \leftarrow aL_3 - bL_1}}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a^2 - b^2 & ab - b^2 \\ 0 & ab - b^2 & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{ces deux opérations sont} \\ &\quad \text{valides car } a \neq 0) \\ &\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a^2 - ab & ab - b^2 \\ 0 & ab - a^2 & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a^2 - ab & ab - b^2 \\ 0 & 0 & a^2 + ab - 2b^2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).

Elle (et donc M) est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Autrement dit :

$$\begin{aligned} M \text{ inversible} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 - ab \neq 0 \\ a^2 + ab - 2b^2 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a(a - b) \neq 0 \\ (a - b)(a + 2b) \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 0 \quad \text{ET} \quad a - b \neq 0 \\ a - b \neq 0 \quad \text{ET} \quad a + 2b \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \{ a - b \neq 0 \quad \text{ET} \quad a + 2b \neq 0 \quad (\text{car on a supposé } a \neq 0) \end{aligned}$$

Dans le cas où $a \neq 0$, on a bien : M inversible $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ET $\beta \neq 0$.

Finalement, on a toujours : M inversible $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ET $\beta \neq 0$. □

b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$M^{-n} = \alpha^{-n} \cdot A + \beta^{-n} \cdot B$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors M est inversible d'après la question précédente. Il en est de même de M^n car un produit de matrices inversibles est inversible. On peut donc étudier : $(M^n)^{-1}$ (que l'on notera M^{-n} par la suite).
- Plus précisément, il s'agit de démontrer que l'inverse de M^n est : $\alpha^{-n} \cdot A + \beta^{-n} \cdot B$. Pour ce faire, on démontre que le produit de ces deux matrices est la matrice identité.

$$\begin{aligned} & M^n \times (\alpha^{-n} \cdot A + \beta^{-n} \cdot B) \\ = & (\alpha^n \cdot A + \beta^n \cdot B) \times (\alpha^{-n} \cdot A + \beta^{-n} \cdot B) && \text{(d'après la question 6.c)} \\ = & \alpha^n \alpha^{-n} \cdot A^2 + \alpha^n \beta^{-n} \cdot \cancel{AB} + \beta^n \alpha^{-n} \cdot \cancel{BA} + \beta^n \beta^{-n} \cdot B^2 \\ = & \frac{\alpha^n}{\alpha^n} \cdot A^2 + \frac{\beta^n}{\beta^n} \cdot B^2 \\ = & A + B && \text{(car } A \in G \text{ et } B \in G) \\ = & \cancel{A} + (I_3 - \cancel{A}) && \text{(par définition de } B) \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M^n \times (\alpha^{-n} \cdot A + \beta^{-n} \cdot B) = I_3$.

Ainsi, M^n est inversible d'inverse : $\alpha^{-n} \cdot A + \beta^{-n} \cdot B$.

Commentaire

- La notation M^{-n} n'est pas si habituelle et elle n'est pas mentionnée explicitement dans le programme ECE. De ce fait, la formulation de cette question semble sèche. Il aurait été préférable d'énoncer :

« Démontrer que M^n est inversible, d'inverse $M^{-n} = \dots$ »

- Dans les énoncés de ces dernières années, cette difficulté est contournée car cette question n'apparaît pas en tant que telle. On a plutôt la question :

« La question 6.c) est-elle vérifiée pour $n = -1$? »

- On peut envisager de faire une récurrence. L'étape d'initialisation revient à démontrer $I_3 = I_3$. L'étape d'hérédité demande de savoir :

$$M^{-(n+1)} = M^{-n-1} = M^{-n} \times M^{-1}$$

(il faudra savoir déterminer M^{-1} pour finir cette étape)

C'est bien le cas mais, comme dit plus haut, la notation M^{-k} n'étant pas explicitement introduite dans le programme, les manipulations autour de cette notation ne sont pas habituelles. □

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = TX_n + Y$$

8. Calculer la matrice $I_3 - T$ et exprimer cette matrice en fonction de A et B .

Démonstration.

Tout d'abord :

$$I_3 - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

On reconnaît une matrice de la même forme que M avec $a = -2$ et $b = -1$.

Ainsi, $I_3 - T = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= a - b & \text{et} & & \beta &= a + 2b \\ &= -2 - (-1) & & & &= -2 + 2(-1) \\ &= -1 & & & &= -4 \end{aligned}$$

Ainsi : $I_3 - T = (-1) \cdot A + (-4) \cdot B$.

□

9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(I_3 - T)^{-1}$.

Démonstration.

• D'après la question précédente :

$$I_3 - T = (-1) \cdot A + (-4) \cdot B$$

On retrouve la forme de la matrice M avec $\alpha = -1$ et $\beta = -4$.

• D'après la question 7.b), comme $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, la matrice $I_3 - T$ est inversible, d'inverse :

$$(I_3 - T)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A + \beta^{-1} \cdot B = \frac{1}{\alpha} \cdot A + \frac{1}{\beta} \cdot B = \frac{1}{-1} \cdot A + \frac{1}{-4} \cdot B = -A - \frac{1}{4} \cdot B$$

$(I_3 - T)^{-1} = -A - \frac{1}{4} \cdot B$

• On reconnaît une matrice de la forme M avec (S) $\begin{cases} (\alpha =) & a - b = -1 \\ (\beta =) & a + 2b = -\frac{1}{4} \end{cases}$. Or :

$$(S) \begin{matrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ \iff \\ \xrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2} \end{matrix} \begin{cases} a - b = -1 \\ 3b = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} 3a & = -\frac{9}{4} \\ 3b & = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a & = -\frac{3}{4} \\ b & = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Finalement : $(I_3 - T)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Commentaire

- Dans les sujets qui étudient des espaces de matrices paramétrées, le concepteur introduit généralement la notation :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Avec cette notation, F s'écrit sous la forme : $F = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- Cette notation est pratique car il est plus simple grâce à elle de conclure qu'une matrice est un élément de F . Par exemple, pour démontrer : $I_3 \in F$, il suffit de remarquer : $I_3 = M(1, 0)$.
- En question 8., on aurait pu signaler : $I_3 - T = M(-2, -1)$, ce qui est plus rigoureux que de dire qu'on reconnaît une matrice « de la même forme que M avec $a = -2$ et $b = -1$ ». □

10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L , que l'on déterminera, telle que :

$$L = TL + Y$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} L = TL + Y &\Leftrightarrow L - TL = Y \\ &\Leftrightarrow (I_3 - T)L = Y \\ &\Leftrightarrow \cancel{(I_3 - T)^{-1}(I_3 - T)} L = (I_3 - T)^{-1} Y \quad (\text{car } I_3 - T \text{ est inversible} \\ &\quad \text{d'après la question précédente}) \end{aligned}$$

On en conclut que la seule matrice vérifiant $L = TL + Y$ est la matrice $L = (I_3 - T)^{-1} Y$.

- De plus :

$$\begin{aligned} (I_3 - T)^{-1} Y &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Commentaire

On vient de démontrer :

$$(I_3 - T)^{-1} Y = 1 \cdot Y$$

Comme $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, on peut en conclure que 1 est valeur propre de la matrice $(I_3 - T)^{-1}$ et que Y est un vecteur propre associé à cette valeur propre. □

11. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n - L = T^n(X_0 - L)$$

Démonstration.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= T X_n + Y \\ \text{donc } X_{n+1} &= T X_n + (L - T L) \quad (\text{car } L = T L + Y \text{ par définition}) \\ \text{donc } X_{n+1} - L &= T X_n - T L \\ \text{donc } X_{n+1} - L &= T (X_n - L) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} - L = T (X_n - L)$.

• Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : X_n - L = T^n (X_0 - L)$.

► **Initialisation :**

- D'une part : $X_0 - L = X_0 - L$.
- D'autre part : $T^0 (X_0 - L) = I_3 (X_0 - L) = X_0 - L$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $X_{n+1} - L = T^{n+1} (X_0 - L)$).

On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} - L &= T (X_n - L) \quad (\text{d'après le début de question}) \\ &= T T^n (X_0 - L) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= T^{n+1} (X_0 - L) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

□

12. Pour tout entier naturel n , exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n .

Démonstration.

• Remarquons tout d'abord que T a la même forme que la matrice M avec $a = 3$ et $b = 1$.
On en déduit, par la question 6.a) :

$$T = (3 - 1) \cdot A + (3 + 2 \times 1) \cdot B = 2 \cdot A + 5 \cdot B$$

• D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} X_n &= T^n (X_0 - L) + L \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= (2 \cdot A + 5 \cdot B)^n (X_0 - L) + L \\ &= (2^n \cdot A + 5^n \cdot B) (X_0 - L) + L \\ &= 2^n \cdot A (X_0 - L) + 5^n \cdot B (X_0 - L) + L \quad (\text{d'après la question 6.c}) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = 2^n \cdot A (X_0 - L) + 5^n \cdot B (X_0 - L) + L$.

□

Exercice 2

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Démonstration.

• Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

× Tout d'abord : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$. De plus : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = +\infty$$

× Par composition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(u) = +\infty$$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$.

• Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

× Tout d'abord : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$. De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = +\infty$$

× Par composition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(u) = +\infty$$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

□

2. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Démonstration.

- La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* .
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0 \quad (\text{car } x > 0)$$

La fonction h est donc strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

□

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que : $h(\alpha) = 0$. Justifier : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Démonstration.

- La fonction h est :
 - × continue sur \mathbb{R}_+^* (car dérivable sur \mathbb{R}_+^*),
 - × strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , d'après la question précédente.
 Ainsi h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h(]0, +\infty[)$.

$$h(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[=] - \infty, +\infty[$$

Or $0 \in] - \infty, +\infty[$.

L'équation $h(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

- Remarquons :
 - × $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \times \frac{1}{2} - 1 = -\ln(2) + 1 - 1 = -\ln(2) < 0$,
 - × $h(\alpha) = 0$, par définition de α ,
 - × $h(1) = \ln(1) + 2 \times 1 - 1 = 1 > 0$.

Ainsi :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1)$$

Or, d'après le théorème de la bijection, $h^{-1} :] - \infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $] - \infty, +\infty[$. En appliquant h^{-1} à l'encadrement précédent, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccc} h^{-1}\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right) & < & h^{-1}(h(\alpha)) & < & h^{-1}(h(1)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \frac{1}{2} & & \alpha & & 1 \end{array}$$

On a bien : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

□

c) Démontrer : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$.

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ de :
 - × $g_1 : x \mapsto \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)$ qui est :
 - dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* ,
 - telle que : $g_1(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$.
 - × $g_2 : x \mapsto e^x$ qui est dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= g_1'(x) \times g_2'(g_1(x)) \\
 &= \left(\frac{1}{x^2} \times \ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x} \right) \times \frac{1}{x} \right) \times \exp \left(\left(2 - \frac{1}{x} \right) \ln(x) \right) \\
 &= \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) g(x) \\
 &= \frac{\ln(x) + 2x - 1}{x^2} g(x) \\
 &= \frac{h(x)}{x^2} g(x)
 \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$$

□

- d) En déduire les variations de la fonction g sur \mathbb{R}_+^* .

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Étudions le signe de $g'(x)$.

× Tout d'abord : $\frac{1}{x^2} > 0$.

× Ensuite : $g(x) = \exp \left(\left(2 - \frac{1}{x} \right) \ln(x) \right) > 0$.

