EDHEC 2021

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) \ = \ x^3 + y^3 - 3xy$.

Partie 1

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ car elle est polynomiale.}}$$

□

2. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction f admet des dérivées partielles à l'ordre 1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tout d'abord : $\partial_1(f)(x,y) \ = \ 3\,x^2 - 3\,y$.
- Ensuite : $\partial_2(f)(x,y) \ = \ 3\,y^2 - 3\,x$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \partial_1(f) : (x,y) \mapsto 3\,x^2 - 3\,y \\ \partial_2(f) : (x,y) \mapsto 3\,y^2 - 3\,x \end{array}}$$

□

b) Déterminer les points critiques de f.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\begin{array}{c}(x,y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f\end{array} & \Leftrightarrow & \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 3\,x^2 - 3\,y & = & 0 \\ 3\,y^2 - 3\,x & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y & = & 0 \\ x & = & y^2 \end{array} \right. \qquad \textit{(en divisant chaque ligne par } 3 > 0\textit{)} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y^4 - y & = & 0 \\ x & = & y^2 \end{array} \right. \qquad \textit{(en remplaçant } x \textit{ par } y^2 \textit{ dans la } 1^{\text{ère}} \textit{ ligne)} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y\,(y^3 - 1) & = & 0 \\ x & = & y^2 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \quad \texttt{OU} \quad y^3 = 1 \\ x \ = \ y^2 \end{array} \right.
\end{array}$$

Ainsi : (x,y) est un point critique de f $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} y=0 \quad \texttt{OU} \quad y=1 \\ x \ = \ y^2 \end{array}\right.$ *(car $1^3 = 1$ et que la fonction $u \mapsto u^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)*

$$\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \{(0,0), \ (1,1)\}$$

La fonction f admet donc deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.

Commentaire

- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on fait apparaître une équation du type :

$$x = \psi(y)$$

  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
  C'est la stratégie qu'on a adoptée ci-dessus.

□

3. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Démonstration.

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  Elle admet donc des dérivées partielles à l'ordre 2 sur cet ensemble.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tout d'abord :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 6\,x$$

- Ensuite :

$$\partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -3$$

- Or, comme F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'`OUVERT` $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, par théorème de Schwarz :

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) \ = \ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) \ = \ -3$$

- Enfin : $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 6\,y$.

On en déduit : $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,x & -3 \\ -3 & 6\,y \end{pmatrix}$.

Commentaire

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial^2_{2,1}(f)(x,y)$ et $\partial^2_{1,2}(f)(x,y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

□

b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } H &\Leftrightarrow H - \lambda\, I \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(H - \lambda\, I) = 0 \end{aligned}$$

- Dans la suite, notons :

$$H_0 = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_1 = \nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Vérifions tout d'abord si f admet unextremum en $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \det\Big(H_0 - \lambda\, I\Big) &= \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (-\lambda)^2 - (-3)^2 \\ &= \big(-\lambda - (-3)\big)\,\big(-\lambda + (-3)\big) \\ &= (3-\lambda)\,(-3-\lambda) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } H_0 \text{ admet pour valeurs propres } 3 \text{ et } -3.}$$

> La matrice $\nabla^2(f)(0,0)$ admet deux valeurs propres distinctes non nulles et de singes opposés. On en déduit que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ (qui est un point selle).

- Vérifions maintenant si f admet unextremum en $(1,1)$:

$$\begin{aligned} \det\Big(H_1 - \lambda\, I\Big) &= \det\left(\begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (6-\lambda)^2 - (-3)^2 \\ &= \big((6-\lambda) - (-3)\big)\,\big((6-\lambda) + (-3)\big) \\ &= (9-\lambda)\,(3-\lambda) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } H_1 \text{ admet pour valeurs propres } 3 \text{ et } 9.}$$

> La matrice $\nabla^2(f)(1,1)$ admet deux valeurs propres distinctes qui sont toutes les deux strictement positives. On en déduit qu'au point $(1,1)$, f admet un minimum local qui a pour valeur :
> $f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 = -1.$

□

4. Cet extremum est-il global ?

Démonstration.

- Remarquons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

$\boxed{\text{On en déduit que } -1 \text{ n'est pas un minimum global de la fonction } f.}$

Commentaire

- Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :
  - × « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
  - × « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
  - × « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »
  - × « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
  - × « La suite (un) est-elle majorée ? »

  la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).
- Il s'agit donc ici de démontrer que f n'admet pas de minimum local au point $(1,1)$. Autrement dit, il faut démontrer que f prend des valeurs strictement plus faibles que -1, valeur atteinte en $(1,1)$.
  Pour ce faire, il est classique :
  - × de fixer une variable (y par exemple) en lui donnant une valeur arbitraire (on choisit souvent $y_0 = 0$ ou $y_0 = 1$ pour simplifier la suite),
  - × de déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$.
    Si l'une de ces limites est $-\infty$, cela signifie que f prend forcément des valeurs plus faibles que -1.
- Il était aussi possible d'exhiber un point (x_0, y_0) tel que :

$$f(x_0,y_0) \ < \ f(1,1)$$

  On pouvait par exemple remarquer : $f(-2,0) = (-2)^3 = -8 < -1$.

□

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \ = \ f(x,1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.

Démonstration.
Soit n un entier supérieur ou égal à 4. On considère ici la fonction $g : x \mapsto f(x,1) = x^3 - 3x + 1$.

