ECRICOME 2021

Exercice 1

Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E.
Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M\,(M + I_3)\,(M + 2\,I_3) \ = \ 0_3$$

Partie A : Exemple de matrices appartenant à $\mathscr{A}$

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que : $\alpha\, I_3 \in \mathscr{A}$.

Démonstration.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\alpha\, I_3 \in \mathcal{A} \quad & \Leftrightarrow \quad \alpha\, I_3\ (\alpha\, I_3 + I_3)\ (\alpha\, I_3 + 2\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow \quad (\alpha\, I_3) \times \big((\alpha+1)\, I_3\big) \times \big((\alpha+2)\, I_3\big) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow \quad \alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\, I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow \quad \alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2) = 0 \qquad \textit{(car } I_3 \textit{ inversible)} \\
& \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \texttt{OU} \ \alpha = -1 \ \texttt{OU} \ \alpha = -2
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des réels α tels que $\alpha\, I_3 \in \mathscr{A}$ est : $\{0, -1, -2\}$.

□

2. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Démonstration.
D'après la question précédente : $-I_3 \in \mathscr{A}$.
Cependant, toujours d'après la question précédente : $-(-I_3) = I_3 \notin \mathscr{A}$.

On en déduit que l'ensemble $\mathscr{A}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Commentaire

- Lorsqu'on résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :
  - « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
  - « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
  - « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »
  - « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
  - « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

  la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

Commentaire

- Pour montrer qu'un ensemble F n'est pas un sous-espace vectoriel de E, on pourra, dans cet ordre :
  1) vérifier : $0_E \notin F$ (si $0_E \in F$, on essaie de vérifier le point suivant)
  2) exhiber un vecteur $u \in F$ tel que $-u \notin F$ (si on ne parvient pas à trouver un tel vecteur u, on essaie de démontrer le point suivant)
  3) exhiber deux vecteurs $(u, v) \in F^2$ tels que $u + v \notin F$

□

3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B\,X_1$ et $B\,X_2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$B\,X_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\,X_1$$

$$\boxed{B\,X_1 = -2\,X_1}$$

- Ensuite :

$$B\,X_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_2$$

$$\boxed{B\,X_2 = -X_2}$$

□

b) En déduire deux valeurs propres de B.
Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Démonstration.

- On sait :
  × $X_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$,
  × $B\,X_1 = -2\,X_1$.

  On en déduire que -2 est valeur propre de B
  (et X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre -2).

- On a aussi :
  × $X_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$,
  × $B\,X_2 = -X_2$.

  On en déduit que -1 est valeur propre de B
  (et X_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre -1).

- Déterminons $E_{-2}(B)$ le sous-espace propre de B associé à la valeur propre -2.

  Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
U \in E_{-2}(B) & \Longleftrightarrow & (B + 2\, I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \Longleftrightarrow & \{\ x = y - z
\end{array}$$

  On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(B) & = & \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid B\,U = -2\,U\} \ = \ \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y - z\} \\[4mm]
& = & \{\begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\[4mm]
& = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est :

  × génératrice de $E_{-2}(B)$,

  × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{-2}(B).}$$

- Déterminons $E_{-1}(B)$ le sous-espace propre de B associé à la valeur propre -1.
  Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
U \in E_{-1}(B) & \Longleftrightarrow & (B + I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_1 \leftarrow L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ & - & y & = & -z \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & - & y & = & -z \end{array} \right. \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & & y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-1}(B) & = & \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid B\,U = -U\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\} \\[4pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[4pt]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ = \ \mathrm{Vect}\,(X_2)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F}_{-1} = (X_2)$ est :
  × génératrice de $E_{-1}(B)$,
  × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{F}_{-1} = (X_2) \text{ est une base de } E_{-1}(B).}$$

Commentaire

- On pouvait, dès la fin de la détermination de $\mathcal{F}_2$ conclure quant à la diagonalisabilité de B et déterminer une base de $\mathcal{F}_{-1}$ sans calcul supplémentaire. Détaillons cette rédaction.
  × La famille $\mathcal{F}_{-2}$ est une base de $E_{-2}(B)$. D'où :
  $$\dim\big(E_{-2}(B)\big) \;=\; \text{Card}(\mathcal{F}_{-2}) \;=\; 2$$
  × De plus, comme X_2 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1 : $\text{Vect}\,(X_2) \subset E_{-1}(B)$. En particulier :
  $$\dim\big(E_{-1}(B)\big) \;\geqslant\; \dim\big(\text{Vect}\,(X_2)\,\big) = 1$$
  × On sait alors :
  - d'une part :
  $$\dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) \;\geqslant\; 3$$
  - d'autre part, comme B est une matrice carrée d'ordre 3 :
  $$\dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) \;\leqslant\; 3$$

  Ainsi : $\dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) = 3$. On en conclut que :
  - $\text{Sp}(B) = \{-2, -1\}$ (la matrice B n'admet pas d'autres valeurs propres que -2 et -1).
  - la matrice B est diagonalisable.
  - $\dim\big(E_{-1}(B)\big) = 1$.

  × La famille (X_2) est donc :
  - une famille libre de $E_{-1}(B)$ car constituée uniquement d'un vecteur non nul de $E_{-1}(B)$,
  - telle que : $\text{Card}\big((X_2)\big) = 1 = \dim\big(E_{-1}(B)\big)$

  C'est donc une base de $E_{-1}(B)$.
- Ce n'est cependant pas la méthode que l'on choisit de présenter puisque la démonstration de la diagonalisabilité de B est demandée seulement en question suivante.

□

c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F}_{-2}$ est une base de $E_{-2}(B)$. D'où :
$$\dim\big(E_{-2}(B)\big) \;=\; \text{Card}(\mathcal{F}_{-2}) \;=\; 2$$
De même, la famille $\mathcal{F}_{-1}$ est une base de $E_{-1}(B)$. D'où :
$$\dim\big(E_{-1}(B)\big) \;=\; \text{Card}(\mathcal{F}_{-1}) \;=\; 1$$
On en déduit :
$$\dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) \;=\; 3$$

Comme B est une matrice carrée d'ordre 3, on en déduit que B est diagonalisable.

- Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $B = P\,D\,P^{-1}$.
  Plus précisément :
  - × la matrice P est obtenue par concaténation de bases de sous-espaces propres de B,
  - × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

  En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a donc : $B = P\,D\,P^{-1}$.

□

d) Démontrer que $D \in \mathscr{A}$, puis que $B \in \mathscr{A}$.

Démonstration.

- On calcule :

$$(D + I_3)\,(D + 2\,I_3) \; = \; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ainsi :

$$D\,(D + I_3)\,(D + 2\,I_3) \; = \; D \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \; = \; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

  On en déduit : $D \in \mathscr{A}$.

- D'après le point précédent : $D\,(D + I_3)\,(D + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$D\,(D + I_3)\,D + 2\,I_3) \; = \; (D^2 + D)\,(D + 2\,I_3) \; = \; D^3 + 3\,D^2 + 2\,D$$

  De plus, d'après la question précédente : $B = PDP^{-1}$. Donc : $D = P^{-1}BP$. D'où :

$$(P^{-1}BP)^3 + 3\,(P^{-1}BP)^2 + 2\,(P^{-1}BP) \; = \; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

- Or, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P^{-1}\,B\,P)^n = P^{-1}\,B^n\,P$. En particulier :

$$\begin{array}{llll}
 & P^{-1}\,B^3\,P + 3\,P^{-1}\,B^2\,P + 2\,P^{-1}\,B\,P & = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \\
\text{donc} & P^{-1}\,(B^3 + 3\,B^2 + 2\,B)\,P & = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \\
\text{d'où} & (B^3 + 3\,B^2 + 2\,B)\,P & = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à gauche par } P\textit{)} \\
\text{ainsi} & B^3 + 3\,B^2 + 2\,B & = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\
\text{alors} & B\,(B + I_3)\,(B + 2\,I_3) & = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en effectuant le même calcul qu'au point précédent)}
\end{array}$$

  On en déduit : $B \in \mathscr{A}$.

□

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
Démontrer : $M \in \mathscr{A}$.

Démonstration.

- Comme la matrice M est diagonalisable, il existe :
  - × une matrice R inversible,
  - × une matrice Δ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M,

  telles que : $M = R\,\Delta\,R^{-1}$.
  On remarque que, si on parvient à démontrer que $\Delta \in \mathscr{A}$, alors, avec le même raisonnement qu'en question précédente, on pourra conclure : $M \in \mathscr{A}$.
- On a supposé : $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{0, -1, -2\}^3$ tel que :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- Démontrons : $\Delta \in \mathscr{A}$.
  - × Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \Delta\,(\Delta + I_3)\,(\Delta + 2\,I_3) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\,(\lambda_1+1)\,(\lambda_1+2) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\,(\lambda_2+1)\,(\lambda_2+2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\,(\lambda_3+1)\,(\lambda_3+2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  - × Soit $i \in [\![1, 3]\!]$. Par définition de λ_i, on a : $\lambda_i \in \{0, -1, -2\}$. D'où :

$$\lambda_i = 0 \;\texttt{OU}\; \lambda_i + 1 = 0 \;\texttt{OU}\; \lambda_i + 2 = 0$$

    Donc : $\lambda_i\,(\lambda_i + 1)\,(\lambda_i + 2) = 0$.