× Enfin, d'après les questions **2.a)** et **2.b)**, on obtient le tableau de variations suivant pour la fonction h .

x	0	α	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	+	
Variations de h	$-\infty$	0	$+\infty$

- On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction g :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variations de g	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

□

3. Démontrer :

$$g(x) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \ln(x)$$

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \\ &= \exp\left(2 \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp(2 \ln(x)) \times \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= x^2 \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

On obtient :

$$g(x) - x^2 = x^2 \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - x^2 = x^2 \left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right)$$

- Or, par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0$. On en déduit :

$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$$

- On en déduit :

$$g(x) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \times \left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\text{On en conclut : } g(x) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \ln(x).$$

Commentaire

- On utilise dans cette question le résultat suivant :

$$e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0$, par composition de limites, on retrouve bien :

$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$$

- Rappelons que cette formule découle de la définition de dérivabilité en 0 de la fonction $\varphi : x \mapsto e^x$. En effet, la fonction φ est dérivable en 0 si et seulement si la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$ existe, et dans ce cas :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0)$$

On obtient donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Autrement dit : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

□

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n existe et : $u_n > 0$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n$ existe et $u_n > 0$.

► **Initialisation :**

D'après l'énoncé : $u_0 > 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$).

- Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Or la fonction g est définie sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi $g(u_n)$ est bien définie.

On en déduit que $u_{n+1} = g(u_n)$ existe.

- De plus :

$$u_{n+1} = g(u_n) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \ln(u_n)\right) > 0$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et : $u_n > 0$.

□

5. Écrire une fonction **Scilab** qui prend en argument un réel u_0 et un entier n et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n + 1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = u_0$.

Démonstration.

On commence par coder la fonction g .

```

1  function y = g(x)
2      y = exp( (2 - 1/x) * log(x) )
3  endfunction

```

On propose ensuite la fonction **Scilab** suivante.

```

1  function U = Prem_Suite_u(u0, n)
2      U = zeros(1, n+1)
3      U(1) = u0
4      for i = 1:n
5          U(i+1) = g(U(i))
6      end
7  endfunction

```


Détaillons les éléments de ce 2^{ème} script.

- **Début de la fonction**

On commence par préciser la structure de la fonction :

- × cette fonction se nomme `Prem_Suite_u`,
- × elle prend en paramètre les variables `u0` et `n`,
- × elle admet pour variable de sortie la variable `U`.

```
1  function U = Prem_Suite_u(u0, n)
```

On initialise ensuite la variable `U` au vecteur nul de taille `n + 1`. C'est cette variable qui contiendra les `n + 1` premiers termes de la suite (u_n) .

```
2      U = zeros(1, n+1)
```

On stocke ensuite dans la 1^{ère} coordonnée de la variable `U`, la valeur du 1^{er} terme de la suite (u_n) , c'est-à-dire u_0 .

```
3      U(1) = u0
```

- **Structure itérative**

Les lignes `4` à `6` consistent à mettre à jour la variable `T` pour que ses coordonnées contiennent les termes successifs de la suite (u_n) . Pour cela on met en place une structure itérative (boucle `for`). À chaque itération, on met à jour une coordonnée de `U` avec la précédente à l'aide de la relation de récurrence définissant la suite (u_n) .

```
4      for i = 1:n
5          U(i+1) = g(U(i))
6      end
```

- **Fin de la fonction**

À l'issue de cette boucle, la variable `U` contient les `n + 1` premiers termes de la suite (u_n) .

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**. Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- Si on avait souhaité coder une fonction qui renvoie seulement le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite (u_n) , on aurait modifié le script précédent de la façon suivante :

```
1  function u = Suite_u(u0, n)
2      u = u0
3      for k = 1:n
4          u = g(u)
5      end
6  endfunction
```

□

6. a) Étudier le signe de $(x - 1) \ln(x)$ pour $x > 0$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Deux cas se présentent.

- si $x \leq 1$, alors :
 - × d'une part : $x - 1 \leq 0$,
 - × d'autre part, par croissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* : $\ln(x) \leq 0$.
 On en déduit : $(x - 1) \ln(x) \geq 0$.
- si $x > 1$, alors :
 - × d'une part : $x - 1 > 0$,
 - × d'autre part, par stricte croissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* : $\ln(x) > 0$.
 On en déduit : $(x - 1) \ln(x) > 0$.

Enfinement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (x - 1) \ln(x) \geq 0$.

□

b) Démontrer : $\forall x > 0, \frac{g(x)}{x} \geq 1$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 \frac{g(x)}{x} &= \frac{\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)}{x} \\
 &= \frac{\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)}{\exp(\ln(x))} \\
 &= \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) - \ln(x)\right) \\
 &= \exp\left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{x-1}{x} \ln(x)\right)
 \end{aligned}$$

- Or, d'après la question précédente : $(x - 1) \ln(x) \geq 0$. De plus : $x > 0$. Ainsi :

$$\frac{x-1}{x} \ln(x) \geq 0$$

Par croissance de la fonction \exp sur \mathbb{R} , on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
 \exp\left(\frac{x-1}{x} \ln(x)\right) & \geq & e^0 \\
 \parallel & & \parallel \\
 \frac{g(x)}{x} & & 1
 \end{array}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{g(x)}{x} \geq 1$

□

- c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geq x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente : $\frac{g(x)}{x} \geq 1$.

Or : $x > 0$. Donc : $g(x) \geq x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \geq x}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} g(x) = x &\Leftrightarrow \frac{g(x)}{x} = 1 && (\text{car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \exp\left(\frac{x-1}{x} \ln(x)\right) = 1 && (\text{d'après la question précédente}) \\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \ln(x) = 0 && (\text{car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ OU } \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ OU } x = 1 \end{aligned}$$

L'équation $g(x) = x$ admet donc 1 comme unique solution sur \mathbb{R}_+^* .

□

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \geq x$.
- Or, d'après la question 4. : $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente à $x = u_n$. On en déduit :

$$\begin{aligned} g(u_n) &\geq u_n \\ &\parallel \\ &u_{n+1} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

□

8. Dans cette question uniquement, on suppose : $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

- a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

► **Initialisation :**

D'après l'hypothèse de l'énoncé pour cette question 8. : $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$).

- Tout d'abord, par hypothèse de récurrence : $u_n \geq \frac{1}{2}$.

Or, la suite (u_n) est croissante d'après 7. Ainsi, par transitivité :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1}$$

- Démontrons ensuite : $u_{n+1} \leq 1$, c'est-à-dire $g(u_n) \leq 1$.

La question 2.d) nous fournit les variations de la fonction g sur \mathbb{R}_+^* . Comme $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ (par hypothèse de récurrence) et $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ (d'après 2.b)), deux cas se présentent :

× si $u_n \in [\frac{1}{2}, \alpha]$:

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq \alpha$$

$$\text{donc } g\left(\frac{1}{2}\right) \geq g(u_n) \geq g(\alpha) \quad \left(\begin{array}{l} \text{par décroissance} \\ \text{de } g \text{ sur } [\frac{1}{2}, \alpha] \end{array}\right)$$

Or :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \exp\left((2-2) \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \exp(0) = 1$$

Ainsi : $1 \geq g(u_n)$.

× si $u_n \in [\alpha, 1]$:

$$\alpha \leq u_n \leq 1$$

$$\text{donc } g(\alpha) \leq g(u_n) \leq g(1) \quad \left(\begin{array}{l} \text{par croissance} \\ \text{de } g \text{ sur } [\alpha, 1] \end{array}\right)$$

Or :

$$g(1) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{1}\right) \ln(1)\right) = \exp(0) = 1$$

Ainsi : $g(u_n) \leq 1$.

Finalement, on a toujours : $g(u_n) \leq 1$. Autrement dit : $u_{n+1} \leq 1$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

Démonstration.

- La suite (u_n) est :
 - × croissante,
 - × majorée par 1.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite ℓ telle que : $\ell \leq 1$.

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

Par passage à la limite dans cet encadrement, on obtient : $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

Ainsi : $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$.

- On sait :
 - × par définition de la suite $(u_n) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$,
 - × la fonction g est continue en $\ell \in [\frac{1}{2}, 1] \subset \mathbb{R}_+^*$.
- Ainsi, par passage à la limite, on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
 u_{n+1} & = & g(u_n) \\
 \begin{array}{c} \approx \\ \downarrow \\ \frac{1}{8} \end{array} & & \begin{array}{c} \approx \\ \downarrow \\ \frac{1}{8} \end{array} \\
 \ell & & g(\ell)
 \end{array}$$

On en déduit que ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$.
 Or, d'après la question **6.c)**, cette équation admet 1 pour unique solution. Comme $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$, on en déduit : $\ell = 1$.

Finalement, la suite (u_n) converge vers 1.

□

9. Dans cette question uniquement, on suppose : $u_0 > 1$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n > 1$.

► **Initialisation** :

D'après l'hypothèse de l'énoncé pour cette question **9.** : $u_0 > 1$.
 D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > 1$)

Par hypothèse de récurrence : $u_n > 1$.

Or la suite (u_n) est croissante d'après **7**. Ainsi, par transitivité :

$$u_{n+1} \geq u_n > 1$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

□

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Démonstration.

• D'après la question **7.**, la suite (u_n) est croissante. Deux cas se présentent alors :

- × soit elle est majorée. Dans ce cas, la suite (u_n) est convergente.
- × soit elle n'est pas majorée. Dans ce cas, (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démontrons qu'on est dans le second cas.

• Pour ce faire, on procède par l'absurde. Supposons alors que la suite (u_n) est majorée.

× La suite (u_n) est donc :

- croissante,
- majorée.

Elle est donc convergente de limite L .

- × Comme la suite (u_n) est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $L \geq u_0$.
Or dans cette question : $u_0 > 1$. Ainsi, par transitivité : $L \geq u_0 > 1$.
- × On sait de plus :
 - par définition de la suite (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$,
 - la fonction g est continue en $L \in]1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.
 Ainsi, par passage à la limite, on obtient : $L = g(L)$.
On en déduit que L est solution de l'équation $g(x) = x$.
Or, d'après **6.c**), cette équation admet 1 pour unique solution sur \mathbb{R}_+^* .
Absurde! (car $L > 1$)

On en déduit que la suite (u_n) n'est donc pas majorée.

- Finalement, la suite (u_n) est :
 - × croissante,
 - × non majorée.

On en déduit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Commentaire

- L'énoncé demande ici la nature d'une suite **croissante**. Il faut donc tout de suite penser au théorème de convergence monotone (*cf* début de démonstration).
Le réflexe, pour montrer la divergence, est donc de raisonner par l'absurde en supposant que la suite est majorée (et non en supposant qu'elle est convergente).
- De manière générale, il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
 - × montrer qu'une suite N'est PAS majorée,
 - × montrer qu'une matrice n'admettant qu'une seule valeur propre N'est PAS diagonalisable. \square

10. Dans cette question uniquement, on suppose : $0 < u_0 < \frac{1}{2}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Démonstration.

- Avec l'hypothèse faite dans cette question :

$$u_0 < \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } g(u_0) > g\left(\frac{1}{2}\right) \quad \left(\text{par stricte décroissance de } g \text{ sur }]0, \frac{1}{2}]\right)$$

$$\text{d'où } u_1 > 1 \quad \left(\text{d'après un calcul effectué en } \mathbf{8.a}\right)$$

Comme la suite (u_n) est croissante d'après **7.**, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq u_1$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$.