- La fonction g est une fonction polynomiale (de degré 2).
  Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \ = \ 3\,x^2 - 3 = 3\ (x^2-1) = 3\ (x-1)\,(x+1)$$

Par l'étude du signe d'un trinôme, on en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

× $x^3 - 3x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

× $x^3 - 3x + 1 \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$,

× $g(-1) = (-1)^3 - 3\,(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$,

× $g(-1) = (1)^3 - 3 + 1 = -1$.

On remarque en particulier : $\forall x \leqslant 1$, $g(x) \leqslant 3$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } n \geqslant 4\text{, l'équation } g(x) = n \text{ ne peut avoir de solution que sur l'intervalle } [1, +\infty[.}$$

- La fonction g est :

  × continue sur $[1, +\infty[$,

  × strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g\big([1, +\infty[\big)$. Or :

  $$g\big([1, +\infty[\big) \ = \ [-1, +\infty[$$

  Comme $n \in [-1, +\infty[$, l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in [1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = n \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R} \text{ notée } u_n.}$$

□

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.

a) Déterminer le tableau de variations de h^{-1}.

Démonstration.
D'après le théorème de la bijection, la fonction $h^{-1} : [-1, +\infty[\to [1, +\infty[$ admet sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ les mêmes variations que la fonction h sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	-1		$+\infty$
Variations de h^{-1}	1	$\nearrow$	$+\infty$

□

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration.

- Par définition : $h(u_n) = n$. On en déduit, en appliquant h^{-1} de part et d'autre :

$$\begin{array}{ccc} h^{-1}\big(h(u_n)\big) & = & h^{-1}(n) \\ \shortparallel & & \\ u_n & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x) + \infty.}$$

□

c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha}$.

Démonstration.

- Par définition : $h(u_n) = n$. Autrement dit :

$$u_n^3 - 3\,u_n + 1 = n$$

- Comme $u_n \in [1, +\infty[$, $u_n \neq 0$ et on obtient, en divisant par $u_n^3 \neq 0$:

$$\frac{n}{u_n^3} = 1 - \frac{3}{u_n^2} + \frac{1}{u_n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

(car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^3 = +\infty$ d'après la question précédente)

- On en conclut : $u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

$$\boxed{\text{Ou encore : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}.}$$

Commentaire

- La **Partie 2** consiste en l'étude de la suite (u_n). On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \geqslant 4$, u_n est l'unique solution de l'équation $g(x) = n$ sur $\mathbb{R}$

  On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction g ou plutôt de $h = g_{|[1,+\infty[}$ puisque l'équation $g(x) = n$ n'a de solution que sur $[1, +\infty[$.

- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \geqslant 4,\ h(u_m) = m}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (u_n). On l'utilise en ***6.b)*** pour en déduire la limite de (u_n) et en ***6.c)*** pour trouver un équivalent de cette suite. □

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \leqslant 0$, alors : $f(x) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $x > 0$, alors : $f(x) = \dfrac{2}{x^3}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme f est nulle en dehors de $]0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx$$
  - × La fonction f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
  - × Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\, dx$ est convergente.
    Soit $A \in\,]0, 1]$.
$$\int_{A}^{1} f(x)\, dx = \int_{A}^{1} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]_{A}^{1} = \exp(-1) - \exp\left(-\frac{1}{A^2}\right)$$
    Or, comme $\displaystyle\lim_{A \to 0} -\frac{1}{A^2} = -\infty$, alors : $\displaystyle\lim_{A \to 0} \exp\left(-\frac{1}{A^2}\right) = 0$.
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{0}^{1} f(x)\, dx \text{ est donc convergente et vaut } \mathrm{e}^{-1}.}$$
  - × Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.
    Soit $B \in [1, +\infty[$.
$$\int_{1}^{B} f(x)\, dx = \left[\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]_{1}^{B} = \exp\left(-\frac{1}{B^2}\right) - \exp(-1)$$
    Or, comme $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} -\frac{1}{B^2} = 0$, alors : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \exp\left(-\frac{1}{B^2}\right) = \mathrm{e}^0 = 1$.
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{1}^{B} f(x)\, dx \text{ est donc convergente et vaut } 1 - \mathrm{e}^{-1}.}$$

× On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; \cancel{e^{-1}} + 1 - \cancel{e^{-1}} \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge et vaut } 1.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc une densité de probabilité.}}$$

□

b) On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $Y(\Omega) =]0, +\infty[$.

$$\boxed{Y(\Omega) =]0, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) =]0, +\infty[$). D'où :

$$F(x) \;=\; \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  × si $x > 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F(x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt & \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,dt & \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Soit $A \in]0, x]$.

$$\int_A^x f(t)\,dt \;=\; \left[\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]_A^x \;=\; \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{A^2}\right) \underset{A\to 0}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

- Profitons-en pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
  Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

  Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.

Commentaire

- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq\ ]-\infty,+\infty[$.
  En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble des valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}([X = x]) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on se permet d'écrire :

  « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0,1]$. »

  × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
  On se permet alors d'écrire :

  « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient par une disjonction de cas).

□

2. a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

Démonstration.