  On en conclut : $\Delta\,(\Delta + I_3)\,(\Delta + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. D'où : $\Delta \in \mathscr{A}$.

$$\boxed{\text{En raisonnant comme dans les 2 derniers points de la question précédente, on obtient : } M \in \mathscr{A}.}$$

□

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathscr{A}$

Soit M une matrice appartenant à $\mathscr{A}$. On note $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M.

5. Déterminer un polynôme annulateur de M, et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

Démonstration.

- Comme $M \in \mathscr{A}$, alors :

$$M\,(M + I_3)\,(M + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\text{Le polynôme } Q(X) = X\,(X+1)\,(X+2) \text{ est donc un polynôme annulateur de } M.}$$

- Ainsi : $\mathrm{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, -1, -2\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}}$$

Commentaire

- Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de M alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de M puisque :
$$(\alpha\, Q)(M) \ = \ \alpha\, Q(M) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
Cela suffit à démontrer que M possède une infinité de polynômes annulateurs.
On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de M puisqu'on a alors :
$$R(M) \ = \ (M - 5\, I_3)\, Q(M) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de M. Si c'était le cas, M aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre. □

6. On suppose dans cette question que M admet 0, -1 et -2 comme valeurs propres.
Justifier que M est diagonalisable.

Démonstration.
On sait :
× $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
× M possède 3 valeurs propres distinctes.

On en déduit que M est diagonalisable. □

7. a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M.
Justifier que M et $M + 2\, I_3$ sont inversibles, puis démontrer : $M = -I_3$.

Démonstration.
- Comme -1 est l'unique valeur propre de M, alors 0 et -2 ne sont pas valeurs propres de M.

On en déduit que M et $M + 2\, I_3$ sont inversibles.

- Comme $M \in \mathscr{A}$:
$$\begin{array}{llcll} & M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \\ \text{donc} & (M+I_3)\,(M+2\,I_3) & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à gauche par } M^{-1}\textit{)} \\ \text{d'où} & M+I_3 & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à droite par } (M+2\,I_3)^{-1}\textit{)} \end{array}$$

Finalement : $M = -I_3$. □

b) Que peut-on dire de M si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\text{Sp}(M) = \{0\}$?

Démonstration.

- Si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$, alors M et $M + I_3$ sont inversibles.
  Comme $M \in \mathscr{A}$, on a toujours : $M\,(M + I_3)\,(M + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

  En multipliant à gauche l'égalité successivement par M^{-1} puis $(M + I_3)^{-1}$, on obtient : $M = -2\,I_3$.

- Si $\text{Sp}(M) = \{0\}$, alors $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles.
  Comme $M \in \mathscr{A}$, on a toujours : $M\,(M + I_3)\,(M + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

  En multipliant à droite l'égalité successivement par $(M + 2\,I_3)^{-1}$ puis $(M + I_3)^{-1}$, on obtient : $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$\square$

8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.
Justifier que les matrices M, $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

Démonstration.

- Comme M n'admet aucune valeur propre, alors 0, -1 et -2 ne sont pas valeurs propres de M.

  On en déduit que M, $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles.

- Comme $M \in \mathscr{A}$:

$$\begin{array}{rrcll} & M\,(M + I_3)\,(M + 2\,I_3) & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \\ \text{donc} & (M + I_3)\,(M + 2\,I_3) & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à gauche par } M^{-1}\textit{)} \\ \text{d'où} & M + 2\,I_3 & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à gauche par } (M + I_3)^{-1}\textit{)} \\ \text{ainsi} & I_3 & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant par } (M + 2\,I_3)^{-1}\textit{)} \end{array}$$

  Absurde !

  On en déduit que M admet au moins une valeur propre.

$\square$

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.
On traite ici le cas où $\text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).
On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable, et on suppose donc que M ne l'est pas. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est M. On note enfin id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

a) Démontrer :

$$(f + \text{id}) \circ (f + 2\,\text{id}) \; = \; 0 \qquad \text{et} \qquad (f + 2\,\text{id}) \circ (f + \text{id}) \; = \; 0$$

Commentaire

La notation « 0 » de l'énoncé est ici un peu malheureuse puisqu'elle symbolise **l'endomorphisme** nul (et non le réel 0). Dans la suite, on privilégiera la notation $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ pour éviter toute confusion.

Démonstration.

- Comme $M \in \mathscr{A}$:
$$M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) \;=\; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
Comme de plus $\mathrm{Sp}(M) = \{-1,-2\}$, alors 0 n'est pas valeur propre de f. On en déduit que M est inversible.
Ainsi, en multipliant à gauche l'égalité précédente par M^{-1}, on obtient :
$$(M+I_3)\,(M+2\,I_3) \;=\; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
De plus, M est la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$.
$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation, on en déduit donc : } (f+\mathrm{id})\circ(f+2\,\mathrm{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.}$$
- On remarque :
  - × d'une part :
$$(M+I_3)\,(M+2\,I_3) \;=\; M^2+3\,M+2\,I_3$$
  - × d'autre part :
$$(M+2\,I_3)\,(M+I_3) \;=\; M^2+3\,M+2\,I_3$$

  Ainsi :
$$(M+2\,I_3)\,(M+I_3) \;=\; (M+I_3)\,(M+2\,I_3)$$
$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation, on obtient : } (f+2\mathrm{id})\circ(f+\mathrm{id}) = (f+\mathrm{id})\circ(f+2\,\mathrm{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.}$$
□

b) Démontrer : $\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big) \geqslant 1$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id})\big) \geqslant 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme M est une matrice représentative de f, alors :
$$\mathrm{Sp}(f) \;=\; \mathrm{Sp}(M) \;=\; \{-1,-2\}$$
- On en déduit :
$$\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}) \;=\; E_{-1}(f) \;\neq\; \{0_{\mathbb{R}^3}\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id}) \;=\; E_{-2}(f) \;\neq\; \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$
$$\boxed{\text{D'où : } \dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big) \geqslant 1 \text{ et } \dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id})\big) \geqslant 1.}$$
□

c) En utilisant que M n'est pas diagonalisable, démontrer :
$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big) \;=\; 1 \qquad \text{et} \qquad \dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \;=\; 1$$

Démonstration.

- On sait que :
  - × $\mathrm{Sp}(f) = \{-1,-2\}$,
  - × la matrice M n'est pas diagonalisable, donc l'endomorphisme f non plus.

  On en déduit :
$$\dim\big(E_{-1}(f)\big) + \dim\big(E_{-2}(f)\big) \;<\; \dim(\mathbb{R}^3)$$

Ainsi :

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \ < \ 3$$

Or la dimension d'un espace vectoriel est un entier. On en conclut :

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \ \leqslant \ 2$$

- Par ailleur, d'après la question précédente :

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \ \geqslant \ 2$$

On en déduit :

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \ = \ 2$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme chacun des termes de la somme de gauche appartient à } \mathbb{N}^*\text{, on déduit :}\\ \dim\big(\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})\big) = 1 \text{ et } \dim\big(\operatorname{Ker}(f+2\,\mathrm{id}))\big) = 1.\end{array}}$$

□

d) Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.
Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2.

(i) Justifier que (u, v) forme une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.
La famille (u, v) est la concaténation de deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres **distinctes**. Ils forment donc une famille libre.

$$\boxed{\text{La famille } (u, v) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

□

(ii) Soit w un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\operatorname{Vect}(u, v)$.
Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$. Ainsi :

$$\lambda_3 \cdot w \ = \ -\lambda_1 \cdot u - \lambda_2 \cdot v$$

  × Démontrons par l'absurde : $\lambda_3 = 0$.
  Supposons : $\lambda_3 \neq 0$. Alors :

$$w \ = \ -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot u - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot v$$

  On en déduit : $w \in \operatorname{Vect}(u, v)$. Absurde !
  D'où : $\lambda_3 = 0$.

  × En reprenant $(*)$, on obtient :

$$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$$

  Or, d'après la question précédente, la famille (u, v) est libre. On en déduit :

$$\lambda_1 \ = \ \lambda_2 \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{La famille } (u, v, w) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille (u, v, w) est :
  - × libre,
  - × de cardinal : $\text{Card}\big((u, v, w)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u, v, w) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}\big((u, v, w)\big) = 3$).
- $\text{Vect}\,(u, v, w)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u, v, w). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u, v, w) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\big(\text{Vect}\,(u, v, w)\big)}$ et $\cancel{\dim((u, v, w))}$ n'ont aucun sens !

☐

(iii) En utilisant le fait que $\Big((f + \text{id}) \circ (f + 2\,\text{id})\Big)(w) = 0$ et $\Big((f + 2\,\text{id}) \circ (f + \text{id})\Big) = 0$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(w) + 2\,w \ = \ \alpha\, u \qquad \text{et} \qquad f(w) + w \ = \ \beta\, v$$

En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v, et aboutir à une contradiction.

