

EML 2020

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

2. a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

3. a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de \mathbb{N}^* , (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur \mathbb{R}_+ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur \mathbb{R}_+ que l'on note u_n .

7. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2 .

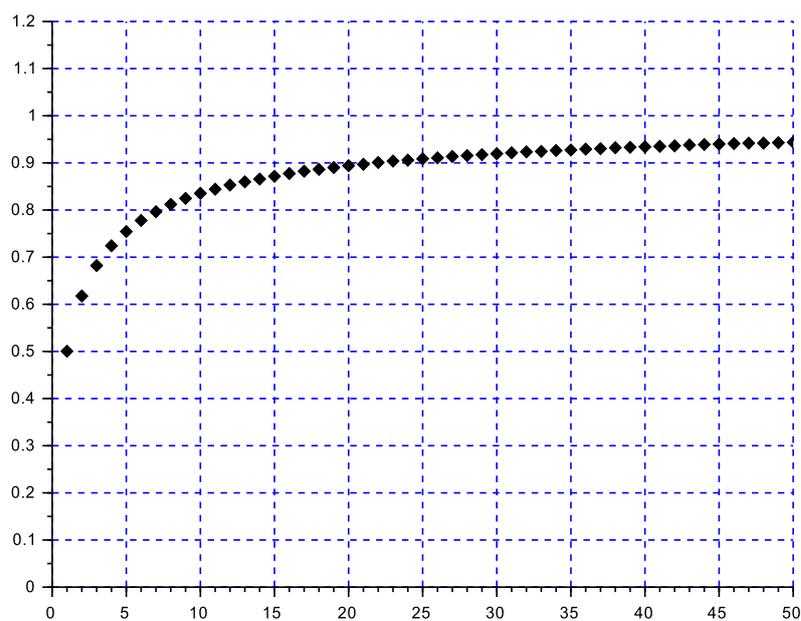
9. a) Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de \mathbb{N}^* , elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1  function u = valeur_approchee(n)
2      a = 0
3      b = 1
4      while ...
5          c = (a + b) / 2
6          if (c^n + c - 1) > 0 then
7              ...
8          else
9              ...
10         end
11         u = ...
12     end
13 endfunction

```

- b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. a) Montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* : $f(u_n) = n$.
 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ définie par :

$$F : (x, y) \mapsto x^2 y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$$

11. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x, y) de $]0, +\infty[^2$.

b) Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur \mathbb{R}_+ de l'équation (E_3) définie sans la partie **B**.

12. a) Écrire la matrice hessienne, notée H , de la fonction F au point (u_3, u_3^2) .

b) Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant :

$$\lambda_1 \lambda_2 = -6u_3^2 - 2$$

13. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2

On définit, pour tous réels a et b , $M(a, b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Déterminer une base de E et sa dimension.

b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**

Justifier que la matrice $M(0, 0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**

Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a, 0)$.

a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A .

b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.**

Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0, b)$.

a) Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 est $M(a, b)$.

On pose :

$$v_1 = (1, 1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\text{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .

c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B}' .

d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer :

$$X \text{ est un vecteur propre de } N \text{ associé à la valeur propre } \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à} \\ \text{la valeur propre } \lambda \\ \text{et} \\ z = t = 0 \end{cases}$$

e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.

Déterminer les valeurs propres de T . En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.

f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.

Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable ?

g) Montrer l'équivalence :

$$M(a, b) \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow a^2 + 10ab + b^2 > 0$$

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > b \\ a \frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b .

2. Déterminer la fonction de répartition de X .

3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Montrer que la variable aléatoire $bU^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b .
- b) En déduire une fonction **Scilab** d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X .
- c) On considère la fonction **Scilab** ci-dessous.
Que contient la liste L renvoyée par la fonction `mystere` ?

```

1  function L = mystere(a, b)
2      L = []
3      for p = 2 : 6
4          S = 0
5          for k = 1 : 10 ^ p
6              S = S + pareto(a,b)
7          end
8          L = [L, S / 10 ^ p]
9      end
10 endfunction

```

- d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b .
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```

--> mystere(2,1)
ans =
    1.9306917    1.9411352    1.9840089    1.9977684    2.0012415
--> mystere(3,2)
ans =
    3.1050951    3.0142956    2.9849407    2.9931656    2.9991517
--> mystere(1,4)
ans =
    21.053151    249.58609    51.230522    137.64549    40.243918

```

4. a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{ab}{a-1}$$

- b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on cherche à déterminer un estimateur performant de b .

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \frac{3b^3}{x^4} & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X .

On définit :

$$Y_n = \min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

5. a) Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $\mathbb{P}([Y_n > x])$.
- b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.
- c) Montrer que $Y'_n = \frac{3n-1}{3n} Y_n$ est un estimateur sans biais de b .
Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
6. a) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n .
- b) En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme αZ_n où α est un réel à préciser.
Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
7. Entre Y'_n et Z'_n , quel estimateur choisir ? Justifier.

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a .

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X .

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance et la variance de W_n .
9. On définit, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$M_n = \frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n} \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n}(a M_n - 1)$$

- a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
- b) En déduire que l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n} M_n} ; \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n} M_n} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
On admettra que $\Phi(2) \geq 0,975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.