- La fonction g est continue :
  × sur $]-\infty,1[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]1,+\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto x^3$ qui :
    - est continue sur $]1,+\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 1.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × <u>si $x < 1$</u>, alors : $g(x) = 0 \geqslant 0$.
  × <u>si $x \geqslant 1$</u>, alors : $g(x) = \dfrac{2}{x^3} \geqslant 0$ (car $x \geqslant 0$).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0.}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx$ converge et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx \ = \ \int_{1}^{+\infty} g(x)\ dx$$
  - × La fonction g est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g(x)\ dx$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
  - × Soit $B \in [1, +\infty[$.
$$\int_{1}^{B} g(x)\ dx \ = \ \int_{1}^{B} \frac{2}{x^3}\ dx \ = \ \left[-\frac{1}{x^2} \right]_1^B \ = \ -\frac{1}{B^2} + 1 \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } g \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou $x < 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $X(\Omega) = [1, +\infty[$.

$$\boxed{X(\Omega) = [1, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x < 1$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) = [1, +\infty[$). D'où :
$$G(x) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  - × si $x \geqslant 1$, alors :
$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{x} g(t)\ dt \\ &= \int_{1}^{x} g(t)\ dt && \textit{(car } g \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\ &= \left[-\frac{1}{x^2} \right]_1^x \\ &= -\frac{1}{x^2} + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

□

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $X_i(\Omega) = [1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{D'où : } M_n(\Omega) \subset [1, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 1$, alors $[M_n \leqslant x] = \varnothing$ (car $M_n(\Omega) \subset [1, +\infty[$). D'où :

$$G_n(x) = \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\Big) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_i \leqslant x]\big) && \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\ &= \Big(\mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)\Big)^n && \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \\ &= \big(G(x)\big)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n && \textit{(d'après \textbf{2.b)}, car } x \geqslant 1\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

Commentaire

Remarquons que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a bien exprimé $G_n(x)$ en fonction de $G(x)$ au cours du calcul :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ G_n(x) = \big(G(x)\big)^n$$

Notons que cette relation est aussi valide sur $]-\infty, 1[$. En effet, pour tout $x \in]-\infty, 1[$:

$$\big(G(x)\big)^n = 0^n = 0 = G_n(x)$$

Ainsi, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = \big(G(x)\big)^n$.

□

b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) \ = \ \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

Démonstration.

- On note $h_n : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ de sorte que : $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}} = h_n(M_n)$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} Y_n(\Omega) & = & \big(h_n(M_n)\big)(\Omega) \\ & = & h_n\big(M_n(\Omega)\big) \\ & \subset & h_n([1,+\infty[) \qquad \textit{(car } M_n(\Omega) \subset [1,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

  Or, comme h_n est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on a :

$$h_n([1,+\infty[) \ = \ \left[h_n(1), \lim_{x\to+\infty} h_n(x)\right[\ = \ \left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_n(\Omega) \subset \left[\tfrac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y_n(\Omega) \subset [1,+\infty[$). D'où :

$$F_n(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} F_n(x) & = & \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant x]\big) \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{M_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right]\right) \\ & = & \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x\sqrt{n}]\big) \qquad \textit{(car } \sqrt{n} > 0\textit{)} \\ & = & G_n(x\sqrt{n}) \\ & = & \left(1 - \dfrac{1}{(x\sqrt{n})^2}\right)^n \qquad \textit{(car, comme } x \geqslant \tfrac{1}{\sqrt{n}}\textit{, alors : } x\sqrt{n} \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \left(1 - \dfrac{1}{n\,x^1}\right)^n \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ \left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.}$$

□

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in]-\infty, 0]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $x < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors, d'après la question précédente : $F_n(x) = 0$.
On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0], \ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0}$$

□

5. a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

Démonstration.
Soit $n > \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor$.

- On commence par démontrer : $x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
  - × Comme n est un entier, alors :
  $$n \ \geqslant \ \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor + 1$$
  - × Or, par définition de la partie entière : $\left\lfloor \dfrac{1}{x^2} \right\rfloor + 1 > \dfrac{1}{x^2}$. Donc, par transitivité :

$$\begin{array}{rccll} & n & \geqslant & \dfrac{1}{x^2} & \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{n} & \leqslant & x^2 & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{ainsi} & \sqrt{\dfrac{1}{n}} & \leqslant & x & \textit{(par croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \text{alors} & \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \leqslant & x & \end{array}$$

- Comme $x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, d'après ***3.b)*** :

$$F_n(x) \ = \ \left(1 - \frac{1}{n\,x^2}\right)^n$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x > \left\lfloor \tfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor, \ F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n\,x^2}\right)^n.}$$

□

b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

$$\boxed{\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u}$$

Soit $x > 0$.

- Soit $n > \left\lfloor \dfrac{1}{x^2} \right\rfloor$. D'après la question précédente :

$$F_n(x) \ = \ \left(1 - \frac{1}{n\,x^2}\right)^n \ = \ \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n\,x^2}\right)\right)$$

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n\,x^2} = 0$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right) & \underset{n\to+\infty}{\sim} & -\dfrac{1}{n\,x^2} \\ \text{donc} \quad n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right) & \underset{n\to+\infty}{\sim} & -n\,\dfrac{1}{n\,x^2} \\ \text{d'où} \quad n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right) & \underset{n\to+\infty}{\sim} & -\dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$.

- Par continuité de la fonction exp en $-\dfrac{1}{x^2}$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right)\right) & = & \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \\ \shortparallel & & \\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x > 0,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).}$$

□

6. Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- si $x \leqslant 0$, alors, d'après ***4.*** :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \ = \ 0$$

Or, d'après ***1.b*** ; comme $x \leqslant 0$, alors : $F(x) = 0$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \ = \ F(x)$$

- si $x > 0$, alors, d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \ = \ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \ = \ F(x)$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Y.}$$

□

Exercice 3

On considère un nombre réel a élément de $]0,1[$ et l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Donner les valeurs propres de M_a.

b) Déterminer les sous espaces propres associés à ces valeurs propres.

c) En déduire que M_a n'est pas diagonalisable.

2. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.

a) Quelle est la dimension de E ?

b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $J\,K^2$ puis en déduire $(M_a - I)\,(M_a - aI)^2$.

c) En déduire que M_a^3 appartient à E.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_a^n \ = \ u_n\, M_a^2 + v_n\, M_a + w_n\, I$$

On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.

b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script **Scilab** qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle « for ».

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
a = input('entrez une valeur pour a : ')
u = 0
v = 0
w = 1
for k = 1:n
u = (2 ⋆ a + 1) ⋆ u + v
v = -a ⋆ (a + 2) ⋆ u + w
w = a ⋆ a ⋆ u
end
disp(w, v, u)
```

c) Modifier la boucle de ce script en conséquence.

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (2a+1)\,u_{n+2} - a\,(a+2)\,u_{n+1} + a^2\,u_n$.

On **admet** que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n \ = \ \frac{(n-1)\,a^n - n\,a^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$$

5. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A. Il en résulte (et on admet ce résultat) :

$$\lim_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to+\infty} w_n\right) I$$

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

b) En déduire la limite L_a lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Vérifier : $L_a^2 = L_a$.

6. On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a.
Démontrer :

a) $\forall x \in \mathrm{Ker}\,(f_a - \mathrm{id}),\ \varphi_a(x) = x$.

b) $\forall x \in \mathrm{Im}\,(f_a - \mathrm{id}),\ \varphi_a(x) = 0$.

Problème

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :
Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.
On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».
On note E l'événement « Il y a perpétuellement égalité ».
On note G (resp. H) l'événement « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement « A (resp. B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. X (respectivement Y) prend pour valeur le rang du premier Pile obtenu.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ (respectivement } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)).}$$

- Dans la suite, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons :

$$\begin{array}{rcl} P_i^A & : & \text{« le joueur } A \text{ a obtenu Pile lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage »} \\ P_i^B & : & \text{« le joueur } B \text{ a obtenu Pile lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage »} \\ C & : & \text{« la première manche dure éternellement »} \end{array}$$

On introduit de manière similaire les événements F_i^A et F_i^B. On a alors :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événement } C \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{La première manche dure éternellement} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{cccc} & A \text{ obtient Face au } 1^{\text{er}} \text{ tirage} & \texttt{ET} & B \text{ obtient Face au } 1^{\text{er}} \text{ tirage} \\ \texttt{ET} & A \text{ obtient Face au } 2^{\text{ème}} \text{ tirage} & \texttt{ET} & B \text{ obtient Face au } 2^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ \texttt{ET} & A \text{ obtient Face au } 3^{\text{ème}} \text{ tirage} & \texttt{ET} & B \text{ obtient Face au } 3^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ & \vdots & & \vdots \end{array} \\ \Leftrightarrow & \qquad A \text{ obtient Face éternellement} \quad \texttt{ET} \quad B \text{ obtient Face éternellement} \\ \Leftrightarrow & \qquad \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} F_i^A \text{ est réalisé} \quad \texttt{ET} \quad \bigcap\limits_{j=1}^{+\infty} F_i^B \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{C = \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^B\right)}$$

- Remarquons alors :

$$C \ = \ \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^B\right) \ \subset \ \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A$$

donc $$\mathbb{P}(C) \ = \ \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^B\right) \right) \ \leqslant \ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right)$$ *(par croissance de l'application $\mathbb{P}$)*

Or, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) \ = \ \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i^A\right)$$

Et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i^A\right) &= \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\left(F_i^A\right) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= \prod_{i=1}^{m} p \\ &= p^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } p \in]0,1[\textit{)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$0 \ \leqslant \ \mathbb{P}(C) \ \leqslant \ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) = 0$$

On en conclut : $\mathbb{P}(C) = 0$. Il est donc quasi-impossible que la première manche dure éternellement.

□

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

Démonstration.

L'événement E_1 est réalisé

$\Leftrightarrow$ Il y a égalité à la fin de la 1ère manche

$\Leftrightarrow$ Les deux joueurs ont obtenu leur premier Pile lors du même lancer

$\Leftrightarrow$ Les v.a.r. X_1 et Y_1 prennent la même valeur

$\Leftrightarrow$ L'événement $[X_1 = Y_1]$ est réalisé

$$\boxed{E_1 \ = \ [X_1 = Y_1]}$$

Commentaire

- Donner le résultat permet de démontrer la compréhension et ainsi d'obtenir tous les points alloués à la question. La précédente rédaction est mise en avant pour permettre la bonne compréhension des mécanismes en jeu.
- On pouvait aussi remarquer :

L'événement E_1 est réalisé $\Leftrightarrow$ Les v.a.r. X_1 et Y_1 prennent la même valeur

$\Leftrightarrow$ Il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $[X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$ est réalisé

Cela permet de conclure : $E_1 = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$.

□

c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\, \mathbb{P}([Y_1 = i])$ et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(E_1)$ en fonction de p et q.

Démonstration.
La famille $\big([X_1 = i] \big)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