Commentaire

Encore une fois, la notation « 0 » de cette question est ambiguë. Il s'agit ici du vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ (et non du réel 0 ou de l'endomorphisme nul comme en question ***9.a)***). Dans la suite, comme dans les questions précédentes, on utilisera la notation $0_{\mathbb{R}^3}$ pour éviter toute confusion.

Démonstration.

- D'après la question ***9.a)*** : $(f + \text{id}) \circ (f + 2\,\text{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. En particulier :

$$\begin{array}{rrcl} & \Big((f + \text{id}) \circ (f + 2\,\text{id})\Big)(w) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{c'est-à-dire} & (f + \text{id})\Big((f + 2\,\text{id})(w)\Big) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{ou encore} & (f + \text{id})\big(f(w) + 2\,w\big) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

  On en déduit : $f(w) + 2\,w \in \text{Ker}(f + \text{id}) = E_{-1}(f)$.
- Démontrons alors : $E_{-1}(f) = \text{Vect}\,(u)$.
  La famille (u) est :
  - × une famille libre de $E_{-1}(f)$ car constituée uniquement d'un vecteur non nul. En effet, comme u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1, alors $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $u \in E_{-1}(f)$.
  - × de cardinal : $\text{Card}\big((u)\big) = 1 = \dim\big(E_{-1}(f)$ (d'après la quesion ***9.c)***).

  C'est donc une base de $E_{-1}(f)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_{-1}(f) = \text{Vect}\,(u).}$$

- On obtient : $f(w) + 2\,w \in \text{Vect}\,(u)$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(w) + 2\,w = \alpha\, u.}$$

- On reprend le même raisonnement. D'après la question ***9.a)*** : $(f + 2\,\text{id}) \circ (f + \text{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. En particulier :

$$\begin{array}{rrcl} & \Big((f+2\,\text{id}) \circ (f+\text{id})\Big)(w) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{c'est-à-dire} & (f+2\,\text{id})\Big((f+\text{id})(w)\Big) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{ou encore} & (f+2\,\text{id})\big(f(w)+w\big) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

On en déduit : $f(w) + w \in \text{Ker}(f + 2\,\text{id}) = E_{-2}(f)$.

- Démontrons alors : $E_{-2}(f) = \text{Vect}\,(v)$.
  La famille (v) est :
  × une famille libre de $E_{-2}(f)$ car constituée uniquement d'un vecteur non nul. En effet, comme v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2, alors $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $v \in E_{-2}(f)$.
  × de cardinal : $\text{Card}\,\big((v)\big) = 1 = \dim\big(E_{-2}(f)$ (d'après la quesion ***9.c)***).
  C'est donc une base de $E_{-2}(f)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_{-2}(f) = \text{Vect}\,(v).}$$

- On obtient : $f(w) + w \in \text{Vect}\,(v)$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(w) + w = \beta\, v.}$$

- On sait donc :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} f(w) & + & 2\,w & = & \alpha\, u \\ f(w) & + & w & = & \beta\, v \end{array}\right. \quad \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} & & w & = & \alpha\, u - \beta\, v \\ f(w) & + & w & = & \beta\, v \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{On obtient : } w = \alpha\, u - \beta\, v.}$$

- On en déduit : $w \in \text{Vect}\,(u, v)$. Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } M \text{ est diagonalisable.}}$$

□

10. Montrer alors que pour tout matrice M de E :

$$M \in \mathscr{A} \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Cette implication a été démontrée en question ***4.***

($\Rightarrow$) Supposons $M \in \mathscr{A}$.
- D'après la question ***5.***, on a déjà : $\text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$.
- Démontrons que la matrice M est diagonalisable. Trois cas se présentent :
  × si M admet 3 valeurs propres distinctes, alors, d'après la question ***6.***, la matrice M est diagonalisable.
  × si M admet exactement 2 valeurs propres distinctes, alors, d'après la question ***9.***, la matrice M est diagonalisable.

× si M admet exactement 1 valeur propre, alors, d'après la question ***7.*** :

$$M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \ \texttt{OU} \ M = -I_3 \ \texttt{OU} \ M = -2\,I_3$$

Dans ces 3 cas, la matrice M est diagonale, et donc diagonalisable.

De plus, d'après la question ***8.***, il n'est pas possible que M n'admette aucune valeur propre.

On a donc bien démontré :

$$M \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad M \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } M \in \mathscr{A} \Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.}$$

□

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt, \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. a) Démontrer : $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \to 0}{\sim} \ln(t)$.

Démonstration.
On remarque :

$$\frac{\frac{\cancel{\ln(t)}}{1+t^n}}{\cancel{\ln(t)}} = \frac{1}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \to 0}{\sim} \ln(t).}$$

□

b) Démontrer : $\forall y \in\,]0,1]$, $\displaystyle\int_y^1 \ln(t)\, dt = -1 + y - y\ln(y)$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ converge et déterminer sa valeur.

Démonstration.

- Soit $y \in\,]0,1]$.
On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclrcl} u(t) & = & \ln(t) & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v'(t) & = & 1 & v(t) & = & t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[y,1]$.
On obtient :

$$\begin{aligned} \int_y^1 \ln(t)\, dt &= \left[\, t\ln(t)\, \right]_y^1 - \int_y^1 \frac{1}{t}\, t\, dt \\ &= \cancel{1\ln(1)} - y\ln(y) - \int_y^1 1\, dt \\ &= -y\ln(y) - \left[\, t\, \right]_y^1 \\ &= -y\ln(y) - (1-y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall y \in\,]0,1],\ \int_y^1 \ln(t)\, dt = -1 + y - y\ln(y).}$$

- On sait de plus :
  - × d'une part : $\lim\limits_{y \to 0} y = 0$,
  - × d'autre part, par croissances comparées : $\lim\limits_{y \to 0} y \ln(y) = 0$.

$$\boxed{\begin{gathered}\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^1 \ln(t)\, dt \text{ est convergente et :}\\ \int_0^1 \ln(t)\, dt = -1 + 0 - 0 = -1.\end{gathered}}$$

□

c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ est donc uniquement impropre en 0.
- Ensuite :
  - × $\forall t \in\,]0,1]$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \leqslant 0$ et $\ln(t) \leqslant 0$. On en déduit :
  $$\forall t \in\,]0,1], \quad -\frac{\ln(t)}{1+t^n} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad -\ln(t) \geqslant 0$$
  - × d'après ***1.a)*** : $-\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \to 0}{\sim} -\ln(t)$.
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ est convergente d'après la question précédente. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\, dt$ l'est donc aussi.
  (on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par un réel non nul)

  Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ est convergente. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ l'est aussi.

$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } J_n \text{ est donc convergente.}}$$

Commentaire

- Vérifier et citer les hypothèses d'un théorème avant son utilisation est **indispensable**.
- Dans cette question, on a donc pris garde au signe des intégrandes en jeu avant d'appliquer le critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues **positives**. Ces intégrandes étant négatives sur l'intervalle d'intégration $]0,1]$, on applique le critère d'équivalence à leurs opposées (qui sont bien positives sur $]0,1]$).

□

2. a) Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left(t^{\frac{3}{2}} \ \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$t^{\frac{3}{2}} \ \frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{\frac{3}{2}} \ \frac{\ln(t)}{t^n} = \frac{\ln(t)}{t^{n-\frac{3}{2}}}$$
- Or, comme $n \geqslant 2$, alors : $n - \dfrac{3}{2} \geqslant \dfrac{1}{2} > 0$. Ainsi, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{n-\frac{3}{2}}} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t\to+\infty} \left(t^{\frac{3}{2}} \ \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right) = 0.}$$

□

b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- Ensuite :
  × d'après **2.a)** : $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$.
  × $\forall t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$.
  × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2} > 1$). Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } K_n \text{ est donc convergente.}}$$

□

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
- De plus :
  × d'après la question **1.**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est convergente.
  × d'après la question **2.**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est convergente.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } I_n \text{ est donc convergente.}}$$

□

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in \,]0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n \ln(t)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$. Soit $t \in \,]0,1]$. Deux cas se présentent.

- Si $t = 1$, alors :
  - × d'une part : $\dfrac{\ln(1)}{1+1^n} - \ln(1) = 0$
  - × d'autre part : $-1^n \ln(1) = 0$.