- En effectuant exactement la même démonstration qu'en question **9.b**), on peut donc conclure que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

La suite (u_n) diverge vers $+\infty$. \square

Partie III : Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note :

$$f(x, y) = x^{y - \frac{1}{x}} = \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)$$

11. Démontrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction $f_1 : (x, y) \mapsto \ln(x)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car elle est la composée $f_1 = \psi \circ v_1$ de :
 - × $v_1 : (x, y) \mapsto x$ qui est :
 - de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale,
 - telle que : $v_1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$.
 - × $\psi : u \mapsto \ln(u)$ qui est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- Avec un raisonnement similaire, la fonction $f_2 : (x, y) \mapsto y - \frac{1}{x}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- On en déduit que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car elle est la composée : $f = \exp \circ f_3$ de :
 - × $f_3 = f_2 \times f_1$ qui est :
 - de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
 - telle que : $f_3(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
 - × \exp qui est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

□

12. Démontrer :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) = \ln(x) f(x, y) \end{cases}$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Elle admet donc des dérivées partielles à l'ordre 1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
 - × Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \partial_1(f)(x, y) &= \left(\frac{1}{x^2} \times \ln(x) + \left(y - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}\right) \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \\ &= \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}\right) f(x, y) \\ &= \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x, y) \end{aligned}$$

× Ensuite :

$$\partial_2(f)(x, y) = (1 \times \ln(x)) \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = \ln(x) f(x, y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) = \ln(x) f(x, y) \end{cases}$$

□

13. Montrer que la fonction f admet un unique point critique a et préciser les coordonnées de a .

Démonstration.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est un point critique de } f &\Leftrightarrow \nabla(f)(x, y) = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x, y) = 0 \\ \ln(x) f(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{car : } f(x, y) = \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) + xy - 1 = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{car : } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) + xy = 1 \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad (\text{en remplaçant } x \text{ par } 1 \text{ dans la 1}^{\text{ère}} \text{ ligne}) \end{aligned}$$

La fonction f admet donc un unique point critique. Il s'agit du point $a = (1, 1)$.

Commentaire

- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on fait apparaître une équation du type :

$$\psi(x) = 0$$

Cette équation ne dépend que d'une seule variable, on peut donc utiliser toutes les techniques usuelles de résolution d'équation.

En injectant ensuite la valeur trouvée pour x dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend toujours que d'une variable (la variable y) et qu'il est donc plus simple de résoudre.

□

14. Montrer que la matrice hessienne de f au point a est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- D'après la question 11., la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Elle admet donc des dérivées partielles à l'ordre 2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

× Tout d'abord :

$$\begin{aligned} & \partial_{1,1}^2(f)(x, y) \\ = & \frac{\left(\frac{1}{x} + y\right) \times x^2 - (\ln(x) + xy - 1) \times 2x}{x^4} \times f(x, y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \times \partial_1(f)(x, y) \\ = & \frac{\left(\frac{1}{x} + y\right) \times x - 2(\ln(x) + xy - 1)}{x^3} f(x, y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \partial_1(f)(x, y) \\ = & \frac{1 + xy - 2\ln(x) - 2xy + 2}{x^3} f(x, y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \partial_1(f)(x, y) \\ = & \frac{3 - xy - 2\ln(x)}{x^3} f(x, y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \partial_1(f)(x, y) \end{aligned}$$

× Ensuite :

$$\partial_{2,1}^2(f)(x, y) = \frac{1}{x} \times f(x, y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \times \partial_2(f)(x, y)$$

× Comme f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par théorème de Schwarz :

$$\partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \frac{1}{x} f(x, y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \partial_2(f)(x, y)$$

× Enfin :

$$\partial_{2,2}^2(f)(x, y) = \ln(x) \times \partial_2(f)(x, y)$$

- De plus :

$$\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(1, 1) & \partial_{1,2}^2(f)(1, 1) \\ \partial_{2,1}^2(f)(1, 1) & \partial_{2,2}^2(f)(1, 1) \end{pmatrix}$$

Or :

× on calcule : $f(1, 1) = \exp\left(\left(1 - \frac{1}{1}\right) \ln(1)\right) = \exp(0) = 1$

× comme $a = (1, 1)$ est un point critique de f d'après la question précédente, alors :

$$\partial_1(f)(1, 1) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(1, 1) = 0$$

× On obtient :

$$\times \partial_{1,1}^2(f)(1, 1) = \frac{3 - 1 - 2\ln(1)}{1^3} f(1, 1) + \frac{\ln(1) + 1 - 1}{1^2} \partial_1(f)(1, 1) = 2 \times 1 + 0 \times 0 = 2$$

$$\begin{aligned} \times \partial_{2,1}^2(f)(1,1) &= \partial_{1,2}^2(f)(1,1) = \frac{1}{1} f(1,1) + \frac{\ln(1) + 1 - 1}{1^2} \partial_2(f)(1,1) = 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1 \\ \times \partial_{2,2}^2(f)(1,1) &= \ln(1) \partial_2(f)(1,1) = 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Finalement : $H = \nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□

15. La fonction f admet-elle en a un extremum local ?

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda I_2) &= \det \left(\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= (2 - \lambda) \times (-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } H &\Leftrightarrow H - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(H - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ est racine de } Q \end{aligned}$$

où Q est le polynôme de degré 2 défini par : $Q(X) = X^2 - 2X - 1$.

- On note Δ le discriminant du polynôme Q . Alors :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$$

Le polynôme Q admet donc 2 racines distinctes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \\ \lambda_2 &= \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

On en déduit : $\text{Sp}(H) = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$.

- De plus :

$$\times \text{ on sait : } \lambda_1 = 1 + \sqrt{2} > 0$$

$$\times \text{ comme } 1 < 2, \text{ par stricte croissance de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \text{ on a aussi : } 1 < \sqrt{2}. \text{ D'où : } \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} < 0.$$

On en conclut que f n'admet pas d'extremum local en a (c'est un point col).

Commentaire

- Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :
 - × « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
 - × « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes? »
 - × « La v.a.r. X admet-elle une variance? »
 - × « La matrice A est-elle diagonalisable? »
 - × « La suite (u_n) est-elle majorée? »
 la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).
- Il s'agit donc ici de démontrer que f n'admet pas d'extremum local au point $(1, 1)$. Autrement dit, il faut démontrer que les valeurs propres de la matrice $H = \nabla^2(f)(1, 1)$ sont non nulles et de signe contraire. □

16. Démontrer que la fonction f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, un extremum global de f doit être un extremum local de f .
- Ensuite, un extremum local de f doit être un point critique de f . Ainsi, le seul extremum local possible de f est le point a .
- Enfin, d'après la question précédente, le point a n'est pas extremum local de f .

La fonction f n'admet donc pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. □

Exercice 3

On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 , et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4, ...

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n , Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier que X_n , Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Démonstration.

Commençons tout d'abord par la v.a.r. X_n .

- L'expérience aléatoire consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\frac{1}{3}$ (probabilité que le pion soit placé dans l'urne 1).
- La v.a.r. X_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience.

$$\text{On en déduit que } X_n \text{ suit la loi } \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{Par les mêmes arguments, on conclut : } Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right) \text{ et } Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right). \quad \square$$

b) Expliciter $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = 0]) &= \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-0} \\ &= 1 \times 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- En exploitant de nouveau la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = n]) &= \binom{n}{n} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-n} \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 1 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}([X_n = n]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \square$$

c) Justifier : $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.

Démonstration.

- L'événement $[X_n = n]$ est réalisé
 \Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, n jetons ont été placés dans l'urne 1
 \Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, aucun jeton n'a été placé dans l'urne 2
 ET aucun jeton n'a été placé dans l'urne 3
 \Leftrightarrow L'événement $[Y_n = 0]$ est réalisé
 ET l'événement $[Z_n = 0]$ est réalisé

On en conclut : $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.
--

□

d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ et $[Z_n = 0]$.

Démonstration.

- L'événement V_n est réalisé
 \Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, au moins une urne est restée vide
 \Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne 1 est restée vide
 OU l'urne 2 est restée vide
 OU l'urne 3 est restée vide
 \Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne 1 contient 0 jeton
 OU l'urne 2 contient 0 jeton
 OU l'urne 3 contient 0 jeton
 \Leftrightarrow L'événement $[X_n = 0]$ est réalisé
 OU l'événement $[Y_n = 0]$ est réalisé
 OU l'événement $[Z_n = 0]$ est réalisé
 \Leftrightarrow L'événement $[X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$ est réalisé

$V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$

Commentaire

- En question 1.c), le résultat à démontrer est fourni directement dans l'énoncé. Cela rend la question moins intéressante : au lieu de demander au candidat de trouver le lien entre les événements $[Y_n = 0]$, $[Z_n = 0]$ et $[X_n = n]$, on demande simplement au candidat d'énoncer en français un résultat mathématique. L'objectif de cette question semble donc simplement de vérifier cette bonne compréhension.
- En question 1.d), le concepteur ne fournit plus l'égalité entre événements et c'est alors au candidat de la déterminer. Cela permet d'avoir une succession de questions de difficulté progressive, ce qui est bienvenu aux concours.

Commentaire

- L'une des difficultés du travail de concepteur est de réfléchir en découpage en sous-questions car celui-ci influe directement sur la difficulté du sujet. Par ailleurs, il faut aussi mener une réflexion assez précise sur le fait de fournir ou non les résultats intermédiaires :

× fournir un résultat rend parfois la question concernée un peu vide.

× ne pas fournir le résultat peut rendre une question ultérieure inabordable pour un candidat qui n'aurait pas su le trouver.

Il y a donc un équilibre à trouver afin que l'énoncé reste d'un niveau suffisamment élevé tout en évitant la multiplication de questions bloquantes. La formulation du sujet démontre que le concepteur a mené une réflexion poussée sur cet équilibre. □

e) En déduire : $\mathbb{P}(V_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_n) &= \mathbb{P}([X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 0]) + \mathbb{P}([Y_n = 0]) + \mathbb{P}([Z_n = 0]) \\ &\quad - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Z_n = 0]) - \mathbb{P}([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \\ &\quad + \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \end{aligned}$$

- Détaillons les différents éléments de cette égalité.

× Comme les v.a.r. X_n, Y_n et Z_n suivent toutes la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$, on obtient (cf question 1.b) :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = \mathbb{P}([Y_n = 0]) = \mathbb{P}([Z_n = 0]) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

× On a : $[X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = \emptyset$. En effet :

L'événement $[X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X_n = 0]$ est réalisé

ET l'événement $[Y_n = 0]$ est réalisé

ET l'événement $[Z_n = 0]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, aucun n'a été placé dans l'urne 1,

ET aucun n'a été placé dans l'urne 2

ET aucun n'a été placé dans l'urne 3

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, les trois urnes sont vides

Cette dernière propriété n'étant jamais vérifiée, il en est de même de la première. L'événement $[X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ ne peut être réalisé. C'est donc l'événement impossible. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× Enfin, d'après la question **1.c**) : $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.

En raisonnant de même :

$$[X_n = 0] \cap [Y_n = 0] = [Z_n = n] \quad \text{et} \quad [X_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [Y_n = n]$$

Ces égalités expriment simplement le fait que si, après le placement de n jetons une urne est pleine, alors les deux autres sont vides (et réciproquement).

Comme les v.a.r. X_n, Y_n et Z_n suivent toutes la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$, on obtient (cf question **1.b**) :

$$\mathbb{P}([X_n = n]) = \mathbb{P}([Y_n = n]) = \mathbb{P}([Z_n = n]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

• Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_n) &= \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &\quad - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &\quad + \quad \quad \quad 0 \end{aligned}$$

$$\text{On a bien : } \mathbb{P}(V_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

□

2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ». Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n , puis démontrer que $\mathbb{P}(V) = 0$.

Démonstration.