On en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_1 = Y_1] \big) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [X_1 = Y_1] \big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [i = Y_1] \big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \big) \times \mathbb{P}\big([Y_1 = i] \big) \qquad \textit{(par indépendance des lancers)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) \ = \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \big) \times \mathbb{P}\big([Y_1 = i] \big)}$$

Commentaire

Si la question précédente peut paraître difficile de premier abord, la lecture de cette question éclaire quant au résultat que nous étions censés trouver en question précédente. On peut en effet, au brouillon, opérer par rétro-ingénierie pour trouver le résultat à démontrer en question précédente. Il est ici demandé de démontrer :

$$\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\, \mathbb{P}([Y_1 = i])$$

Or, par indépendance :

$$\mathbb{P}([X_1 = i])\, \mathbb{P}([Y_1 = i]) \ = \ \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [Y_1 = i] \big)$$

Finalement, on doit démontrer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [Y_1 = i] \big) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i] \right) \qquad \textit{(la somme de probabilités doit faire penser à la probabilité d'une réunion !)}
\end{aligned}$$

Démontrer : $E_1 = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$ permet de démontrer l'égalité au-dessus. Cette question fournit donc, à quelques manipulations près, la réponse à la question précédente.

Évidemment, il ne s'agit pas de rédiger la question ***1.c)*** en indiquant : « d'après la question suivante ... ». En revanche, on ne peut reprocher à un candidat d'exploiter au maximum les informations fournies par le sujet. Il est donc conseillé de bien lire le sujet afin de vérifier si l'énoncé d'une question ne fournit pas la réponse à une question précédente.

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(E_1) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big)\,\mathbb{P}\big([Y_1 = i]\big) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p\,q^{i-1} \times p\,q^{i-1} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & p^2 \sum\limits_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} & \\
& = & p^2 \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \big(q^2\big)^{i-1} & \\
& = & p^2 \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \big(q^2\big)^{i} & \\
& = & p^2 \dfrac{1}{1-q^2} & \textit{(d'après la formule de la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]0,1[\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \frac{p^2}{1-q^2}}$$

- Enfin, on remarque :

$$\begin{array}{rcl}
1 - q^2 & = & 1 - (1-p)^2 \\
& = & 1 - (1 - 2\,p + p^2) \\
& = & \cancel{1} - \cancel{1} + 2\,p - p^2 \\
& = & p\,(2-p) \\
& = & p\,\big(1 + (1-p)\big) \ = \ p\,(1+q)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(E_1) = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{p}\,(1+q)} = \frac{p}{1+q}.}$$

□

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

Démonstration.

- Les joueurs A et B jouent avec deux pièces identiques. De plus, le jeu auquel il participe est le même pour chaque joueur notamment car les lancers de pièces sont effectués de manière simultanée. Les rôles des joueurs A et B sont donc parfaitement symétriques (on pourrait échanger les noms de ces joueurs sans que cela ne modifie le problème). Ainsi, le joueurs A et B ont même probabilité de gagner la $1^{\text{ère}}$ manche.

$$\boxed{\text{On en déduit que les événements } G_1 \text{ et } H_1 \text{ sont équiprobables.}}$$

- À la fin de la $1^{\text{ère}}$ manche, seules trois situations sont possibles :
  - × le joueur A gagne la $1^{\text{ère}}$ manche. Autrement dit, l'événement G_1 est réalisé.
  - × le joueur B gagne la $1^{\text{ère}}$ manche. Autrement dit, l'événement H_1 est réalisé.
  - × il y a égalité lors de la $1^{\text{ère}}$ manche. Autrement dit, l'événement E_1 est réalisé.

  Ces trois événements sont de plus 2 à 2 incompatibles car il n'y a qu'un gagnant en fin de $1^{\text{ère}}$ manche et s'il y a égalité c'est qu'il n'y a pas de gagnant.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } \big(E_1, G_1, H_1\big) \text{ est un système complet d'événements.}}$$

- En particulier, on a donc :

$$\begin{array}{lrcl} & \mathbb{P}(E_1)+\mathbb{P}(G_1)+\mathbb{P}(H_1) & = & 1 \\ \text{donc} & \mathbb{P}(E_1)+2\,\mathbb{P}(G_1) & = & 1 \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(G_1)=\mathbb{P}(H_1)\textit{)} \\ \text{ainsi} & \mathbb{P}(G_1) & = & \frac{1}{2}\,\big(1-\mathbb{P}(E_1)\big) \\ & & = & \frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{1+q}\right) \\ & & = & \frac{1}{2}\left(\frac{(1+q)-p}{1+q}\right) \\ & & = & \frac{1}{2}\left(\frac{(1-p)+q}{1+q}\right) \;=\; \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}\,q}{1+q}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut, à l'aide de la question précédente : } \mathbb{P}(G_1) \;=\; \frac{q}{1+q}.}$$

Commentaire

- La manière de procéder dans cette question est particulièrement intéressante car elle permet d'obtenir le résultat sans avoir à effectuer de calculs.
- Il est aussi possible de démontrer ce résultat de manière plus calculatoire. On remarque tout d'abord :

$$G_1 = [X_1 < Y_1]$$

Comme $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X_1<Y_1]\big) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1=k]\cap[X_1<Y_1]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1=k]\cap[k<Y_1]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1=k]\big)\times\mathbb{P}\big([k<Y_1]\big) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } Y_1 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{k-1}\times(1-p)^k & \textit{(}\mathbb{P}\big([Y_1>k]\big)=(1-p)^k \textit{ car } Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ & = & p\,(1-p)\,\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k-2} & \\ & = & p\,q\,\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\big((1-p)^2\big)^{k-1} & \\ & = & p\,q\,\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\big(q^2\big)^k & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & p\,q\,\frac{1}{1-q^2} & \\ & = & \cancel{p}\,q\,\frac{1}{\cancel{p}\,(1+q)} & \end{array}$$

□