  On a donc bien :

  $$0 \leqslant \frac{\ln(1)}{1+1^n} - \ln(1) \leqslant -1^n \ln(1)$$

- si $t \in \,]0,1[$, alors :

$$\begin{array}{rcccccl}
 & 0 & \leqslant & \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) & \leqslant & -t^n \ln(t) & \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & \ln(t)\left(\dfrac{1}{1+t^n} - 1\right) & \leqslant & -t^n \ln(t) & \\
\Leftrightarrow & 0 & \geqslant & \dfrac{1}{1+t^n} - 1 & \geqslant & -t^n & \textit{(car, comme } t \in \,]0,1[\textit{ :} \\
 & & & & & & \ln(t) < 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 0 & \geqslant & \dfrac{\cancel{1} - (\cancel{1} + t^n)}{1+t^n} & \geqslant & -t^n & \\
\Leftrightarrow & 0 & \geqslant & -\dfrac{t^n}{1+t^n} & \geqslant & -t^n & \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & \dfrac{1}{1+t^n} & \leqslant & 1 & \textit{(car } -t^n < 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & 1 & \leqslant & 1+t^n & \textit{(car } 1+t^n > 0\textit{)}
\end{array}$$

  Le dernier encadrement étant vérifié, il en est de même du premier.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \,]0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n \ln(t).}$$

Commentaire

- On peut se demander d'où provient la disjonction de cas effectuée dans cette question. Elle est en fait nécessaire pour pouvoir diviser par $\ln(t)$ dans la succession d'équivalences. Cette disjonction de cas ne se repère pas forcément au premier coup d'oeil. Elle apparaît naturellement lors de la recherche au brouillon.
- Il était possible d'étudier les fonctions $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t)$ et $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) + t^n \ln(t)$, afin d'en déterminer le signe. Ceci est évidemment bien plus chronophage que la méthode présentée ici.

□

b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto -t^n \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt$ est donc uniquement impropre en 0.
- Soit $A \in]0,1]$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & \quad & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v'(t) & = & -t^n & \quad & v(t) & = & -\dfrac{1}{n+1}\, t^{n+1} \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A,1]$.
  On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^1 -t^n \ln(t)\, dt &= \left[-\frac{1}{n+1}\, t^{n+1} \ln(t) \right]_A^1 - \int_A^1 -\frac{1}{n+1}\, t^{n+1}\, \frac{1}{t}\, dt \\ &= \cancel{-\frac{1}{n+1}\, 1^{n+1} \ln(1)} + \frac{1}{n+1}\, A^{n+1} \ln(A) + \frac{1}{n+1} \int_A^1 t^n\, dt \\ &= \frac{1}{n+1}\, A^{n+1} \ln(A) + \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{n+1}\, t^{n+1} \right]_A^1 \\ &= \frac{1}{n+1}\, A^{n+1} \ln(A) + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\, A^{n+1} \end{aligned}$$

- Or :
  × d'une part : $\displaystyle\lim_{A\to 0} A^{n+1} = 0$,
  × d'autre part, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{A\to 0} A^{n+1} \ln(A) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi l'intégrale } \int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt \text{ est convergente et : } \int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt = \frac{1}{(n+1)^2}.}$$

Commentaire

On rappelle qu'une intégration par parties s'effectue toujours sur un **segment**. Ici l'intégrale d'intérêt est $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt$ qui est impropre en 0. La démonstration de sa convergence et son calcul s'effectuent donc en 2 étapes (classiques) :

1) calcul de l'intégrale sur le **segment** $[A,1]$,

2) passage à la limite quand A tend vers 0.

□

c) Déduire des questions précédentes : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -1$.

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)***, pour tout $t \in]0,1]$:
$$\ln(t) \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^n} \leqslant \ln(t) - t^n \ln(t)$$
- De plus :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ est convergente d'après ***1.b)***
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ est convergente d'après ***1.c)***
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t)\, dt$ est convergente en tant que somme d'intégrales convergentes, d'après ***1.b)*** et ***4.b)***
- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$), et les intégrales en présence convergentes :
$$\underbrace{\int_0^1 \ln(t)\, dt}_{=\,-1} \leqslant \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt}_{=\,J_n} \leqslant \int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t)\, dt$$
- Enfin :
$$\int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t)\, dt = \int_0^1 \ln(t)\, dt + \int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt = -1 + \frac{1}{(n+1)^2}$$
On en déduit :
$$-1 \leqslant J_n \leqslant -1 + \frac{1}{(n+1)^2}$$
- Or :
  × d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 = -1$.
  × d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + \dfrac{1}{(n+1)^2} = -1$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} J_n = -1.}$$

□

5. *a)* Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant \ln(x) \leqslant x$.
En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :
$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}}$$

Démonstration.

- La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0,+\infty[$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donc située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :
$$\begin{aligned} y &= f(1) + f'(1)\,(x-1) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}\,(x-1) = x-1 \end{aligned}$$
On en déduit, pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\ln(x) \leqslant x-1$.
En particulier, par transitivité : $\ln(x) \leqslant x - 1 \leqslant x$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \ln(x) \leqslant x.}$$

- Soit $n \geqslant 3$. Soit $x \in [1, +\infty[$. D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rccccl} & 0 & \leqslant & \ln(x) & \leqslant & x \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & \dfrac{\ln(x)}{1+x^n} & \leqslant & \dfrac{x}{1+x^n} \qquad \textit{(car } 1+x^n > 0\textit{)} \end{array}$$

De plus :

$$\begin{array}{rccll} & x^n & \leqslant & 1+x^n & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{x^n} & \geqslant & \dfrac{1}{1+x^n} & \textit{(par décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{x}{x^n} & \geqslant & \dfrac{x}{1+x^n} & \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{x^{n-1}} & \geqslant & \dfrac{x}{1+x^n} & \end{array}$$

On en déduit, par transitivité :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \frac{x}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}}}$$

□

b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{1}{n-2}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- D'après la question précédente :

$$\forall t \in [1,+\infty[, 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^n} \leqslant \frac{1}{t^{n-1}}$$

- De plus :
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ est convergente d'après ***2.b)***
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $n-1$ ($n-1 > 1$ car $n \geqslant 3$). Elle est donc convergente.
- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($1 \leqslant +\infty$), et les intégrales en présence convergentes :

$$0 \leqslant \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt}_{= K_n} \leqslant \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\, dt$$

- Enfin, pour tout $B \in [1,+\infty[$:

$$\int_1^B \frac{1}{t^{n-1}}\, dt = \int_1^B t^{-n+1}\, dt = \left[\frac{1}{-n+2}\, t^{-n+2} \right]_1^B = \frac{1}{-n+2}\left(\frac{1}{B^{n-2}} - 1\right)$$

Or, comme $n-2 > 0$: $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{1}{B^{n-2}} = 0$. D'où : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\, dt = -\frac{1}{-n+2} = \frac{1}{n-2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{1}{n-2}.}$$

□

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall n \geqslant 3, \quad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{1}{n-2}$$

Or :

× d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

× d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-2} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} K_n = 0.}$$

- Enfin, pour tout $n \geqslant 3$, par relation de Chasles (car les intégrales en présence sont convergentes) :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = J_n + K_n$$

$$\boxed{\text{D'après la question } \textit{4.c)} \text{ et ce qui précède, on en déduit : } \lim_{n\to+\infty} I_n = -1.}$$

□

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de **Scilab**.

5. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0,1]$.
À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, démontrer :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du$$

Démonstration.
On effectue le changement de variable $\boxed{u = -\ln(t)}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -\ln(t) \quad (\text{et donc } t = \mathrm{e}^{-u}) \\ \hookrightarrow du = -\dfrac{1}{t}\, dt \quad \text{ et } \quad dt = -\mathrm{e}^{-u}\, du \\ \bullet\ t = y \ \Rightarrow\ u = -\ln(y) \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, -\ln(y)]$.
On obtient alors :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = \int_{-\ln(y)}^0 \frac{-u}{1+(\mathrm{e}^{-u})^n} \left(-\mathrm{e}^{-u}\, du\right) = -\int_{-\ln(y)}^0 \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du.}$$

□

6. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

a) Donner une densité de X.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Une densité } f_X \text{ de } X \text{ est : } f_X : t \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $Y_n = \dfrac{-X}{1 + \mathrm{e}^{-n\,X}}$.
Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et : $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par théorème de transfert, la v.a.r. Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-u}{1 + \mathrm{e}^{-nu}}\, f_X(u)\, du$ est absolument convergente.
- Soit $u \in [0, +\infty[$.

$$\left| \frac{-u}{1 + \mathrm{e}^{-nu}}\, f_X(u) \right| = \frac{|-u|}{|1 + \mathrm{e}^{-nu}|}\, |f_X(u)| = \frac{u}{1 + \mathrm{e}^{-nu}}\, |\mathrm{e}^{-u}| = \frac{u}{1 + \mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y_n \text{ admet donc une espérance si et seulement si l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{u}{1 + \mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du \text{ est convergente.}}$$

- Or, d'après la question ***5.***, pour tout $y \in \,]0, 1]$:

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^n}\, dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1 + \mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du$$

Ainsi :

$$\int_0^{-\ln(y)} \frac{u}{1 + \mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du = -\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^n}\, dt$$

D'après la question ***1.c)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^n}\, dt$ est convergente.
Comme $\displaystyle\lim_{y \to 0} -\ln(y) = +\infty$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{1 + \mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du$ est également convergente.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y_n \text{ admet donc une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \int_0^{+\infty} \frac{-u}{1 + \mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^n}\, dt = J_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = J_n}$$

□

7. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'exp', 1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m, et qui renvoie une matrice à une ligne et m colonnes dont chaque coefficient est une simulation de la réalisaion de Y_n.

```
1 function Y = simulY(n, m)
2     Y = zeros(..., ...)
3     for i = ........
4         X = grand(1, 1, 'exp', 1)
5         Y(i) = ........
6     end
7 endfunction
```

Démonstration.
On propose la fonction **Scilab** suivante.

```
1 function Y = simulY(n, m)
2     Y = zeros(1, m)
3     for i = 1:m
4         X = grand(1, 1, 'exp', 1)
5         Y(i) = -X / (1 + exp(-n * X))
6     end
7 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simulY`,
  × elle prend en entrée 2 paramètres `n` et `m`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `Y`.