• Remarquons :

L'événement V est réalisé

⇔ L'une des urnes reste éternellement vide

⇔ Quel que soit le nombre $k \in \mathbb{N}^*$ de jetons répartis, une urne est vide

⇔ $\forall k \in \mathbb{N}^*, V_k$ est réalisé

⇔ Après la répartition du premier jeton, une urne est restée vide

ET après la répartition de 2 jetons, une urne est restée vide

ET après la répartition de 3 jetons, une urne est restée vide

... ..

ET après la répartition de k jetons, une urne est restée vide

... ..

⇔ L'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} V_k$ est réalisé

$$\text{Ainsi : } V = \bigcap_{k=1}^{+\infty} V_k.$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} V_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n V_k\right) \quad \begin{array}{l} \text{(d'après le théorème} \\ \text{de la limite} \\ \text{monotone)} \end{array}\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$V_k \supset V_{k+1}$$

En effet, si V_{k+1} est réalisé, c'est que, après la répartition de $k+1$ jetons, une urne est restée vide. Si c'est le cas, l'urne en question était déjà vide avant la répartition du $(k+1)^{\text{ème}}$ jeton : comme on ne retire jamais de jeton d'une urne, une urne vide à une étape de l'expérience l'était déjà lors de l'étape précédente. On en conclut :

$$\bigcap_{k=1}^n V_k = V_n \quad \begin{array}{l} \text{(la suite } (V_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite} \\ \text{décroissante d'événements)} \end{array}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n V_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \quad \begin{array}{l} \text{(d'après la question précédente)} \end{array} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \quad \begin{array}{l} \text{(car ces deux quantités qui} \\ \text{admettent une limite finie)} \end{array} \\ &= 0 - 0 \quad \begin{array}{l} \text{(car } \frac{2}{3} \in]-1, 1[\text{ et } \frac{1}{3} \in]-1, 1[)} \end{array}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(V) = 0$$

Commentaire

- Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.
- 1) Introduire des événements simples (« tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage », « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ...) liés à l'expérience considérée.
Nommer l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)
 - 2) Décomposer l'événement A à l'aide d'événements simples.
 - 3) Deux cas se présentent alors :
 - (i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

union / incompatibilité / somme

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union d'une suite croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
 - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de \mathbb{P} .
 - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Commentaire

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
- × si c'est le cas, on utilise la σ -additivité de \mathbb{P} .
- × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le corollaire du théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

intersection / indépendance / produit

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection d'une suite décroissante d'événements par exemple).
 - Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
 - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
 - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule des probabilités composées.
- Dans un exercice de probabilités discrètes, il est assez fréquent de considérer des expériences qui font intervenir un nombre infini d'étapes. Dès lors, il est assez naturel de s'interroger sur la probabilité qu'une propriété puisse se réaliser une infinité (successive) de fois ou qu'une propriété soit réalisée au moins une fois au cours de l'expérience. Cela revient à considérer des événements qui s'écrivent à l'aide d'une union et / ou d'une intersection infinie d'événements. Pour déterminer la probabilité de tels événements, la méthode usuelle consiste à utiliser le théorème de la limite monotone. Il stipule, si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

Il est à noter qu'aucune hypothèse n'est faite sur la suite (A_k) d'événements. Elle peut être une suite croissante ou décroissante d'événements ou n'être ni décroissante, ni croissante. Cette question de la monotonie de la suite ne se pose pas lors de l'utilisation du théorème de la limite monotone. Elle n'apparaît que dans l'étape suivante où l'on cherche à déterminer la probabilité d'une intersection / union **finie** d'événements.

- On a vu dans le point précédent que certaines propriétés s'expriment naturellement à l'aide d'une union / intersection infinie d'événements. En conséquence, l'utilisation du théorème de la limite monotone est assez fréquente aux concours. Lors de la session 2021, les sujets ECRICOME, EDHEC, ESSEC-I, ESSEC-II contenaient tous une question qui nécessitait l'utilisation de ce théorème. □

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

a) On rappelle qu'en Scilab la commande `grand(n,p,'uin',a,b)` renvoie une matrice aléatoire à n lignes et p colonnes où chaque coefficient est la réalisation d'une variable aléatoire indépendante suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[[a, b]]$, ces variables aléatoires étant mutuellement indépendantes.

Compléter la fonction Scilab ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T .

```

1  function t = T()
2      X = 0
3      Y = 0
4      Z = 0
5      n = 0
6      liste = [X, Y, Z]
7      while .....
8          i = grand(1,1,'uin',1,3) // choix d'un entier entre 1 et 3
9          liste(i) = .....
10         n = n+1
11     end
12     t = .....
13 endfunction

```

Démonstration.

• Début du programme

Au début du programme, on initialise à 0 les variables informatiques X , Y et Z . Ces variables sont faites pour déterminer le nombre respectif de jetons dans l'urne 1, 2 et 3, à chaque étape de l'expérience. Initialement, il n'y a aucun jeton dans les urnes.

```

2      X = 0
3      Y = 0
4      Z = 0

```

Par ailleurs, on initialise aussi à 0 la variable informatique n qui détermine le nombre total de jetons placés dans les urnes à chaque étape de l'expérience.

```

5      n = 0

```

Les 3 variables informatiques X , Y et Z , sont regroupées au sein d'une même matrice ligne.

```

6      liste = [X, Y, Z]

```

• Structure itérative

Il est explicitement demandé de stopper l'expérience lorsque, pour la première fois, chaque urne contient au moins un jeton. On rappelle que le nombre de jetons de chaque urne est stocké dans la matrice ligne `liste`. Il faut donc continuer l'expérience tant que l'un des coefficients de cette matrice est nul.

```

7      while liste(1) == 0 || liste(2) == 0 || liste(3) == 0

```

À chaque étape de l'expérience, un nouveau jeton est placé dans l'urne. Cette urne est choisie aléatoirement parmi les 3 urnes considérées. Pour ce faire, on utilise la fonction `grand`, de sorte à simuler une v.a.r. U qui suit la loi $\mathcal{U}([1, 3])$.

```

8          i = grand(1,1,'uin',1,3)

```

Il reste alors à mettre à jour le nombre de jetons contenus dans l'urne choisie pour accueillir le nouveau jeton. Pour ce faire, on incrémente de 1 la variable informatique associée.

```
9      liste(i) = liste(i) + 1
```

Enfin, on met à jour le nombre total de jetons qui ont été placés dans les urnes en incrémentant la variable n de 1.

```
10     n = n + 1
```

• Fin de programme

En sortie de boucle, on sait que plus aucune urne n'est vide. Il faut alors affecter la variable informatique t à sa valeur, à savoir le nombre d'étapes de l'expérience qu'il a fallu pour que cela soit le cas. Pour ce faire, il suffit d'affecter à t la valeur de n , nombre total de jetons placés jusqu'alors.

```
12     t = n
```

Commentaire

- Lors de l'écriture d'un programme informatique, on se soumet généralement à quelques règles de bonne conduite :

- (1) utilisation de commentaires indiquant le but de chaque fonction,
- (2) réflexion autour du découpage en sous-fonctions pouvant être réutilisées,
- (3) utilisation de noms explicites pour les fonctions et les variables,
- (4) indentation du code (utilisation correcte d'espaces et sauts de lignes).

Le but de ces règles est de produire un code lisible, intelligible et facilement modifiable à l'avenir. Ces règles sont globalement très bien respectées ici. Le commentaire dans le programme ainsi que l'introduction des variables informatiques X , Y et Z témoigne de cette volonté de produire du code intelligible. Plus précisément, on peut remarquer qu'il était possible de remplacer les lignes 2 à 6 par celle-ci :

```
2      liste = [0, 0, 0]
```

Agir ainsi ne modifie en rien ce qui est calculé par le programme. Mais cela rend son analyse plus compliquée. La présentation choisie par le concepteur démontre, comme dit plus haut, sa volonté de se faire comprendre par le candidat.

- En revanche, le nom choisi pour la fonction, à savoir T semble peu pertinent. Il induit une confusion avec la variable informatique t qui contient la simulation de la v.a.r. T . Le nom `simult` est bien plus adapté. C'était le nom choisi dans les énoncés précédents et il serait préférable qu'il soit de nouveau choisi dans les énoncés à venir.
- La condition de continuation de la boucle consiste à tester si l'une des urnes contient un nombre nul de jetons. Ce test aurait aussi pu se faire comme suit.

```
7      while liste(1) * liste(2) * liste(3) == 0
```

En effet, si le produit `liste(1) * liste(2) * liste(3)` est nul, c'est que l'une (au moins) de ces variables est nulle. □

- b) Écrire un script **Scilab** qui simule 10 000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

Démonstration.

- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(T)$ (pour peu que cette espérance existe) est :
 - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10000$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. T .
Formellement, on souhaite obtenir un N -uplet (t_1, \dots, t_N) qui correspond à l'observation d'un N -échantillon (T_1, \dots, T_N) de la v.a.r. T .
(les v.a.r. T_i sont indépendantes et de même loi que T)
 - × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.
- Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k \simeq \mathbb{E}(T)$$

- Il s'agit alors d'implémenter cette idée en **Scilab**. La première étape est de créer une matrice ligne `tabT` destinée à contenir le N -uplet (t_1, \dots, t_N) .

```

1 N = 10 000
2 tabT = zeros(1, N)

```

Il s'agit alors d'affecter à chaque t_i une simulation de la v.a.r. T .

```

3 for i = 1:N
4     tabT(i) = T()
5 end

```

(on rappelle que T est une fonction qui simule la v.a.r. T)

- Il reste alors à afficher la valeur moyenne de ce N -uplet :

```

6 disp( mean(tabT) )

```

Commentaire

- Comme mentionné précédemment, les explications sont données ici pour la bonne compréhension du lecteur mais fournir uniquement le programme démontre la bonne compréhension et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.
- On n'a pas opté ici pour une présentation sous forme de fonction car :
 - × tous les paramètres sont fixés dans l'énoncé ($N = 10000$).
 - × le terme script utilisé par le concepteur est plutôt adapté à la présentation choisie. Si le concepteur attendait une fonction, il aurait certainement précisé l'entête.

En revanche, le terme « renvoie » est plutôt utilisé lorsque l'on parle de fonction. Il aurait peut-être été préférable, pour cette question, de parler d'affichage. La présentation sous forme de fonction permet, sans aucun doute, d'obtenir tous les points.

Commentaire

- Il convient de savoir comment écrire une fonction car le concepteur demande parfois explicitement de faire une fonction. La présentation correspondante est la suivante.

```

1  function E = approxEsp()
2      N = 10000
3      tabT = zeros(1, N)
4      for i = 1:N
5          tabT(i) = T()
6      end
7      E = mean(tabT())
8  endfunction

```

- On s'est servi ici de la fonction `mean` (fonction prédéfinie en **Scilab**) qui permet de calculer la moyenne arithmétique des coefficients d'une matrice. On aurait aussi pu écrire un programme permettant de calculer $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k$ à l'aide d'une structure itérative. Pour ce faire, il est conseillé de d'abord calculer la somme qui apparaît dans ce terme puis de diviser par N .

```

1  function E = approxEsp()
2      N = 10000
3      S = 0
4      for k = 1:N
5          S = S + T()
6      end
7      E = 1/N * S
8  endfunction

```

□

4. Déterminer $T(\Omega)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T est à valeurs entières car elle prend pour valeur le nombre de jetons nécessaire. On en déduit : $T(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- On peut être plus précis. La v.a.r. T :
 - × ne peut pas prendre les valeurs 0, 1 ou 2 car il faut a minima 3 jetons pour que chacune des 3 urnes contienne au moins 1 jeton.
 - × peut prendre la valeur 3. C'est par exemple le cas lorsque :
 - l'urne 1 reçoit le jeton 1,
 - l'urne 2 reçoit les jetons 2 et 3,
 - l'urne 3 reçoit finalement le jeton 4.
 - × ...
 - × peut prendre la valeur k . C'est par exemple le cas lorsque :
 - l'urne 1 reçoit le jeton 1,
 - l'urne 2 reçoit les jetons 2, 3, ..., $k-1$,
 - l'urne 3 reçoit finalement le jeton k .
 - × ...