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n < Y_n]$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$. Remarquons :

L'événement G_n est réalisé

$\Leftrightarrow$ Le joueur A gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche

$\Leftrightarrow$ Il y a égalité à la fin de la $1^{\text{ère}}$ manche
ET il y a égalité à la fin de la $2^{\text{ème}}$ manche
$\vdots$ $\vdots$
ET il y a égalité à la fin de la $(n-1)^{\text{ème}}$ manche
ET le joueur A obtient Pile avant le joueur B lors de la $n^{\text{ème}}$ manche

$\Leftrightarrow$ L'événement E_1 est réalisé
ET l'événement E_2 est réalisé
$\vdots$ $\vdots$
ET l'événement E_{n-1} est réalisé
ET l'événement $[X_n < Y_n]$ est réalisé *(le rang d'apparition du 1^{er} Pile du joueur A est strictement inférieur au rang d'apparition du 1^{er} Pile du joueur B)*

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k \cap [X_n < Y_n]$ est réalisé

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ G_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap [X_n < Y_n]}$$

□

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$.

- Par des arguments similaires à la question ***1.c)***, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k) &= \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}\big([X_k = Y_k]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}\big([X_k = i]\big) \times \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}\big([Y_k = i]\big) && \textit{(par la formule des probabilités totales)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([Y_1 = i]\big) && (*) \\
&= \mathbb{P}(E_1) && \textit{(d'après la question 1.c))}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1)}$$

- Pour valider le résultat précédent, il faut encore démontrer $(*)$:
$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}\big([X_k = i]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big)$$
Soit $i \in \mathbb{N}^*$.
  × Si l'événement $E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}$ est réalisé, c'est qu'il y a égalité entre les joueurs A et B lors $(k-1)^{\text{ère}}$ manches du jeu.
  × Dans ce cas, l'expérience consiste en une succession infine d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité que le joueur A obtienne Pile).
  × Dans ce cas, la v.a.r. X_k prend pour valeur le rang du premier succès de l'expérience.

  On en conclut que la loi conditionnelle de X_k sachant l'événement $E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}$ est la loi géométrique de paramètre p ($\mathcal{G}(p)$).

  En particulier, comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:
$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}\big([X_k = i]\big) \ = \ p\,(1-p)^{i-1} \ = \ \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big)}$$

Commentaire

- Cette première partie de la question semble assez ardue pour peu que l'on souhaite faire les choses correctement. Il est difficile de savoir quel était le niveau de détail attendu.
La formulation de la question :
$$\text{« calculer } \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) \text{ »}$$
laisse penser qu'il fallait détailler l'explication et ne pas se contenter de l'affirmation : $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1)$.
- Dans l'énoncé, il est précisé que les tirages sont indépendants. Pour autant, cela ne signifie pas que les manches le sont. Le résultat d'une manche dépend du résultat de la manche précédente pour la bonne raison qu'une manche n'est jouée que si toutes les précédentes ont abouti à une égalité. En particulier, les événements $E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}$ et E_k ne sont pas indépendants. On peut tout aussi bien démontrer que les événements de la famille $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas indépendants. Par exemple, les événements E_1 et E_2 ne sont pas indépendants.

  Les événements E_1 et E_2 sont indépendants
$$\begin{array}{lll}
\Leftrightarrow & \mathbb{P}\big(E_1 \cap E_2\big) \ = \ \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2) & \\
\Leftrightarrow & \mathbb{P}(E_2) \ = \ \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2) & \textit{(car } E_1 \cap E_2 = E_2 \textit{ puisque } E_2 \subset E_1 \ (*)\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 1 \ = \ \mathbb{P}(E_1) \times 1 & \textit{(car } \mathbb{P}(E_2) \neq 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 1 \ = \ \dfrac{p}{1+q} & \\
\Leftrightarrow & 1 + q \ = \ p & \\
\Leftrightarrow & 1 + (1-p) \ = \ p & \\
\Leftrightarrow & 2 \ = \ 2\,p & \\
\Leftrightarrow & 1 \ = \ p &
\end{array}$$
  Comme $p \in \,]0,1[$, on en conclut bien que E_1 et E_2 ne sont pas indépendants.

  $(*)$ Démontrons enfin $E_2 \subset E_1$.
Supposons E_2 réalisé. Il y a donc égalité lors de la $2^{\text{ème}}$ manche. En particulier, la $2^{\text{ème}}$ manche est jouée. Cela démontre qu'il y a eu égalité lors de la manche précédente.
Ainsi, l'événement E_1 est réalisé.

- Soit $n \geqslant 2$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(G_n) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [X_n < Y_n]\right) \\
= \ & \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-2}}(E_{n-1}) \times \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) && \textit{(par la formule des probabilités composées)} \\
= \ & \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) && \textit{(d'après le point précédent)} \\
= \ & \Big(\mathbb{P}(E_1)\Big)^{n-1} \times \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big)
\end{aligned}$$

- Comme $\big([X_n = i]\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n = i] \cap [X_n < Y_n]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n = i] \cap [i < Y_n]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n = i]\big) \times \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([i < Y_n]\big) && \textit{(car } X_n \textit{ et } Y_n \textit{ sont indépendantes)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([i < Y_1]\big) && \textit{(d'après le point } (*) \textit{ précédent)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [i < Y_1]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [X_1 < Y_1]\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big([X_1 < Y_1]\big) = \mathbb{P}(G_1) && \textit{(par la formule des probabilités totales)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) = \mathbb{P}(G_1).}$$