```
1 function Y = simulY(n, m)
```

En ligne 2, la variable `Y`, qui contiendra les `m` réalisations de la variable aléatoire Y_n, est initialisée au vecteur nul.

```
2     Y = zeros(1, m)
```

- **Contenu de la fonction**
  Les lignes 3 à 6 consistent à mettre à jour les coordonnées successives du vecteur `Y` (de la $1^{\text{ère}}$ à la $\texttt{m}^{\text{ème}}$) pour qu'il contienne `m` simulations de la v.a.r. Y_n. Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
3     for i = 1:m
```

En ligne 4, on stocke dans la variable `X` une simulation de la v.a.r. X de loi $\mathcal{E}(1)$.

```
4         X = grand(1, 1, 'exp', 1)
```

D'après la question précédente : $Y_n = \dfrac{-X}{1 + \mathrm{e}^{-nX}}$.
Ainsi, en ligne 5, on stocke dans la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur `Y` une réalisation de la v.a.r. Y_n.

```
5         Y(i) = -X / (1 + exp(-n * X))
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le script **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question. □

8. a) Énoncer la loi faible des grands nombres.

Démonstration.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.
On suppose que les v.a.r. de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
× sont indépendantes,
× admettent toutes la même espérance m,
× admettent toutes la même variance σ^2.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ *(moyenne empirique)*.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\, \left|\overline{X_n} - m\right| \geqslant \varepsilon \, \right] \right) = 0}$$ □

b) On tape dans **Scilab** le script suivant :

```
n = input(' Entrer la valeur de n')
disp( mean( simulY(n, 1000) ) )
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

Démonstration.
- D'après la question ***6.b)*** : $J_n = \mathbb{E}(Y_n)$.
- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(Y_n)$ est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 1000$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. Y_n.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(z_1, \dots, z_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(Z_1, \dots, Z_N)$ de la v.a.r. Y_n.
  (les v.a.r. Z_i sont indépendantes et de même loi que Y_n)
  × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \ = \ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} z_k \ \simeq \ \mathbb{E}(Y_n)$$

- Cela se traduit de la manière suivante en **Scilab** :
  × la valeur de `n` est choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```
n = input(' Entrer la valeur de n')
```

  × on obtient les valeurs $(z_1, \dots, z_{1000})$ qui correspondent à l'observation d'un 1000-échantillon $(Z_1, \dots, Z_{1000})$ de la v.a.r. Y_n à l'aide de la fonction `simulY` par la commande : `simulY(n, 1000)`.
  × on effectue la moyenne de ces observations à l'aide de la fonction `mean`.
  × on affiche le résultat obtenu avec la fonction `disp`.

La commande `disp( mean( simulY(n, 1000) ) )` permet donc d'afficher une approximation de $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$.

□

Exercice 3

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.
On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
- P_n : « Obtenir Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

La suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier n supérieur ou égal 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ».
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n \; = \; \mathbb{P}(U_n) \qquad \text{et} \qquad a_n \; = \; \mathbb{P}(\,[X = n]\,)$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k.
En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.

Démonstration.

- L'événement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si on obtient pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux « Pile » consécutifs au $2^{\text{ème}}$ lancer.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X = 2] = P_1 \cap P_2.}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} a_2 &= \mathbb{P}([X = 2]) \\ &= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \\ &= \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) && \textit{(car } P_1 \textit{ et } P_2 \textit{ sont indépendants)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \textit{(car la pièce est équilibrée)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } a_2 = \frac{1}{4}.}$$

- L'événement $[X = 3]$ est réalisé si et seulement si on obtient pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux « Pile » consécutifs au $3^{\text{ème}}$ lancer. Pour cela, on doit avoir obtenu « Face » au 1^{er} lancer puis 2 « Pile ». *(on ne peut obtenir « Pile » au 1^{er} lancer, sinon les deux « Pile » consécutifs seraient obtenus pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $2^{\text{ème}}$ lancer et non au $3^{\text{ème}}$)*

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3.}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} a_3 & = & \mathbb{P}([X=3]) & \\ & = & \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) & \\ & = & \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(P_3) & \textit{(car } F_1,\ P_2 \textit{ et } P_3 \textit{ sont mutuellement indépendants)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} & \textit{(car la pièce est équilibrée)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } a_3 = \frac{1}{8}.}$$

- L'événement $[X=4]$ est réalisé si et seulement si on obtient pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux « Pile » consécutifs au $4^{\text{ème}}$ lancer. Pour cela, on doit avoir obtenu « Face » au $2^{\text{ème}}$ lancer puis 2 « Pile » au $3^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ lancer. Le résultat du 1^{er} lancer peut être « Pile » ou « Face ».
(on ne peut obtenir « Pile » au 2^{er} lancer, sinon les deux « Pile » consécutifs seraient obtenus pour la $1^{ère}$ fois au $3^{ème}$ lancer et non au $4^{ème}$)

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X=4] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{cll} & a_4 & \\ = & \mathbb{P}([X=4]) & \\ = & \mathbb{P}\Big((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)\Big) & \\ = & \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + +\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) & \textit{(car c'est une union d'événements incompatibles)} \\ = & \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(P_3) \times \mathbb{P}(P_4) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(P_3) \times \mathbb{P}(P_4) & \textit{(car ce sont des intersections d'événements indépendants)} \\ = & \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 & \textit{(car la pièce est équilibrée)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } a_4 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.}$$

□

2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- L'événement U_n est réalisé si et seulement si, au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs. Ceci est équivalent à obtenir deux piles consécutifs **pour la $1^{\text{ère}}$ fois** :
  × soit au $2^{\text{ème}}$ lancer,
  × soit au $3^{\text{ème}}$ lancer,
  × $\cdots$,
  × soit au $(n-1)^{\text{ème}}$ lancer,
  × soit au $n^{\text{ème}}$ lancer.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } U_n = \bigcup_{k=2}^{n} [X=k].}$$

- Comme les événements $[X = 2]$, ..., $[X = n]$ sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}(U_n) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} [X = k]\right) \;=\; \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}([X = k]) \;=\; \sum_{k=2}^{n} a_k$$

$$\boxed{\text{D'où, pour tout } n \in [\![2, +\infty[\![\, : \, u_n = \mathbb{P}(U_n) = \sum_{k=2}^{n} a_k.}$$

Commentaire

- Démontrons que les événements $[X = 2]$, ..., $[X = n]$ sont deux à deux incompatibles.
  - $\times$ Par définition de la v.a.r. X : $X(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![$.
  - $\times$ Ainsi la famille $\big([X = k] \big)_{k \in [\![2,+\infty[\![}$ forme un système complet d'événements. En particulier, les événements $[X = 2]$, ..., $[X = n]$ sont incompatibles.
- On peut aussi démontrer que les événements $[X = 2]$, ..., $[X = n]$ sont incompatibles en utilisant la définition d'incompatibilité.
  Soit $(i, j) \in \big([\![2, n]\!]\big)^2$ tel que : $i \neq j$.
  L'événement $[X = i] \cap [X = j]$ est réalisé si et seulement on obtient pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux piles consécutifs à la fois au $i^{\text{ème}}$ et au $j^{\text{ème}}$ lancer. Cela est impossible car : $i \neq j$. Ainsi :

$$[X = i] \cap [X = j] \;=\; \varnothing$$

$\square$

3. a) Recopier et compléter la fonction **Scilab** ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
function y = simulX()
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile .........
        if rand() < 1/2 then
            pile = pile + 1
        else
            pile = .........
        end
        tirs = .........
    end
    y = tirs
endfunction
```

Commentaire

Dans le sujet original, l'indentation était légèrement différente en ce qui concerne la structures conditionnelle (pas de saut de ligne après les `then` et `else`). On présente ici le programme avec une indentation plus classique qui correspond à la présentation retenue dans les autres épreuves.

Démonstration.
On propose la fonction **Scilab** suivante.

```
1  function y = simulX()
2      tirs = 0
3      pile = 0
4      while pile < 2
5          if rand() < 1/2 then
6              pile = pile + 1
7          else
8              pile = 0
9          end
10         tirs = tirs + 1
11     end
12     y = tirs
13 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simulX`,
  × elle ne prend pas de paramètre en entrée,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `y`.

```
1  function y = simulX()
```

En ligne 2, la variable `tirs`, qui contiendra le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs pour la 1ère fois, est initialisée à 0 (aucun lancer n'a encore été effectué).