Ainsi, T peut prendre toute valeur entière plus grande que 3. Autrement dit : $T(\Omega) = \llbracket 3, +\infty \llbracket$.

□

5. Démontrer : $\forall n \in T(\Omega), \mathbb{P}([T = n]) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n)$.

Démonstration.

Soit $n \in T(\Omega)$. Démontrons : $[T = n] \cup V_n = V_{n-1}$.

• Tout d'abord :

$$\begin{aligned} V_{n-1} &= V_{n-1} \cap \Omega \\ &= V_{n-1} \cap ([T = n] \cup \overline{[T = n]}) \\ &= (V_{n-1} \cap [T = n]) \cup (V_{n-1} \cap \overline{[T = n]}) \end{aligned}$$

• Or :

$$\times [T = n] \subset V_{n-1}.$$

En effet, si $[T = n]$ est réalisé, c'est qu'il a fallu n jetons pour que, la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton. Ainsi, le $n^{\text{ème}}$ jeton a été placé dans la seule urne qui, à l'étape $n - 1$ est encore vide. On en déduit qu'après la répartition de $n - 1$ jetons, une urne (au moins) était toujours vide.

$$\text{On en conclut alors : } V_{n-1} \cap [T = n] = [T = n]$$

$$\times V_{n-1} \cap \overline{[T = n]} = V_n.$$

En effet :

L'événement $V_{n-1} \cap \overline{[T = n]}$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de $n - 1$ jetons, une urne (au moins) est restée vide

ET il a fallu strictement plus de n jetons pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton

\Leftrightarrow Après la répartition de $n - 1$ jetons, une urne (au moins) est restée vide

ET après le placement du $n^{\text{ème}}$ jeton, une urne (au moins) est restée vide

\Leftrightarrow L'événement V_{n-1} est réalisé

ET l'événement V_n est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $V_{n-1} \cap V_n$ est réalisé

$$\text{Comme } V_n \subset V_{n-1} \text{ (cf question 2.), on en conclut : } V_{n-1} \cap \overline{[T = n]} = V_{n-1} \cap V_n = V_n.$$

$$\text{On a bien : } [T = n] \cup V_n = V_{n-1}.$$

• Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_{n-1}) &= \mathbb{P}([T = n] \cup V_n) \\ &= \mathbb{P}([T = n]) + \mathbb{P}(V_n) \quad (\text{car les événements } [T = n] \\ &\quad \text{et } V_n \text{ sont incompatibles}) \end{aligned}$$

En effet, il est impossible qu'il ait fallu exactement n jetons pour que chaque urne contienne au moins un jeton et que, dans le même temps, une urne soit restée vide après le placement du $n^{\text{ème}}$ jeton.

$$\forall n \in T(\Omega), \mathbb{P}(V_{n-1}) = \mathbb{P}([T = n]) + \mathbb{P}(V_n)$$

Commentaire

- L'égalité initiale entre probabilités fait apparaître une différence entre probabilités de certains événements. Une telle égalité est généralement la conséquence d'une égalité entre événements où apparaît une différence ensembliste d'événements. Plus précisément, on pourrait mettre ici en place le raisonnement suivant :

$$V_{n-1} \setminus V_n = [T = n] \Rightarrow \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_{n-1} \cap V_n) = \mathbb{P}([T = n])$$

Rappelons par ailleurs qu'une différence ensembliste peut s'écrire comme une intersection :

$$V_{n-1} \setminus V_n = V_{n-1} \cap \overline{V_n}$$

Il s'agit donc de démontrer : $V_{n-1} \cap \overline{V_n} = [T = n]$.

Cette égalité se démontre plutôt aisément.

En effet, si $V_{n-1} \cap \overline{V_n}$ est réalisé, c'est qu'après la répartition de $n - 1$ jetons, une urne (au moins) est restée vide et qu'après la répartition de n jetons, aucune urne n'est vide.

Ceci est réalisé si et seulement si il a fallu exactement n jetons pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

- On a préféré ici réordonner les termes de l'égalité de sorte à faire apparaître une somme entre probabilités d'événements. Une telle égalité est issue d'une réunion d'événements (le plus souvent incompatibles ou à tout le moins d'intersection négligeable) ce qui permet d'éviter d'avoir à gérer une différence ensembliste. Ce qui amène ici au raisonnement suivant :

$$[T = n] \cup V_n = V_{n-1} \Rightarrow \mathbb{P}([T = n]) + \mathbb{P}(V_n) = \mathbb{P}(V_{n-1})$$

De manière générale, il est souvent plus simple et donc préférable de raisonner sur une somme de probabilités (qui provient généralement de l'union de 2 événements) que sur une différence de probabilités (qui provient généralement de la différence ensembliste de 2 événements).

- La présentation de la résolution de cette question illustre le schéma général de résolution présentée dans la remarque de la question 2. Lors de cette démonstration, on redémontre la formule des probabilités totales. On aurait pu rédiger directement avec ce théorème. Détaillons cette rédaction.

La famille $([T = n], \overline{[T = n]})$ est un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(V_{n-1}) = \mathbb{P}([T = n] \cap V_{n-1}) + \mathbb{P}(\overline{[T = n]} \cap V_{n-1})$$

On termine ensuite en remarquant, comme dans la présentation précédente :

$$[T = n] \cap V_{n-1} = [T = n] \quad \text{et} \quad \overline{[T = n]} \cap V_{n-1} = V_n$$

□

6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 3} k \mathbb{P}([T = k])$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car cette série est à termes positifs.

- Soit $N \in \llbracket 3, +\infty \llbracket$. On a :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=3}^N k \mathbb{P}(T = k) \\
 = & \sum_{k=3}^N k (\mathbb{P}(V_{k-1}) - \mathbb{P}(V_k)) && \text{(d'après la question précédente} \\
 & \text{et car } k \in T(\Omega)) \\
 = & \sum_{k=3}^N (k \mathbb{P}(V_{k-1}) - k \mathbb{P}(V_k)) \\
 = & \sum_{k=3}^N k \mathbb{P}(V_{k-1}) - \sum_{k=3}^N k \mathbb{P}(V_k) \\
 = & \sum_{k=2}^{N-1} (k+1) \mathbb{P}(V_k) - \sum_{k=3}^N k \mathbb{P}(V_k) && \text{(par décalage d'indice)} \\
 = & 3 + \sum_{k=3}^{N-1} (k+1) \mathbb{P}(V_k) - \sum_{k=3}^N k \mathbb{P}(V_k) && \text{(car } V_2 = \Omega \text{ et donc } \mathbb{P}(V_2) = 1) \\
 = & 3 + \sum_{k=3}^{N-1} k \mathbb{P}(V_k) + \sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) - \sum_{k=3}^N k \mathbb{P}(V_k) \\
 = & 3 + \sum_{k=3}^{N-1} \cancel{k \mathbb{P}(V_k)} + \sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) - \left(\sum_{k=3}^{N-1} \cancel{k \mathbb{P}(V_k)} + N \mathbb{P}(V_N) \right)
 \end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) &= \sum_{k=3}^{N-1} \left(3 \left(\frac{2}{3} \right)^k - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^k \right) && \text{(d'après la question} \\
 & && \text{1.d)} \\
 &= 3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{2}{3} \right)^k - 3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{1}{3} \right)^k && \text{(par linéarité} \\
 & && \text{de la somme)}
 \end{aligned}$$

Or, d'après la formule des sommes géométriques :

$$\begin{aligned}
 3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{2}{3} \right)^k &= 3 \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^3 - \left(\frac{2}{3} \right)^N}{1 - \frac{2}{3}} \\
 &= 3 \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^3 - \left(\frac{2}{3} \right)^N}{\frac{1}{3}} \\
 &= 9 \left(\frac{2}{3} \right)^3 - 9 \left(\frac{2}{3} \right)^N \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 9 \left(\frac{2}{3} \right)^3 - 0 && \text{(car } \frac{2}{3} \in]-1, 1[)
 \end{aligned}$$

$$3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{2}{3} \right)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 9 \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \cancel{9} \times \frac{8}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{8}{3}$$

De la même manière :

$$3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{1}{3} \right)^k = 3 \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^3 - \left(\frac{1}{3} \right)^N}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^3 - \frac{9}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^N \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^3$$

$$3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{1}{3} \right)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{9}{2} \times \frac{1}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{1}{6}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
 N \mathbb{P}(V_N) &= N \left(3 \left(\frac{2}{3} \right)^N - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^N \right) \\
 &= 3 \frac{N}{\left(\frac{3}{2} \right)^N} - 3 \frac{N}{3^N} \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 3 \times 0 - 3 \times 0
 \end{aligned}$$

(car, comme $\frac{3}{2} > 1$ et $3 > 1$,
 $N = o_{N \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^N \right)$ et $N = o_{N \rightarrow +\infty} (3^N)$)

$$\boxed{N \mathbb{P}(V_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0}$$

- Finalement, la v.a.r. T admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(T) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(3 + \sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) - N \mathbb{P}(V_N) \right) \\
 &= 3 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) - \lim_{N \rightarrow +\infty} N \mathbb{P}(V_N) \\
 &= 3 + \frac{8}{3} - \frac{1}{6} \\
 &= 3 + \frac{15}{6}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = 3 + \frac{15}{6} = \frac{18}{6} + \frac{15}{6} = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer, que pour tout $k \geq 3$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([T = k]) &= \mathbb{P}(V_{k-1}) - \mathbb{P}(V_k) \\
 &= \left(3 \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \right) - \left(3 \left(\frac{2}{3} \right)^k - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^k \right) \\
 &= \left(3 \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \right) - \left(\cancel{3} \frac{2}{\cancel{3}} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} - \cancel{3} \frac{1}{\cancel{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \right) \\
 &= \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} (3 - 2) + \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} (-3 + 1) \\
 &= \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} - 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1}
 \end{aligned}$$

Commentaire

• Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=3}^N k \mathbb{P}([T = k]) &= \sum_{k=3}^N k \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right) \\
 &= \sum_{k=3}^N k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2 \sum_{k=3}^N k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^N k \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 \left(\frac{2}{3}\right)^0 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \right) \\
 &\quad - \left(2 \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 \left(\frac{1}{3}\right)^0 - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \right) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^N k \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 - \cancel{\frac{4}{3}} - 2 \sum_{k=1}^{N-1} k \left(\frac{1}{3}\right)^k + 2 + \cancel{\frac{4}{3}} \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + 1
 \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + 1 &= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 2 \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + 1 \\
 &= 3^2 - 2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 \\
 &= 3^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

□

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. a) Donner la loi du couple (X_2, W_2) .

Démonstration.

- D'après 1.a) : $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{\text{D'où : } X_2(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket.}$$

- Par définition de la v.a.r. W_2 , on a : $W_2(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket$.

En effet, après le placement de 2 jetons, deux cas se présentent :

- × les 2 jetons sont dans la même urne, et donc 2 urnes restent vides. La v.a.r. W_2 prend alors la valeur 2.
- × les 2 jetons sont dans des urnes différentes, et donc 1 urne reste vide. La v.a.r. W_2 prend alors la valeur 1.

$$\boxed{W_2(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket}$$

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

$A_i =$ « le jeton numéro i est déposé dans l'urne U_1 »

$B_i =$ « le jeton numéro i est déposé dans l'urne U_2 »

$C_i =$ « le jeton numéro i est déposé dans l'urne U_3 »

× Déterminons $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1])$.