- On déduit de ce qui précède que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_n) &= \Big(\mathbb{P}(E_1)\Big)^{n-1} \times \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) \\
&= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}}$$

□

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

Démonstration.

- D'une part : $\mathbb{P}(G_1) = \dfrac{q}{1+q}$ d'après la question ***1.d)***.
- D'autre part : $\left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{1-1} \dfrac{q}{1+q} = \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{0} \dfrac{q}{1+q} = \dfrac{q}{1+q}$.

$$\boxed{\text{Le résultat précédent est valable pour } n = 1.}$$

□

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul : $\mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

L'événement G est réalisé

$\Leftrightarrow$ Le joueur A gagne lors de la $1^{\text{ère}}$ manche
`OU` le joueur A gagne lors de la $2^{\text{ème}}$ manche
$\vdots$ $\vdots$
`OU` le joueur A gagne lors de la $k^{\text{ème}}$ manche
$\vdots$ $\vdots$

$\Leftrightarrow$ L'événement G_1 est réalisé
`OU` l'événement G_2 est réalisé
$\vdots$ $\vdots$
`OU` l'événement G_k est réalisé
$\vdots$ $\vdots$

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} G_k$ est réalisé

$$\boxed{G \ = \ \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k}$$

- Remarquons que pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $i \neq j$, on a :

$$G_i \cap G_j = \varnothing$$

En effet, le joueur A ne peut gagner la partie lors de deux manches différentes (d'ailleurs la partie s'arrête lors de la victoire d'un joueur).

- Ensuite :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(G) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} G_k\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k) & \textit{(car $(G_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{k-1} \dfrac{q}{1+q} & \\
& = & \dfrac{q}{1+q} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \dfrac{q}{1+q} \dfrac{1}{1-\left(\frac{p}{1+q}\right)} & \textit{(en reconnaissant la somme d'une série de raison $\frac{p}{1+q} \in \,]0,1[$)} \\
& = & \dfrac{q}{1+q} \dfrac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}} & \\
& = & \dfrac{q}{\cancel{1+q}} \dfrac{\cancel{1+q}}{(1-p)+q} & \\
& = & \dfrac{q}{q+q} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(G) = \dfrac{q}{2\,q} = \dfrac{1}{2}.}$$

□

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que le ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $\mathbb{P}(E) = 0$.

Démonstration.
On procède comme en question ***1.d)***.

- Les rôles des joueurs A et B sont parfaitement symétriques. Ainsi, le joueurs A et B ont même probabilité de gagner le jeu.

$$\boxed{\text{On en déduit que les événements } G \text{ et } H \text{ sont équiprobables.}}$$

Commentaire

Ce qui est accepté en question ***1.d)*** doit l'être aussi ici. Cependant, la formulation de la question est ici bien différente et il est donc possible qu'une autre réponse soit attendue. Afin de déterminer $\mathbb{P}(H)$, il est aussi possible de suivre la démarche des questions ***2.a)b)c)d)***. Plus précisément, on démontre :

× $\forall n \geqslant 2,\ H_n = \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap [X_n > Y_n]$,

× $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n > Y_n]\big) = \mathbb{P}(H_1)$,

× $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(H_n) = \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1} \dfrac{q}{1+q}$,

× $H = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} H_k$,

× $\mathbb{P}(H) = \dfrac{1}{2}$.

- Lors de la partie, seules trois situations sont possibles :
  - × le jeu ne prend jamais fin car il y a égalité à chaque manche ou car une manche dure éternellement. Autrement dit, l'événement E est réalisé.
  - × le jeu a pris fin et le joueur A a remporté la partie. Autrement dit, l'événement G est réalisé.
  - × le jeu a pris fin et le joueur B a remporté la partie. Autrement dit, l'événement H est réalisé.

  Ces trois événements sont de plus 2 à 2 incompatibles car s'il y a égalité il n'y a pas de gagnant et s'il y a un gagnant en fin de partie, il ne peut y en avoir qu'un seul.

  $$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (E, G, H) \text{ est un système complet d'événements.}}$$

- En particulier, on a donc :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H) = 1 \\ \text{donc} \quad & \mathbb{P}(E) + 2\,\mathbb{P}(G) = 1 && \textit{(car } \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(H)\textit{)} \\ \text{ainsi} \quad & \mathbb{P}(E) = 1 - 2\,\mathbb{P}(G) = 1 - 2\,\frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(E) = 0.}$$

□

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. a) À l'aide du système complet d'événements $\big([X_1 = i]\big)_{i \in \mathbb{N}^*}$, montrer : $\mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) = \dfrac{pq}{1+q}$.

Démonstration.
Comme $\big([X_1 = i]\big)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [Y_1 = X_1 + 1]\big) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [Y_1 = i + 1]\big) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([Y_1 = i + 1]\big) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } Y_1 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{i-1} \times p\,(1-p)^{i} \\ &= p^2\,(1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{2i-2} \\ &= p^2\,q \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} && \textit{(car } q = 1 - p\textit{)} \\ &= p^2\,q \sum_{i=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i} && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= p^2\,q\,\frac{1}{1-q^2} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]0,1[\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) = p^{\cancel{2}}\,q\,\frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} = \frac{pq}{1+q}.}$$

□

b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

Démonstration.

- Notons D l'événément : « l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart ». On a alors :

L'événement D est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart

$\Leftrightarrow$ Le joueur A gagne par un lancer d'écart
OU Le joueur B gagne par un lancer d'écart

$\Leftrightarrow$ Le joueur A obtient Pile un lancer avant le joueur B