```
2      tirs = 0
```

En ligne 3, la variable `pile`, qui contiendra le nombre de piles consécutifs, est initialisée à 0.

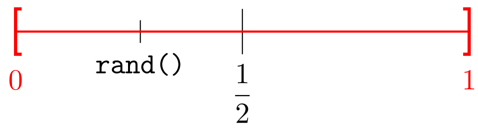
```
3      pile = 0
```

- **Structure itérative**
  × Les lignes 4 à 10 consistent à déterminer le rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs. On doit donc effectuer des lancers de pièce jusqu'à obtenir deux « Pile » consécutifs. Autrement dit, on doit effectuer des lancers de pièce tant que le nombre de piles consécutifs est strictement inférieur à 2.
  (on rappelle que c'est la variable `pile` *qui contient le nombre de piles consécutifs)*
  Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
4      while pile < 2
```

  × En ligne 5, la fonction utilise la commande `rand()`.
  L'instruction `rand()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

× Cette valeur choisie aléatoirement dans $[0,1]$ permet d'obtenir une simulation d'un lancer de pièce équilibrée.



Deux cas se présentent.

– Si `rand()` $< \frac{1}{2}$: alors, on considère qu'on a obtenu « Pile ».
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}$$

ce qui correspond bien à un lancer de pièce équilibrée.
Dans ce cas, on met à jour la variable `pile` en l'incrémentant de 1.

```
        if rand() < 1/2 then
            pile = pile + 1
```

– Si `rand()` $\geqslant \frac{1}{2}$: alors, on considère qu'on a obtenu « Face ».
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} \leqslant U \leqslant 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} \leqslant U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}$$

Dans ce cas, le nombre de « Pile » consécutifs est ré-initialisé à 0. On met donc à jour la variable `pile` en conséquence.

```
        else
            pile = 0
```

× La variable `tirs` est incrémentée de 1 pour signifier qu'on a effectué 1 lancer supplémentaire.

```
        tirs = tirs + 1
```

- **Fin de la fonction**
À l'issue de la boucle while, la variable `tirs` contient le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux « Pile » consécutifs. Elle contient donc une simulation de la v.a.r. X. Il ne reste qu'à stocker cette valeur dans la variable de sortie `y`.

```
    y = tirs
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Scilab**. □

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function s = moyenne(n)` qui simule `n` fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

Démonstration.
On propose la fonction **Scilab** suivante.

```
1 function s = moyenne(n)
2 s = 0
3 for i = 1:n
4     s = s + simulX()
5 end
6 s = s / n
7 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `moyenne`,
  - × elle prend en entrée un paramètre `n`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `s`.

  En ligne 2, on commence par initialiser la variable `s` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 permettent de metre à jour la variable `s` pour qu'elle contienne la somme de `n` simulations de la v.a.r. X. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle for) et on utilise la fonction `simulX` définie en question précédente pour obtenir des simulations de la v.a.r. X.

```
3 for i = 1:n
4     s = s + simulX()
5 end
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle for, la variable `s` contient la somme de `n` simulations de la v.a.r. X. La variable `s / n` contient alors la moyenne des `n` simulations de X (ce qui était demandé).

```
6 s = s / n
```

Commentaire

- Notons que l'on pouvait procéder en codant dans un premier temps un `n`-échantillon de la v.a.r. X :

```
s = zeros(1, n)
for i = 1:n
    s(i) = simulX()
end
s = (1/n) * sum(s)
```

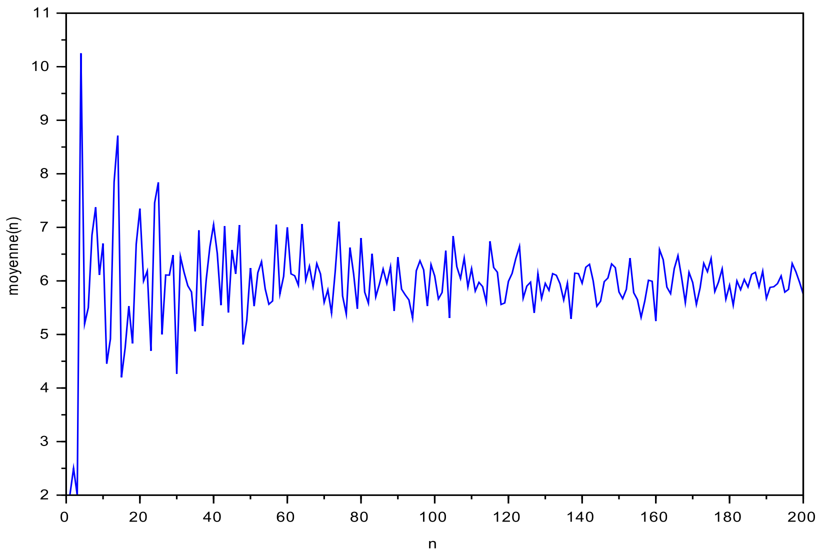
Commentaire

- On pouvait aussi exploiter les commandes **Scilab** :