L'événement $[X_2 = 0] \cap [W_2 = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X_2 = 0]$ est réalisé ET l'événement $[W_2 = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 ne contient aucun jeton ET 1 urne est vide

\Leftrightarrow Après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 ne contient aucun jeton ET les urnes U_2 et U_3 contiennent exactement 1 jeton

\Leftrightarrow Le jeton numéro 1 est déposé dans l'urne U_2 ET le jeton numéro 2 est déposé dans l'urne U_3

OU le jeton numéro 1 est déposé dans l'urne U_3 ET le jeton numéro 2 est déposé dans l'urne U_2

\Leftrightarrow L'événement $B_1 \cap C_2$ est réalisé

OU l'événement $C_1 \cap B_2$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $(B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap B_2)$ est réalisé

On en déduit :

$$[X_2 = 0] \cap [W_2 = 1] = (B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap B_2)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1]) \\ &= \mathbb{P}\left((B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap B_2)\right) \\ &= \mathbb{P}(B_1 \cap C_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap B_2) && \text{(car les événements } B_1 \cap C_2 \text{ et } C_1 \cap B_2 \text{ sont incompatibles)} \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}(B_2) && \text{(par indépendance des placements des jetons)} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} && \text{(car, pour chaque jeton, le choix de l'urne est équiprobable)} \end{aligned}$$

On obtient : $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1]) = \frac{2}{9}$.

× Déterminons $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2])$.

L'événement $[X_2 = 0] \cap [W_2 = 2]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X_2 = 0]$ est réalisé ET l'événement $[W_2 = 2]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 ne contient aucun jeton ET 2 urnes sont vides

\Leftrightarrow L'urne U_2 contient exactement 2 jetons

OU l'urne U_3 contient exactement 2 jetons

\Leftrightarrow L'événement $B_1 \cap B_2$ est réalisé

OU l'événement $C_1 \cap C_2$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $(B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)$ est réalisé

On en déduit :

$$[X_2 = 0] \cap [W_2 = 2] = (B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)$$

Ainsi, avec les mêmes arguments que pour le point précédent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2]) &= \mathbb{P}((B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}(C_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

On obtient : $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2]) = \frac{2}{9}$.

× Déterminons $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1])$.

On remarque :

$$[X_2 = 1] \subset [W_2 = 1]$$

En effet, si $[X_2 = 1]$ est réalisé, c'est que, après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 ne contient qu'un seul jeton. Le 2nd jeton a donc été déposé soit dans l'urne U_2 , soit dans l'urne U_3 . Après cette répartition, il reste donc une seule urne vide. Autrement dit, l'événement $[W_2 = 1]$ est alors réalisé.

On en déduit :

$$[X_2 = 1] \cap [W_2 = 1] = [X_2 = 1]$$

Ainsi, d'après **1.a)** :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1]) &= \mathbb{P}([X_2 = 1]) \\ &= \binom{2}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{2-1} \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On obtient : $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1]) = \frac{4}{9}$.

× Déterminons $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2])$.

L'événement $[X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X_2 = 1]$ est réalisé ET l'événement $[W_2 = 2]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 contient exactement 1 jeton ET 2 urnes sont vides

Ceci n'est jamais réalisé. En effet, après la répartition de 2 jetons, si l'urne U_1 en contient exactement 1, alors le 2nd est nécessairement dans l'urne U_2 ou l'urne U_3 . Et ainsi il n'y a qu'une seule urne vide (et non 2).

On en déduit :

$$[X_2 = 1] \cap [W_2 = 2] = \emptyset$$

On obtient : $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

× Déterminons $\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1])$.

L'événement $[X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X_2 = 2]$ est réalisé ET l'événement $[W_2 = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 contient exactement 2 jeton ET exactement 1 urne est vide

Ceci n'est jamais réalisé. En effet, après la répartition de 2 jetons, si l'urne U_1 en contient exactement 2, alors les urnes U_2 et U_3 sont vides. Et ainsi il y a 2 urnes vides (et non 1).

On en déduit :

$$[X_2 = 2] \cap [W_2 = 1] = \emptyset$$

On obtient : $\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

× Déterminons $\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2])$.

On remarque :

$$[X_2 = 2] \subset [W_2 = 2]$$

En effet, si $[X_2 = 2]$ est réalisé, c'est que, après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 contient les 2 jetons. Les urnes U_2 et U_3 sont donc vides. Après cette répartition, il reste donc 2 urnes vides. Autrement dit, l'événement $[W_2 = 2]$ est alors réalisé.

On en déduit :

$$[X_2 = 2] \cap [W_2 = 2] = [X_2 = 2]$$

Ainsi, d'après **1.b** :

$$\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]) = \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

On obtient : $\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]) = \frac{1}{9}$.

Commentaire

- Notons que la famille $([X_2 = i] \cap [W_2 = j])_{\substack{i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, 2 \rrbracket}}$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$$\sum_{i=0}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \mathbb{P}([X_2 = i] \cap [W_2 = j]) \right) = 1$$

- On peut ici utiliser ce résultat comme mesure de vérification :

$$\sum_{i=0}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \mathbb{P}([X_2 = i] \cap [W_2 = j]) \right) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + 0 + 0 + \frac{1}{9} = 1$$

b) En déduire la loi de W_2 , et calculer son espérance.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $W_2(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket$.
- Déterminons $\mathbb{P}([W_2 = 1])$.
La famille $([X_2 = i])_{i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([W_2 = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) \\ &= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + 0 \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue à l'aide de la question précédente.

$$\text{On obtient : } \mathbb{P}([W_2 = 1]) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

- Enfin, la famille $([W_2 = 1], [W_2 = 2])$ forme un système complet d'événements. Ainsi :

$$\mathbb{P}([W_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([W_2 = 1]) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}([W_2 = 2]) = \frac{1}{3}$$

- On sait : $W_2(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket$. La v.a.r. W_2 est donc finie.

La v.a.r. W_2 admet donc une espérance.

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_2) &= 1 \times \mathbb{P}([W_2 = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([W_2 = 2]) \\ &= \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit : } \mathbb{E}(W_2) = \frac{4}{3}.$$

□

c) Calculer la covariance de X_2 et W_2 .

Démonstration.

- Les v.a.r. X_2 et W_2 sont finies. Elles admettent donc chacune un moment d'ordre 2.

On en déduit que X_2 et W_2 admettent une covariance.

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_2, W_2) &= \mathbb{E}(X_2 W_2) - \mathbb{E}(X_2) \mathbb{E}(W_2) \\ &= \mathbb{E}(X_2 W_2) - \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \quad \left(\text{car, d'après 1.a) : } X_2 \hookrightarrow \mathcal{B} \left(2, \frac{1}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. \text{et d'après la question précédente) } \right) \end{aligned}$$

- Il reste à calculer $\mathbb{E}(X_2 W_2)$. Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_2 W_2) &= \sum_{i=0}^2 \left(\sum_{j=1}^2 i j \mathbb{P}([X_2 = i] \cap [W_2 = j]) \right) \\ &= \sum_{j=1}^2 0 \times j \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = j]) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 1 \times j \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = j]) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 2 \times j \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = j]) \end{aligned}$$

Or :

× d'une part :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 j \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = j]) \\ &= 1 \times \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]) \\ &= \frac{4}{9} + 2 \times 0 \quad \left(\text{d'après 7.a) } \right) \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

× d'autre part :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 2 \times j \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = j]) \\ &= 2 \times \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) + 4 \times \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]) \\ &= 2 \times 0 + 4 \times \frac{1}{9} \quad \left(\text{d'après 7.a) } \right) \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{E}(X_2 W_2) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$.

On en déduit : $\text{Cov}(X_2, W_2) = \frac{8}{9} - \frac{8}{9} = 0$.

□

d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'une part, d'après **7.a**) :

$$\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) = 0$$

- D'autre part :

- × d'après **1.b**) : $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

- × d'après **7.b**) : $\mathbb{P}([W_2 = 1]) = \frac{2}{3}$.

D'où :

$$\mathbb{P}([X_2 = 2]) \times \mathbb{P}([W_2 = 1]) \neq 0$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) \neq \mathbb{P}([X_2 = 2]) \times \mathbb{P}([W_2 = 1])$$

Les v.a.r. X_2 et W_2 ne sont donc pas indépendantes.

Commentaire

- Profitons de cette question pour rappeler que deux v.a.r. **discrètes** U et V sont indépendantes (pour la probabilité \mathbb{P}) si :

$$\forall u \in U(\Omega), \forall v \in V(\Omega), \mathbb{P}([U = u] \cap [V = v]) = \mathbb{P}([U = u]) \times \mathbb{P}([V = v])$$

Ainsi, U et V ne sont pas indépendantes si :

$$\exists u \in U(\Omega), \exists v \in V(\Omega), \mathbb{P}([U = u] \cap [V = v]) \neq \mathbb{P}([U = u]) \times \mathbb{P}([V = v])$$

C'est donc la définition qui nous permet de conclure que X_2 et W_2 ne sont pas indépendantes.

- Profitons-en aussi pour rappeler le lien entre covariance et indépendance :

$$U \text{ et } V \text{ indépendantes} \Rightarrow \text{Cov}(U, V) = 0$$

Généralement c'est la contraposée de cet énoncé qui est utilisée.

Elle permet de démontrer que deux v.a.r. U et V ne sont pas indépendantes.

$$\text{Cov}(U, V) \neq 0 \Rightarrow U \text{ et } V \text{ ne sont pas indépendantes}$$

Ce résultat **N'EST PAS** une équivalence.

Les v.a.r. X_2 et W_2 illustrent ce point puisque ces v.a.r. :

- × ne sont pas indépendantes,
- × vérifient $\text{Cov}(X_2, W_2) = 0$.

□

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

8. Déterminer $W_n(\Omega)$.

Démonstration.

- La v.a.r. W_n est à valeurs dans $\llbracket 0, 3 \rrbracket$, car elle prend pour valeur le nombre d'urnes vides parmi les 3 urnes U_1, U_2 et U_3 (après le placement des n premiers jetons). On en déduit : $W_n(\Omega) \subset \llbracket 0, 3 \rrbracket$.
- On peut être plus précis. On se place à partir de cette question 8. dans le cas : $n \geq 3$. On dépose donc, en tout, dans les urnes, au moins 3 jetons. Ainsi, la v.a.r. W_n :
 - × ne peut pas prendre la valeur 3 car, comme plus d'un jeton est placé, les urnes ne peuvent être vides toutes les 3.
 - × peut prendre la valeur 2. C'est par exemple le cas lorsque l'urne 1 reçoit les n premiers jetons.
 - × peut prendre la valeur 1. C'est par exemple le cas lorsque :
 - l'urne 1 reçoit le jeton 1,
 - l'urne 2 reçoit les $n - 1$ jetons suivants.
 - × peut prendre la valeur 0. C'est par exemple le cas lorsque :
 - l'urne 1 reçoit le jeton 1,
 - l'urne 2 reçoit le jeton 2,
 - l'urne 3 reçoit les $n - 2$ jetons suivants.

Ainsi, W_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2. Autrement dit : $W_n(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$.

□

9. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

Commentaire

- Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, la v.a.r. $W_{n,i}$ est un cas particulier de v.a.r. dites *variables aléatoires indicatrices*. On appelle variable aléatoire indicatrice d'un événement A , et on note $\mathbb{1}_A$ la v.a.r. définie par :

$$\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, la v.a.r. $\mathbb{1}_A$ prend la valeur 1 si A est réalisé, et prend la valeur 0 sinon.