OU le joueur B obtient Pile un lancer avant le joueur A

$\Leftrightarrow$ L'événement $[Y_1 = X_1 + 1]$ est réalisé
OU l'événement $[X_1 = Y_1 + 1]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $[Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1]$ est réalisé

$$\boxed{\text{On en déduit : } D = [Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1].}$$

- Par ailleurs, comme $\big([Y_1 = i]\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_1 = Y_1 + 1]\big) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y_1 = i] \cap [X_1 = Y_1 + 1]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y_1 = i] \cap [X_1 = i + 1]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([X_1 = i + 1]\big) && \textit{(car } Y_1 \textit{ et } X_1 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} p\ (1-p)^{i-1} \times p\ (1-p)^{i} \\
&= \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) && \textit{(en reconnaissant le calcul de la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_1 = Y_1 + 1]\big) = \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big)}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([Y_1 - X_1 = 1] \cup [Y_1 - X_1 = -1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([Y_1 - X_1 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([Y_1 - X_1 = -1]\big) && \textit{(car les événements } [Y_1 - X_1 = 1] \textit{ et } [Y_1 - X_1 = -1] \textit{ sont incompatibles)} \\
&= \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = Y_1 + 1]\big) \\
&= 2\,\mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) \\
&= 2\,\frac{pq}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u = \mathbb{P}(D) = 2\,\frac{pq}{1+q}}$$

Commentaire

- En question **3.a)**, il est demandé de déterminer $\mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big)$. Or :

$$[Y_1 = X_1 + 1] \ = \ [Y_1 - X_1 = 1]$$

Présenté ainsi, on comprend que cette question n'est rien d'autre qu'une illustration de la technique premettant de calculer la loi d'une somme (en l'occurrence différence) de v.a.r. .

- En question **4.a)**, il est demandé de déterminer $\mathbb{P}(D)$. Or :

$$D \ = \ [Y_1 - X_1 = 1] \cup [Y_1 - X_1 = -1] \ = \ [\,|Y_1 - X_1| \, = 1]$$

Présenté ainsi, on comprend que cette question n'est rien d'autre qu'une illustration de la technique premettant de calculer la loi d'une somme (en l'occurrence différence) de v.a.r. .

□

4. a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $K_1 = [\,|Y_1 - X_1| \, = 1]$.
- Soit $n \geqslant 2$. Remarquons :

L'événement K_n est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart

$\Leftrightarrow$ Il y a égalité à la fin de la $1^{\text{ère}}$ manche
`ET` il y a égalité à la fin de la $2^{\text{ème}}$ manche
$\vdots$ $\vdots$
`ET` il y a égalité à la fin de la $(n-1)^{\text{ème}}$ manche
`ET` l'un des deux joueurs obtient Pile un lancer avant l'autre lors de la $n^{\text{ème}}$ manche

$\Leftrightarrow$ L'événement E_1 est réalisé
`ET` l'événement E_2 est réalisé
$\vdots$ $\vdots$
`ET` l'événement E_{n-1} est réalisé
`ET` l'événement $[\,|Y_n - X_n| \, = 1]$ est réalisé *(les rangs d'apparitions du 1^{er} Pile des deux joueurs diffèrent de 1)*

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k \cap [\,|Y_n - X_n| \, = 1]$ est réalisé

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ K_n \ = \ \bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [\,|Y_n - X_n| \, = 1]}$$

□

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(K_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***3.b)*** : $\mathbb{P}(K_1) = u = 2\,\dfrac{pq}{1+q}$.
- Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(K_n) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k \cap [\,|Y_n - X_n| = 1]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k\right)\ \mathbb{P}_{E_1\cap\ldots\cap E_{n-1}}\big([\,|Y_n - X_n| = 1]\big) & \text{(par la formule des probabilités composées)} \\
& = & \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1}\ \mathbb{P}_{E_1\cap\ldots\cap E_{n-1}}\big([\,|Y_n - X_n| = 1]\big) & \text{(d'après la question 2.b)} \\
& = & \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1}\ \mathbb{P}\big([\,|Y_1 - X_1| = 1]\big) & \text{(en mettant en place un raisonnement similaire à celui de la question 2.b))} \\
& = & 2\,p\left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1}\ \dfrac{q}{1+q} & \text{(d'après la question 3.d))} \\
& = & 2\,p\ \mathbb{P}(G_n) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{En remarquant que cette formule est valide au rang 1, on conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(K_n) = 2\,p\ \mathbb{P}(G_n).}$$

□

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Démonstration.

- Tout d'abord, par des arguments similaires à la question ***2.d)*** :

$$K = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(K) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} K_j\right) & \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(K_j) & \text{(car } (K_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \text{ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
& = & 2\,p \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_j) & \text{(d'après la question précédente)} \\
& = & 2\,p\ \mathbb{P}(G) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(K) = 2\,p\mathbb{P}(G) = 2\,p\frac{1}{2} = p.}$$

□

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'geom', p)` permet à **Scilab** de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = input('entrez une valeur pour p : ')
c = 1
X = grand(1, 1, 'geom', p)
Y = grand(1, 1, 'geom', p)
while X == Y
    X = ----
    Y = ----
    c = ----
end
if X < Y then ----
         else ----
end
disp(c)
```

Démonstration.

```
p = input('entrez une valeur pour p : ')
c = 1
X = grand(1, 1, 'geom', p)
Y = grand(1, 1, 'geom', p)
while X == Y
    X = grand(1, 1, 'geom', p)
    Y = grand(1, 1, 'geom', p)
    c = c + 1
end
if X < Y then
    disp('Le joueur A emporte la partie')
else
    disp('Le joueur B emporte la partie')
end
disp(c)
```

□

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
if ----- then disp('A gagne le deuxième jeu') else ----- end
```

Démonstration.

```
if abs(X-Y) == 1 then
    disp('A gagne le deuxième jeu')
else
    disp('B gagne le deuxième jeu')
end
```

□