```
s = zeros(1, n)
for i = 1:n
    s(i) = simulX()
end
s = mean(s)
```

☐

c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier `n` de $[\![1, 200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Démonstration.

- Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On note $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la v.a.r. X.
D'après la question précédente, la fonction `moyenne` renvoie une simulation de la variable aléatoire $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
- Le graphe de cette question présente donc des simulations de $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\ldots$, $\bar{X}_{200}$.
- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 200$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. X.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \ldots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \ldots, X_N)$ de la v.a.r. X.
  (les v.a.r. X_i sont indépendantes et de même loi que X)
  × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \;=\; \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \;\simeq\; \mathbb{E}(X)$$

- On en déduit que la courbe représentée se rapproche de $\mathbb{E}(X)$.

$$\boxed{\text{On conjecture alors : } \mathbb{E}(X) \approx 6.}$$

☐

Partie B

4. a) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par définition de U_n, on a : $U_n = \bigcup\limits_{k=2}^{n} B_k$. Ainsi :

$$U_{n+1} = \bigcup_{k=2}^{n+1} B_k = \left(\bigcup_{k=2}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$$

- On en déduit, par formule du crible :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_{n+1}) &= \mathbb{P}(U_n \cup B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})}$$

□

b) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 4$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= \big(U_n \cap B_{n+1}\big) \cap \Omega \\ &= \big(U_n \cap B_{n+1}\big) \cap \big(F_{n-1} \cup P_{n-1}\big) && \textit{(car } (F_{n-1}, P_{n-1}) \textit{ forme un système complet d'événements)} \\ &= \big(U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}\big) \cup \big(U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}\big) && \textit{(d'après les lois de Morgan)} \end{aligned}$$

- Étudions alors les 2 événements de l'union.
  × D'une part :

$$U_n = \bigcup_{k=2}^{n} B_k = \left(\bigcup_{k=2}^{n-2} B_k\right) \cup B_{n-1} \cup B_n = U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n$$

  Ainsi, d'après les lois de Morgan :

$$U_n \cap F_{n-1} = \big(U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n\big) \cap F_{n-1} = \big(U_{n-2} \cap F_{n-1}\big) \cup \big(B_{n-1} \cap F_{n-1}\big) \cup \big(B_n \cap F_{n-1}\big)$$

  Or :
  - par définition de B_{n-1} :

$$B_{n-1} \cap F_{n-1} = \big(P_{n-2} \cap P_{n-1}\big) \cap F_{n-1} = P_{n-2} \cap \big(P_{n-1} \cap F_{n-1}\big) = P_{n-2} \cap \varnothing = \varnothing$$

  - par définition de B_n :

$$B_n \cap F_{n-1} = \big(P_{n-1} \cap P_n\big) \cap F_{n-1} = P_n \cap \big(P_{n-1} \cap F_{n-1}\big) = P_n \cap \varnothing = \varnothing$$

On en déduit :

$$U_n \cap F_{n-1} \;=\; \big(U_{n-2} \cap F_{n-1}\big) \cup \varnothing \cup \varnothing \;=\; U_{n-2} \cap F_{n-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, par définition de } B_{n+1} : \\ U_n \cap F_{n-1} \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.\end{array}}$$

× D'autre part :

$$U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1} \;=\; U_n \cap P_{n-1} \cap \big(P_n \cap P_{n+1}\big) \;=\; U_n \cap \big(P_{n-1} \cap P_n\big) \cap P_{n+1} \;=\; U_n \cap B_n \cap P_{n+1}$$

Or, comme $U_n = \bigcup\limits_{k=2}^{n} B_k$, alors : $B_n \subset U_n$. D'où : $U_n \cap B_n = B_n$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1} = B_n \cap P_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } U_n \cap B_{n+1} = \big(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \cup \big(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big).}$$

□

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} \;=\; u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$$

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)*** :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ u_{n+1}}}{\mathbb{P}(U_{n+1})} \;=\; \underset{\substack{\shortparallel \\ u_n}}{\mathbb{P}(U_n)} \;+\; \mathbb{P}(B_{n+1}) \;-\; \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

- De plus, comme P_n et P_{n+1} sont indépendants :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(P_n \cap P_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{4}$$

- Ensuite, d'après la question précédente :

$$U_n \cap B_{n+1} \;=\; \big(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \cup \big(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big)$$

  C'est une union d'événements incompatibles. D'où :

$$\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}\big(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) + \mathbb{P}\big(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big)$$

  × D'une part, comme les événements P_{n-1}, P_n et P_{n+1} sont mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{8}$$

  × D'autre part :
  - l'événement U_{n-2} se réfère aux $n-2$ premiers lancers (lancers 1 à $n-2$),
  - l'événement $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ se réfère aux lancers $n-1$, n et $n+1$.

  Comme les lancers sont indépendants, les événements U_{n-2} et $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ sont donc indépendants. On en conclut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) &= \mathbb{P}(U_{n-2}) \times \mathbb{P}(F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \\
&= u_{n-2} \times \mathbb{P}(F_{n-1}) \times \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}(P_n) && \textit{(car } F_{n-1},\ P_n \textit{ et } P_{n+1} \textit{ sont indépendants)} \\
&= u_{n-2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{8}\, u_{n-2}
\end{aligned}$$

- En rassemblant les résultats précédents, on obtient :

$$u_{n+1} \; = \; u_n + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{8}\, u_{n-2} + \frac{1}{8}\right) \; = \; u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\, u_{n-2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 4,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2}).}$$

□

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 4$. D'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n \; = \; \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$$

Or : $u_{n-2} = \mathbb{P}(U_{n-2}) \leqslant 1$. D'où : $1 - u_{n-2} \geqslant 0$. On en déduit :

$$u_{n+1} - u_n \; \geqslant \; 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \geqslant 4} \text{ est donc croissante.}}$$

- Pour tout $n \geqslant 4$: $u_n = \mathbb{P}(U_n) \leqslant 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n \geqslant 4}$ est :
  - × croissante,
  - × majorée par 1.

  Elle converge donc vers une limite ℓ vérifiant : $\ell \leqslant 1$.
- Enfin, toujours d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 4$:

$$u_{n+1} \; = \; u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$$

Ainsi, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{array}{rrcl} & \ell & = & \ell + \frac{1}{8}\,(1 - \ell) \\ \text{donc} & 0 & = & \frac{1}{8}\,(1 - \ell) \\ \text{d'où} & 0 & = & 1 - \ell \\ \text{ainsi} & \ell & = & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la suite } (u_n) \text{ converge vers 1.}}$$

Commentaire

On pouvait également démontrer la croissance de la suite de la suite (u_n) en exploitant le fait que la suite (U_n) est une suite croissante d'événements.

- Soit $n \geqslant 2$. On remarque : $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ (démontré en question ***4.a)***). Ainsi :

$$U_n \; \subset \; U_{n+1}$$

- Par croissance de $\mathbb{P}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(U_n) \; \leqslant \; \mathbb{P}(U_{n+1})$$

  D'où : $u_n \leqslant u_{n+1}$.

□

6. En déduire :

$$\mathbb{P}(\,[X=-1]\,) \;=\; 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) \;=\; 0$$

Démonstration.

- L'événement $[X=-1]$ est réalisé si et seulement si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs. Autrement dit $[X=-1]$ est réalisé si et seulement si, pour tout $n \geqslant 2$, on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs au cours des n premiers lancers. Ainsi :

$$[X=-1] \;=\; \bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{U_k}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}([X=-1]) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{U_k}\right) \;=\; 1-\mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{U_k}}\right) \;=\; 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right)$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X=-1]) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right)}$$

- On cherche alors à calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right)$.
  × Tout d'abord, par corollaire du théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} U_k\right)$$

  × Démontrons maintenant que la suite (U_n) est une suite d'événements croissante.
  (il n'est bien sûr pas utile de démontrer ce point si cela a été fait en question précédente)
  Soit $n \geqslant 2$. Démontrons : $U_n \subset U_{n+1}$.
  Avec le même raisonnement qu'en question ***4.a)*** :

$$U_{n+1} \;=\; U_n \cup B_{n+1}$$

  Ainsi : $U_n \subset U_{n+1}$.

$$\boxed{\text{La suite } (U_n) \text{ est une suite croissante d'événements.}}$$

  × Comme (U_n) est une suite croissante d'événements :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=2}^{n} U_k \;=\; U_n$$

  On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} U_k\right) \;=\; \mathbb{P}(U_n) \;=\; u_n$$

  De plus, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right) \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([X=1]) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right) \;=\; 1-1 \;=\; 0.}$$

□

Commentaire

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

1) Introduire des événements simples (« tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage », « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ...) liés à l'expérience considérée.
Nommer l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

2) Décomposer l'événement A à l'aide d'événements simples.

3) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union d'une suite croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le corollaire du théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant l'événements contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection d'une suite décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule des probabilités composées.

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le corollaire du théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant l'événement contraire.

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$v_n \;=\; 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad S_n \;=\; \sum_{k=2}^{n} k\,\mathbb{P}(\,[X = k]\,)$$

7. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} \;=\; \frac{1}{8}\, v_{n-2}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 4$.

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= (\cancel{1} - u_n) - (\cancel{1} - u_{n+1}) && \textit{(par définition de } v_n \textit{ et } v_{n+1}\textit{)} \\ &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2}) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.c)}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{8}\, v_{n-2} && \textit{(par définition de } v_{n-2}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 4,\ v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}\, v_{n-2}}$$

□

8. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(\,[X = n+1]\,) \;=\; v_n - v_{n+1}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Comme $v_n = 1 - u_n = 1 - \mathbb{P}(U_n)$, nous allons établir une relation entre les événements $[X = n+1]$, U_n et U_{n+1} pour répondre à cette question.
  Tout d'abord, l'événement U_{n+1} est réalisé si et seulement si on obtient deux « Pile » consécutifs au cours des $n+1$ premiers lancers. Autrement dit, U_{n+1} est réalisé si et seulement si :
  × soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs au cours des n premiers lancers,
  × soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la première fois au $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer.
  Ainsi :
  $$U_{n+1} \;=\; U_n \cup [X = n+1]$$