- Ici, la v.a.r. $W_{n,1}$ prend la valeur 1 si l'urne 1 est encore vide après le placement des n premiers jetons, et prend la valeur 0 sinon. Autrement dit, la v.a.r. $W_{n,1}$ prend la valeur 1 si l'événement $[X_n = 0]$ est réalisé, et prend la valeur 0 sinon. Ainsi :

$$W_{n,1} = \mathbb{1}_{[X_n=0]}$$

En raisonnant de même, on obtient :

$$W_{n,2} = \mathbb{1}_{[Y_n=0]} \quad \text{et} \quad W_{n,3} = \mathbb{1}_{[Z_n=0]}$$

Commentaire

- Ce type de v.a.r. ne fait pas partie du programme d'ECE. Donnons néanmoins certaines de leurs propriétés.

× Loi de $\mathbb{1}_A$.

- Par définition de $\mathbb{1}_A$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 et 1.
Donc $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$.
- Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in [\mathbb{1}_A = 1] \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in A$$

D'où : $[\mathbb{1}_A = 1] = A$. Ainsi : $\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 1]) = \mathbb{P}(A)$.

On en déduit : $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

× En particulier :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$$

- Il peut aussi être utile de savoir démontrer les propriétés suivantes.

Soient B et C deux événements.

1) $\mathbb{1}_{B \cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$

2) $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1$

Pour la démonstration de la propriété **1)**, on pourra se référer sujet ESSEC-II 2018. La propriété **2)** est démontrée dans une remarque du sujet ESSEC-II 2021.

- a) Démontrer : $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Démonstration.

- Soit $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

Par définition de $W_{n,i}$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 et 1. Donc : $W_{n,i}(\Omega) = \{0, 1\}$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, la v.a.r. $W_{n,i}$ est donc finie. On en déduit qu'elle admet une espérance.

- Commençons par déterminer $\mathbb{E}(W_{n,1})$:

$$\mathbb{E}(W_{n,1}) = \cancel{0 \times \mathbb{P}([W_{n,1} = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([W_{n,1} = 1])$$

Or : L'événement $[W_{n,1} = 1]$ est réalisé \Leftrightarrow l'urne 1 est encore vide après le placement des n premiers jetons
 \Leftrightarrow la v.a.r. X_n prend la valeur 0
 \Leftrightarrow l'événement $[X_n = 0]$ est réalisé

On en déduit : $[W_{n,1} = 1] = [X_n = 0]$. D'où :

$$\mathbb{E}(W_{n,1}) = \mathbb{P}([W_{n,1} = 1]) = \mathbb{P}([X_n = 0]) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (\text{d'après } \mathbf{1.b})$$

- En raisonnant de même, on obtient :

$$\mathbb{E}(W_{n,2}) = \mathbb{P}([W_{n,2} = 1]) = \mathbb{P}([Y_n = 0]) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (\text{d'après } \mathbf{1.b})$$

$$\mathbb{E}(W_{n,3}) = \mathbb{P}([W_{n,3} = 1]) = \mathbb{P}([Z_n = 0]) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (\text{d'après } \mathbf{1.b})$$

Enfinement : $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

□

b) Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

Démonstration.

Démontrons :

$$W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$$

Comme $n \geq 3$, alors au moins l'une des trois urnes contient 1 jeton, et n'est donc pas vide. Ainsi au moins l'une des v.a.r. $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ ou $W_{n,3}$ ne prend pas la valeur 1.

Trois cas se présentent donc.

- si exactement deux v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ prennent la valeur 1, alors :
 - × la v.a.r. $W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$ prend la valeur 2,
 - × la v.a.r. W_n prend la valeur 2.

En effet, si exactement deux v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ prennent la valeur 1, c'est que 2 urnes parmi les 3 sont vides après le placement des n premiers jetons.
- si exactement une v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ prennent la valeur 1, alors :
 - × la v.a.r. $W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$ prend la valeur 1,
 - × la v.a.r. W_n prend la valeur 1.

En effet, si exactement une v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ prennent la valeur 1, c'est que 1 urne parmi les 3 est vide après le placement des n premiers jetons.
- si aucune v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ ne prend la valeur 1, alors :
 - × la v.a.r. $W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$ prend la valeur 0,
 - × la v.a.r. W_n prend la valeur 0.

En effet, si aucune v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ ne prend la valeur 1, c'est qu'aucune urne parmi les 3 n'est vide après le placement des n premiers jetons.

On obtient bien : $W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$

Commentaire

- Comme l'énoncé demande de trouver la relation entre W_n , $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$, mais ne la fournit pas, on peut penser que la simple réponse « $W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$ » (sans justification) permet d'obtenir la majeure partie des points alloués à cette question. Évidemment, si la question s'exprime sous la forme : « Démontrer : $W_n = \dots$ », il faut détailler la réponse.
- Rappelons le résultat de la 1^{ère} remarque de la question 9 :

$$W_{n,1} = \mathbb{1}_{[X_n=0]}, \quad W_{n,2} = \mathbb{1}_{[Y_n=0]}, \quad W_{n,3} = \mathbb{1}_{[Z_n=0]}$$

Ainsi, toujours d'après cette même remarque :

$$W_{n,1} \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}([X_n = 0])), \quad W_{n,2} \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}([Y_n = 0])), \quad W_{n,3} \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}([Z_n = 0]))$$

Grâce à la question 1.b), on obtient :

$$\forall i \in [1, 3], \quad W_{n,i} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

La v.a.r. W_n est donc une somme de v.a.r. suivant une même loi de Bernoulli. On pourrait penser (dans un moment d'égarement) que, par stabilité par somme des lois binomiales : $W_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Il n'en est rien.

Commentaire

- La stabilité par somme des lois binomiales s'énonce ainsi.

Soit $p \in]0, 1[$ et soit $(n_1, \dots, n_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$.

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p), \dots, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p) \\ X_1, \dots, X_k \text{ mutuellement} \\ \text{indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + \dots + n_k, p)$$

Cette propriété ne s'applique pas ici car les v.a.r. $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ ne sont pas mutuellement indépendantes.

- Il est d'ailleurs aisé de constater que W_n ne suit pas la loi $\mathcal{B}\left(3, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Pour cela, on note D_n une v.a.r. de loi $\mathcal{B}\left(3, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Montrons que D_n et W_n n'ont pas même loi.

× D'après la question précédente : $\mathbb{P}([W_n = 3]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

× Cependant : $\mathbb{P}([D_n = 3]) = \binom{3}{3} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{3-3} \neq 0$.

Ainsi : $\mathbb{P}([W_n = 3]) \neq \mathbb{P}([D_n = 3])$. On en déduit que W_n et D_n n'ont pas la même loi. \square

- c) Exprimer alors $\mathbb{E}(W_n)$ en fonction de n .

Démonstration.

- La v.a.r. W_n admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.

La v.a.r. W_n admet une espérance.

- Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_n) &= \mathbb{E}(W_{n,1}) + \mathbb{E}(W_{n,2}) + \mathbb{E}(W_{n,3}) \\ &= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (\text{d'après 9.a}) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(W_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

\square

10. Démontrer : $\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, quelle est la valeur de $\mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2])$?

Démonstration.

- On remarque :

$$[X_n = n] \subset [W_n = 2]$$

En effet, si $[X_n = n]$ est réalisé, c'est que, après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient les n jetons. Les urnes U_2 et U_3 sont donc vides. Après cette répartition, il reste donc 2 urnes vides. Autrement dit, l'événement $[W_n = 2]$ est alors réalisé.

On en déduit :

$$[X_n = n] \cap [W_n = 2] = [X_n = n]$$

Ainsi, d'après **1.b)** :

$$\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = \mathbb{P}([X_n = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{On obtient : } \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

- Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

L'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 2]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X_n = k]$ est réalisé ET l'événement $[W_n = 2]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient exactement k jetons ET 2 urnes sont vides

Ceci n'est jamais réalisé. En effet, après la répartition de n jetons, si l'urne U_1 en contient exactement k , alors les $n-k$ restants ($n-k \geq 1$ car $k \leq n-1$) sont nécessairement dans l'urne U_2 ou l'urne U_3 . Et ainsi il n'y a qu'une seule urne vide au plus (et non 2).

On en déduit :

$$[X_n = k] \cap [W_n = 2] = \emptyset$$

$$\text{On obtient : } \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

□

11. Démontrer : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n}$.

Que vaut $\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 1])$?

Démonstration.

- Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

× Tout d'abord :

L'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X_n = k]$ est réalisé ET l'événement $[W_n = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient exactement k jetons ET exactement 1 urne est vide

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient exactement k jetons ET (l'urne U_2 est vide OU l'urne U_3 est vide)

\Leftrightarrow L'événement $[X_n = k]$ est réalisé ET (l'événement $[W_{n,2} = 1]$ est réalisé OU l'événement $[W_{n,3} = 1]$ est réalisé)

\Leftrightarrow L'événement $[X_n = k] \cap ([W_{n,2} = 1] \cup [W_{n,3} = 1])$ est réalisé

On en déduit :

$$\begin{aligned} [X_n = k] \cap [W_n = 1] &= [X_n = k] \cap ([W_{n,2} = 1] \cup [W_{n,3} = 1]) \\ &= ([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]) \cup ([X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1]) \end{aligned}$$

Or, les événements $[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]$ et $[X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1]$ sont incompatibles. D'où :

$$\mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]) + \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1])$$

× Déterminons $\mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1])$.

L'événement $[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X_n = k]$ est réalisé ET l'événement $[W_{n,2} = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient k jetons ET l'urne U_2 est vide

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient k jetons ET l'urne U_3 contient $n - k$ jetons

- Choisir k jetons parmi les n premiers répartis revient à choisir une partie à k éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. En effet, choisir des jetons est équivalent à choisir leurs numéros. Ainsi, choisir k jetons, c'est choisir k éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On note alors $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, et \mathcal{P}_k^n l'ensemble des parties à k éléments de E . Comme $\text{Card}(E) = \text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) = n$, alors :

$$\text{Card}(\mathcal{P}_k^n) = \binom{n}{k}$$

On note alors $E_1, \dots, E_{\binom{n}{k}}$ les éléments de l'ensemble \mathcal{P}_k^n . Autrement dit, les ensembles $E_1, \dots, E_{\binom{n}{k}}$ sont toutes les parties à k éléments de E .

