EDHEC 2021

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) \ = \ x^3 + y^3 - 3xy$$

Partie 1

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Déterminer les points critiques de f.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

4. Cet extremum est-il global ?

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \ = \ f(x, 1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.

a) Déterminer le tableau de variations de h^{-1}.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{\alpha}$.

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. ***a)*** Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

b) On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.

2. ***a)*** Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou $x < 1$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. ***a)*** Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

Exercice 3

On considère un nombre réel a élément de $]0,1[$ et l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Donner les valeurs propres de M_a.

b) Déterminer les sous espaces propres associés à ces valeurs propres.

c) En déduire que M_a n'est pas diagonalisable.

2. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.

a) Quelle est la dimension de E ?

b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $J\,K^2$ puis en déduire $(M_a - I)\,(M_a - aI)^2$.

c) En déduire que M_a^3 appartient à E.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_a^n \; = \; u_n\, M_a^2 + v_n\, M_a + w_n\, I$$

On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.

b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script **Scilab** qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle « for ».

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
a = input('entrez une valeur pour a : ')
u = 0
v = 0
w = 1
for k = 1:n
u = (2 * a + 1) * u + v
v = -a * (a + 2) * u + w
w = a * a * u
end
disp(w, v, u)
```

c) Modifier la boucle de ce script en conséquence.

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (2a+1)\,u_{n+2} - a\,(a+2)\,u_{n+1} + a^2\,u_n$.

On **admet** que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n \; = \; \frac{(n-1)\,a^n - n\,a^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$$

5. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A. Il en résulte (et on admet ce résultat) :

$$\lim_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to+\infty} w_n\right) I$$

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

b) En déduire la limite L_a lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Vérifier : $L_a^2 = L_a$.

6. On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a.
Démontrer :

a) $\forall x \in \mathrm{Ker}\,(f_a - \mathrm{id})$, $\varphi_a(x) = x$.

b) $\forall x \in \mathrm{Im}\,(f_a - \mathrm{id})$, $\varphi_a(x) = 0$.

Problème

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :
Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1$^{\text{er}}$ pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.
On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».
On note E l'événement « Il y a perpétuellement égalité ».
On note G (resp. H) l'événement « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement « A (resp.B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\,\mathbb{P}([Y_1 = i])$ et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(E_1)$ en fonction de p et q.

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n \leqslant Y_n]$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(G_n) \ = \ \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \ \frac{q}{1+q}$$

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul : $\mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{2}$.

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que le ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $\mathbb{P}(E) = 0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. *a)* À l'aide du système complet d'événements $([X_1 = i])_{i\in\mathbb{N}^*}$, démontrer : $\mathbb{P}\left([Y_1 = X_1 + 1]\right) = \dfrac{pq}{1+q}$.

b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

4. *a)* Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(K_n)$.

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'geom', p)` permet à **Scilab** de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = input('entrez une valeur pour p : ')
c = 1
X = grand(1, 1, 'geom', p)
Y = grand(1, 1, 'geom', p)
while X == Y
    X = ----
    Y = ----
    c = ----
end
if X < Y then ----
         else ----
end
disp(c)
```

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
if ----- then disp('A gagne le deuxième jeu') else ----- end
```