- Les événements $[X = n+1]$ et U_n sont de plus incompatibles puisqu'on ne peut obtenir pour la première fois deux « Pile » consécutifs au $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer et à la fois les avoir obtenus au cours des n premiers lancers.
  On obtient alors :
  $$\mathbb{P}(U_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(U_n \cup [X = n+1]) \;=\; \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}([X = n+1])$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}([X = n+1]) \;=\; \mathbb{P}(U_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n) \;=\; u_{n+1} - u_n \;=\; (1 - v_{n+1}) - (1 - v_n) \;=\; v_n - v_{n+1}$$
  $$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X = n+1]) = v_n - v_{n+1}}$$

Commentaire

- Notons qu'on pouvait justifier l'égalité entre événements $U_{n+1} = U_n \cup [X = n+1]$ « en démontrant au préalable l'égalité $U_{n+1} = \bigcup\limits_{k=2}^{n+1} [X = k]$). Détaillons cette manière de procéder.
- Pour tout $p \geqslant 2$, on commence par remarquer :

$$U_p \;=\; \bigcup_{k=2}^{p} [X = k]$$

En effet, l'événement U_p est réalisé si et seulement si on obtient deux « Pile » consécutifs au cours des k premiers lancers. Autrement dit U_p est réalisé si et seulement si :

× soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $2^{\text{ème}}$ lancer,

× soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $3^{\text{ème}}$ lancer,

× ...

× soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $p^{\text{ème}}$ lancer,

On en déduit :

$$U_{n+1} \;=\; \bigcup_{k=2}^{n+1} [X = k] \;=\; \left(\bigcup_{k=2}^{n} [X = k] \right) \cup [X = n+1] \;=\; U_n \cup [X = n+1]$$

- Avec ce procédé, l'incompatibilité des événements $U_n = \bigcup\limits_{k=2}^{n} [X = k]$ et $[X = n+1]$ pouvait s'obtenir en remarquant que la famille $\big([X = k] \big)_{k \in -1 \cup [\![2,+\infty[\![}$ forme un système complet d'événements (car $X(\Omega) \subset \{-1\} \cup [\![2, +\infty[\![$).

$\square$

9. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n \;=\; 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $S_n = 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n$.

▸ **Initialisation**

- D'une part :

$$S_2 \;=\; \sum_{k=2}^{2} k\, \mathbb{P}([X = k]) \;=\; 2\, \mathbb{P}([X = 2]) \;=\; 2 \times \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{2}$$

où l'avant-dernière égalité est obtenue avec la question ***1.***

- Calculons d'autre part v_2 et v_4.

× Calcul de v_2. Tout d'abord :

$$v_2 \;=\; 1 - u_2 \;=\; 1 - \mathbb{P}(U_2) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{2} B_k \right) \;=\; 1 - \mathbb{P}(B_2)$$

Or, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(B_2) \;=\; \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \;=\; \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \;=\; \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } v_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.}$$

× Calcul de v_4. Tout d'abord :

$$v_4 \;=\; 1 - u_4 \;=\; 1 - \mathbb{P}(U_4)$$

Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(U_4) \;=\; \mathbb{P}(U_3) + \mathbb{P}([X=4]) \;=\; \Big(\mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}([X=3])\Big) + \mathbb{P}([X=4])$$

D'après le calcul de v_2 et la question ***1.***, on en déduit :

$$\mathbb{P}(U_4) \;=\; \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } v_4 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

Finalement :

$$6 - 8\,v_4 - 2\,v_2 \;=\; 6 - 8 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{3}{4} \;=\; 6 - 4 - \frac{3}{2} \;=\; 2 - \frac{3}{2} \;=\; \frac{1}{2}$$

D'où $\mathcal{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $S_{n+1} = 6 - 8\,v_{n+3} - (n+1)\,v_{n+1}$).

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\,\mathbb{P}([X=k]) + (n+1)\,\mathbb{P}([X=n+1]) \\
&= S_n + (n+1)\,(v_n - v_{n+1}) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n + (n+1)\,v_n - (n+1)\,v_{n+1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= 6 - 8\,v_{n+2} + v_n - (n+1)\,v_{n+1}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***7.*** (qui est applicable car, comme $n \geqslant 2$, alors $n+2 \geqslant 4$) :

$$v_{n+2} - v_{n+3} \;=\; \frac{1}{8}\,v_n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 6 - 8\left(v_{n+3} + \frac{1}{8}\,v_n\right) + v_n - (n+1)\,v_{n+1} \\
&= 6 - 8\,v_{n+3} - \cancel{v_n} + \cancel{v_n} - (n+1)\,v_{n+1} \\
&= 6 - 8\,v_{n+3} - (n+1)\,v_{n+1}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ S_n = 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n.}$$

Commentaire

Si l'on avait utilisé en question précédente la relation :

$$\forall p \geqslant 2, \quad U_p \ = \ \bigcup_{k=2}^{p} [X = k]$$

on pouvait effectuer le calcul de v_2 et de v_4 de la façon suivante.

- Calcul de v_2. Tout d'abord :

$$v_2 \ = \ 1 - u_2 \ = \ 1 - \mathbb{P}(U_2) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X = 2]) \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

  Or, d'après la question ***1.***, on sait : $\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{1}{4}$. D'où : $v_2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

- Calcul de v_4.

$$v_4 \ = \ 1 - u_4 \ = \ 1 - \mathbb{P}(U_4)$$

  Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(U_4) \ = \ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{4} [X = k]\right) \ = \ \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X = 2]) + \mathbb{P}([X = 3]) + \mathbb{P}([X = 4])$$

  où la 2ème égalité est obtenue par incompatibilité des événements de l'union (car la famille $\big([X = k]\big)_{k \in -1 \cup [\![2, +\infty[\![}$ est un système complet d'événements).
  D'après la question ***1.***, on obtient :

$$\mathbb{P}(U_4) \ = \ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \ = \ \frac{1}{2}$$

  D'où : $v_4 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

□

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante et majorée.

Démonstration.

- La suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} k\, \mathbb{P}([X = k])$. Or cette série est à termes positifs.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (S_n)_{n \geqslant 2} \text{ est croissante.}}$$

Commentaire

- On utilise ici la propriété du cours suivante.

  Soit $\sum u_n$ une série et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des sommes partielles associée.

$$\boxed{\sum u_n \text{ est à termes positifs} \ \Rightarrow \ (S_n) \text{ est croissante}}$$

  Rappelons que cette propriété se démontre facilement comme suit.

- Supposons que la série $\sum u_n$ est à termes positifs. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $S_{n+1} - S_n = u_n \geqslant 0$. Ainsi, (S_n) est croissante.
- Notons que ce résultat peut en fait s'énoncer sous forme d'équivalence. En effet, si (S_n) est croissante, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = S_{n+1} - S_n \geqslant 0$. On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. La série $\sum u_n$ est donc à termes positifs.

- Soit $n \geqslant 2$. D'après la question précédente :

$$S_n \ = \ 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n$$

- Or, pour tout $k \geqslant 2$, par propriété d'une probabilité :

$$\begin{array}{lrcccl} & 0 & \leqslant & u_k & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & 1 & \geqslant & 1-u_k & \geqslant & 0 \\ \text{d'où} & 1 & \geqslant & v_k & \geqslant & 0 \end{array}$$

On en déduit : $v_{n+2} \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$. Ainsi : $8\, v_{n+2} \geqslant 0$ et $n\, v_n \geqslant 0$. On obtient :

$$\begin{array}{lccc} & 8\, v_{n+2} + n\, v_n & \geqslant & 0 \\ \text{donc} & -8\, v_{n+2} - n\, v_n & \leqslant & 0 \\ \text{d'où} & 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n & \leqslant & 6 \\ \text{ainsi} & S_n & \leqslant & 6 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (S_n) \text{ est majorée par } 6.}$$

□

11. Montrer que X admet une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} k\, \mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- De plus, comme précisé en question précédente, la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} k\, \mathbb{P}([X=k])$. Or, d'après la question précédente, la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est :

  × croissante,

  × majorée par 6.

  Elle est donc convergente. Ainsi, la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} k\, \mathbb{P}([X=k])$ l'est aussi.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une espérance.}}$$

□

12. a) Démontrer que la suite $(n\, v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers un réel λ.

Démonstration.

Soit $n \geqslant 2$. D'après la question ***9.*** :

$$n\, v_n \ = \ 6 - 8\, v_{n+2} - S_n$$

Or :

× la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est convergente d'après la question précédente.

× la suite (v_{n+2}) est convergente, car la suite (v_n) l'est. En effet, d'après la question ***5.***, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers 1. De plus :

$$\forall n \geqslant 2, \quad v_n \ = \ 1 - u_n$$

On en déduit que la suite (v_n) converge vers 0.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La suite } (n\, v_n)_{n \geqslant 2} \text{ est donc convergente en tant que} \\ \text{combinaison linéaire de suites convergentes. On note } \lambda \text{ sa limite.}\end{array}}$$

□

b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
À l'aide de l'égalité démontrée à la question ***7.***, obtenir une contradiction.

Démonstration.

- Supposons : $\lambda \neq 0$. D'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, v_n = \lambda$. Comme $\lambda \neq 0$, on en déduit : $n\, v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda$. D'où :
$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$$
- On obtient alors :
  × $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$
  × $\forall n \geqslant 2,\ v_n \geqslant 0$
  × la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente. Et la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\lambda}{n}$ l'est aussi.
  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} v_n$ est divergente.

$$\boxed{\text{Finalement, si } \lambda \neq 0, \text{ alors la série } \sum_{n \geqslant 2} v_n \text{ est divergente.}}$$

- *On ne suppose plus dans ce point :* $\lambda \neq 0$.
  D'après la question ***7.*** :
$$\forall k \geqslant 4, \qquad v_k - v_{k+1} \ = \ \frac{1}{8}\, v_{k-2}$$
  Soit $n \geqslant 2$. On somme les égalités précédentes pour k variant de 4 à $n+2$. On obtient :
$$\underbrace{\sum_{k=4}^{n+2} (v_k - v_{k+1})}_{=\, v_4 - v_{n+3}} \ = \ \sum_{k=4}^{n+2} \left(\frac{1}{8}\, v_{k-2}\right) \qquad \textit{(par télescopage)}$$
  De plus :
$$\sum_{k=4}^{n+2} \left(\frac{1}{8}\, v_{k-2}\right) \ = \ \frac{1}{8} \sum_{k=4}^{n+2} v_{k-2} \ = \ \frac{1}{8} \sum_{k=2}^{n} v_k \qquad \textit{(par décalage d'indice)}$$
  On en déduit :
$$\sum_{k=2}^{n} v_k \ = \ 8\,(v_4 - v_{n+3})$$
- Or, d'après la question précédente, la suite (v_n) converge vers 0. On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} v_k\right)_{n \geqslant 2}$ est convergente (elle converge vers $8\, v_4$).

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum_{n \geqslant 2} v_n \text{ est convergente.}}$$

- Démontrons par l'absurde : $\lambda = 0$.
  Supposons : $\lambda \neq 0$. Alors :
  - × d'après le 1[er] point, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} v_n$ est divergente.
  - × d'après le 2[ème] point, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} v_n$ est convergente.

  Absurde !

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda = 0, \textit{ i.e. } \lim\limits_{n \to +\infty} n\, v_n = 0.}$$

  □

c) Donner alors la valeur de l'espérance de X.

Démonstration.

- D'après la question ***9.***, pour tout $n \geqslant 2$:

$$S_n \;=\; 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n$$

- Or :
  - × d'après la question ***11.***, la v.a.r. X admet une espérance et, par définition de $(S_n)_{n \geqslant 2}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \mathbb{E}(X)$.
  - × toujours d'après la question ***11.*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+2} = 0$.
  - × d'après la question ***12.b)*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, v_n = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } \mathbb{E}(X) = 6 - 8 \times 0 - 0 = 6.\\ \textit{(ce qui est bien ce qu'on avait conjecturé en question } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)}\end{array}}$$

□