- Reprenons maintenant l'équivalence :

L'événement $[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient k jetons ET l'urne U_3 contient $n - k$ jetons

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient les jetons indexés par E_1 ET l'urne U_3 contient les jetons indexés par $E \setminus E_1$

OU Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient les jetons indexés par E_2 ET l'urne U_3 contient les jetons indexés par $E \setminus E_2$

\vdots

OU Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient les jetons indexés par $E_{\binom{n}{k}}$ ET l'urne U_3 contient les jetons indexés par $E \setminus E_{\binom{n}{k}}$

On en déduit :

L'événement $[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]$ est réalisé

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \text{L'événement } \bigcap_{i \in E_1} A_i \text{ est réalisé} \quad \text{ET} \quad \text{l'événement } \bigcap_{j \in E \setminus E_1} C_j \text{ est réalisé} \\
 &\text{OU} \quad \text{l'événement } \bigcap_{i \in E_2} A_i \text{ est réalisé} \quad \text{ET} \quad \text{l'événement } \bigcap_{j \in E \setminus E_2} C_j \text{ est réalisé} \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{OU} \quad \text{l'événement } \bigcap_{i \in E \binom{n}{k}} A_i \text{ est réalisé} \quad \text{ET} \quad \text{l'événement } \bigcap_{j \in E \setminus E \binom{n}{k}} C_j \text{ est réalisé} \\
 &\Leftrightarrow \text{L'événement } \left(\bigcap_{i \in E_1} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in E \setminus E_1} C_j \right) \text{ est réalisé} \\
 &\text{OU} \quad \text{l'événement } \left(\bigcap_{i \in E_2} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in E \setminus E_2} C_j \right) \text{ est réalisé} \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{OU} \quad \text{l'événement } \left(\bigcap_{i \in E \binom{n}{k}} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in E \setminus E \binom{n}{k}} C_j \right) \text{ est réalisé} \\
 &\Leftrightarrow \text{L'événement } \bigcup_{\ell=1}^{\binom{n}{k}} \left(\left(\bigcap_{i \in E_\ell} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in E \setminus E_\ell} C_j \right) \right) \text{ est réalisé}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1] = \bigcup_{\ell=1}^{\binom{n}{k}} \left(\left(\bigcap_{i \in E_\ell} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in E \setminus E_\ell} C_j \right) \right)$$

- C'est une union d'événements incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]) = \sum_{\ell=1}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i \in E_\ell} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in E \setminus E_\ell} C_j \right) \right)$$

- De plus, par indépendance des placements des jetons, pour tout $i \in \llbracket 1, \binom{n}{k} \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i \in E_\ell} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in E \setminus E_\ell} C_j \right) \right) &= \prod_{i \in E_\ell} \mathbb{P}(A_i) \times \prod_{j \in E \setminus E_\ell} \mathbb{P}(C_j) \\
 &= \prod_{i \in E_\ell} \frac{1}{3} \times \prod_{j \in E \setminus E_\ell} \frac{1}{3} && \text{(car, pour chaque jeton, le choix de l'urne est équiprobable)} \\
 &= \left(\frac{1}{3} \right)^k \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-k} && \text{(car, par définition de } E \text{ et } E_\ell : \\
 &&& \text{Card}(E_\ell) = k \text{ et} \\
 &&& \text{Card}(E \setminus E_\ell) = n - k) \\
 &= \left(\frac{1}{3} \right)^n
 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]) = \sum_{\ell=1}^{\binom{n}{k}} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

- × Avec un raisonnement tout à fait similaire au point précédent (il suffit d'invertir le rôle de l'urne U_2 et celui de l'urne U_3), on obtient :

$$\mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1]) = \binom{n}{k} \frac{1}{3^n}$$

- × On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) &= \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]) + \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1]) \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{3^n} + \binom{n}{k} \frac{1}{3^n} \quad (\text{avec les points précédents}) \\ &= 2 \binom{n}{k} \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

Finalement : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = 2 \binom{n}{k} \frac{1}{3^n}$.

Commentaire

- Un tel niveau de détail n'était pas attendu. Une explication moins rigoureuse aurait sûrement permis d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- On pouvait par exemple écrire que l'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 1]$ est réalisé si et seulement si, après répartition des n premiers jetons, l'urne 1 contient k jetons et les $n - k$ restants sont tous dans l'urne 2 ou tous dans l'urne 3. On a alors :

- × 2 possibilités pour le numéro de l'urne contenant les $n - k$ jetons restants (l'urne 2 ou l'urne 3),

- × $\binom{n}{k}$ possibilités pour les numéros des k jetons placés dans l'urne 1.

Il y a de plus 3^n possibilités pour placer les n premiers jetons dans les 3 urnes U_1, U_2 et U_3 . Comme le placement s'effectue de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n}$$

- De plus :

L'événement $[X_n = n] \cap [W_n = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X_n = n]$ est réalisé ET l'événement $[W_n = 1]$ est réalisé

\Leftrightarrow Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient exactement n jetons ET exactement 1 urne est vide

Ceci n'est jamais réalisé. En effet, après la répartition de n jetons, si l'urne U_1 en contient exactement n , alors les urnes U_2 et U_3 sont vides. Et ainsi il y a 2 urnes vides (et non 1).

On en déduit :

$$[X_n = n] \cap [W_n = 1] = \emptyset$$

On obtient : $\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 1]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

□

12. Démontrer :

$$\mathbb{E}(X_n W_n) = 2n \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) + \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1])$$

Démonstration.

- Les v.a.r. X_n et W_n sont finies. La v.a.r. $X_n W_n$ l'est donc aussi.

On en déduit que la v.a.r. $X_n W_n$ admet une espérance.

- On rappelle : $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ (car $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$) et $W_n(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ (d'après 8.). Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n W_n) &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^2 k j \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = j]) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\cancel{k \times 0 \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 0])} + k \times 1 \times \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) \right) \\ &\quad + k \times 2 \times \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) \\ &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) + 2 \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) \end{aligned}$$

× D'une part, d'après la question 11. :

$$\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 1]) = 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) \\ &= \cancel{0 \times \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [W_n = 1])} + \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 1]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) + n \times 0 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) \end{aligned}$$

× D'autre part, d'après la question 10. :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) = 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) \\ &= \cancel{0 \times \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [W_n = 2])} + \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \times 0 + n \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) \\ &= n \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n W_n) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) + 2 \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) + 2n \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2])\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X_n W_n) = 2n \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) + \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1])$$

□

13. Démontrer alors : $\mathbb{E}(X_n W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Puis calculer la covariance de X_n et W_n .

Démonstration.

• D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n W_n) &= 2n \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) + \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) \\ &= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} k \times 2 \binom{n}{k} \frac{1}{3^n} \quad (\text{d'après 10. et 11.}) \\ &= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \frac{1}{3^n} \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k}\end{aligned}$$

• Calculons alors : $\sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k}$.

× On commence par remarquer :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Commentaire

• Cette relation classique est à connaître et à savoir démontrer. Il suffit pour cela de calculer $k \binom{n}{k}$ d'une part, et $n \binom{n-1}{k-1}$ d'autre part, à l'aide de la formule des coefficients binomiaux.

• Cette relation peut aussi se démontrer par dénombrement.

Pour ce faire, on considère un ensemble E à n éléments.

(on peut penser à une pièce qui contient n individus)

On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant un élément distingué (on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure un représentant de ces individus).

Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{n}{k}$ possibilités.

On distingue ensuite un élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.

(on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite un représentant de ces individus)

Ainsi, il y a $k \binom{n}{k}$ manières de construire P .

2) On choisit d'abord, dans E , l'élément à distinguer : $\binom{n}{1} = n$ possibilités.

On choisit ensuite $k-1$ éléments dans E qui, pour former P , en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

(on choisit d'abord le représentant puis on lui adjoint un groupe de $k-1$ individus)

Ainsi, il y a $n \binom{n-1}{k-1}$ manières de construire P .

On retrouve ainsi le résultat.

× On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1} n \binom{n-1}{k-1} \\
 &= n \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} && \text{(par décalage d'indice)} \\
 &= n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{n-1} \right) \\
 &= n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} - 1 \right) \\
 &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} - n \\
 &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 1^k 1^{(n-1)-k} - n \\
 &= n (1+1)^{n-1} - n && \text{(par formule du binôme de Newton)} \\
 &= n 2^{n-1} - n
 \end{aligned}$$

• On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_n W_n) &= 2n \frac{1}{3^n} + 2 \frac{1}{3^n} (n 2^{n-1} - n) \\
 &= \cancel{2n \frac{1}{3^n}} + 2n \frac{2^{n-1}}{3^n} - \cancel{2n \frac{1}{3^n}} \\
 &= n \frac{2^n}{3^n}
 \end{aligned}$$

On en déduit : $\mathbb{E}(X_n W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

• Les v.a.r. X_n et W_n sont finies. Elles admettent donc un moment d'ordre 2, et donc une covariance. Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X_n, W_n) &= \mathbb{E}(X_n W_n) - \mathbb{E}(X_n) \mathbb{E}(W_n) \\
 &= n \left(\frac{2}{3}\right)^n - \mathbb{E}(X_n) \mathbb{E}(W_n) && \text{(d'après ce qui précède)} \\
 &= n \left(\frac{2}{3}\right)^n - \cancel{\frac{n}{3}} \times \cancel{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n && \text{(d'après 1.a) et 9.c)} \\
 &= n \left(\frac{2}{3}\right)^n - n \left(\frac{2}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

Finalement : $\text{Cov}(X_n, W_n) = 0$.

□

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\text{Cov}(X_n, W_n) = 0$.
- Or, les v.a.r. X_n et W_n ne sont pas indépendantes. En effet :
 - × d'une part, d'après 11. :

$$\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 1]) = 0$$

× d'autre part :

- d'après 1.b) : $\mathbb{P}([X_n = n]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

- de plus, comme $n \geq 3$: $\mathbb{P}([W_n = 1]) > 0$.

D'où :

$$\mathbb{P}([X_n = n] \times [W_n = 1]) > 0$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 1]) \neq \mathbb{P}([X_n = n]) \times \mathbb{P}([W_n = 1])$$

Les v.a.r. X_n et W_n ne sont donc pas indépendantes.

On obtient un contre-exemple à la réciproque du résultat du cours :
 U et V indépendantes $\Rightarrow \text{Cov}(U, V) = 0$

Commentaire

- On pourrait calculer explicitement $\mathbb{P}([W_n = 1])$ pour démontrer : $\mathbb{P}([W_n = 1]) > 0$. Cela demande un temps conséquent, mais donnons ici les principaux arguments :

1) On remarque : $V_n = [W_n \geq 1]$. Ainsi :

$$V_n = [W_n = 1] \cup [W_n = 2]$$

Par incompatibilité des événements $[W_n = 1]$ et $[W_n = 2]$, on obtient :

$$\mathbb{P}([W_n = 1]) = \mathbb{P}(V_n) - \mathbb{P}([W_n = 2])$$

2) On constate ensuite :

$$[W_n = 2] = [X_n = n] \cup [Y_n = n] \cup [Z_n = n]$$

Or les événements $[X_n = n]$, $[Y_n = n]$ et $[Z_n = n]$ sont incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}([W_n = 2]) = \mathbb{P}([X_n = n]) + \mathbb{P}([Y_n = n]) + \mathbb{P}([Z_n = n]) = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (\text{d'après 1.b})$$

3) En utilisant la question 1.e), on obtient :

$$\mathbb{P}([W_n = 1]) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4) Enfin, il reste à démontrer que cette probabilité est non nulle si $n \geq 3$. Une résolution d'équation démontre qu'elle est non nulle si et seulement si $n \neq 1$.

Commentaire

- Cette démonstration n'est pas exigée. On peut d'ailleurs, sans calcul, se convaincre facilement du résultat : $\mathbb{P}([W_n = 1]) > 0$. En effet :
 - × lors des n premières étapes de l'expérience (placement des n premiers jetons), il y a équiprobabilité des configurations possibles. Ainsi :

$$\mathbb{P}([W_n = 1]) = \frac{\text{nombre de configurations réalisant } [W_n = 1]}{\text{nombre de configurations possibles au total}}$$

- × or il existe bien des configurations réalisant $[W_n = 1]$. Par exemple la configuration :

$$(1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n-1 \text{ fois}})$$

(le jeton 1 est placé dans l'urne 1, le jeton 2 dans l'urne 2, le jeton 3 dans l'urne 2, ..., le jeton n dans l'urne 2)

Comme le nombre de configurations réalisant $[W_n = 1]$ est strictement positif, alors, avec la formule du point précédent, on obtient bien : $\mathbb{P}([W_n = 1]) > 0$. □