EDHEC 2020

Exercice 1

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En effet : ${}^t0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = -0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$.

× Comme $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, M vérifie : ${}^tM = -M$.

× Comme $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, N vérifie : ${}^tN = -N$.

Démontrons : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) = -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)$) . On a :

$$\begin{array}{rcll} {}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) & = & \lambda \cdot {}^tM + \mu \cdot {}^tN & \\ & = & \lambda \cdot (-M) + \mu \cdot (-N) & \textit{(car } (M,N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2 \\ & = & -\lambda \cdot M - \mu \cdot N & \\ & = & -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) & \end{array}$$

On a bien : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$ □

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \ = \ ({}^tA)\, M + M\, A$$

2. a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer : $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(f(M)\big) = -f(M)$).

$$\begin{array}{rcll} {}^t\big(f(M)\big) & = & {}^t\big(({}^tA)\, M + M\, A\big) & \\ & = & {}^t(({}^tA)M) + {}^t(M\,A) & \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ & = & ({}^tM)\big({}^t({}^tA)\big) + ({}^tA)\,({}^tM) & \\ & = & (-M)A + ({}^tA)\,(-M) & \textit{(car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\textit{)} \\ & = & -MA - ({}^tA)\, M = -f(M) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$ □

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire
  Soit $(M,N) \in \big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)^2$ et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) & = & ({}^tA)\,(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) + (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)\,A \\ & = & \lambda \cdot ({}^tA)M + \mu \cdot ({}^tA)N + \lambda \cdot MA + \mu \cdot NA \\ & = & \lambda \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) + \mu \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) \\ & = & \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est bien une application linéaire.}}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
  D'après la question précédente, pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien à valeurs dans } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

□

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J,K,L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Il existe donc $(a,b,c,d,e,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^9$ tel que : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & {}^tM = -M \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -a \\ d & = & -b \\ g & = & -c \\ b & = & -d \\ e & = & -e \\ h & = & -f \\ c & = & -g \\ f & = & -h \\ i & = & -i \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ \middle| \ a = 0,\ d = -b,\ g = -c,\ e = 0,\ h = -f,\ i = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ b \cdot J + c \cdot K + f \cdot L \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(J,K,L)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ains, } \mathscr{B} = (J,K,L) \text{ est bien une famille génératrice de } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

- On présente ici $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sous la forme d'un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Cette forme permet de pouvoir écrire $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Il est relativement fréquent dans les sujets d'avoir à étudier des ensembles paramétrés. La méthode illustrée ci-dessus possède un double avantage. En effet, l'écriture $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\,(J,K,L)$ permet de conclure :
  - × que $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
  - × que la famille (J,K,L) est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- Ce dernier point est important pour exhiber une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
  - × si la famille (J,K,L) est libre, c'est alors une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
  - × sinon, si la famille (J,K,L) est liée, on peut extraire de (J,K,L) une base $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. La famille $\mathcal{G}$ n'est autre que la famille (J,K,L) dans laquelle on a retiré tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de (J,K,L).

□

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot J + \lambda_2 \cdot K + \lambda \cdot L = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. $(*)$

$$\begin{aligned}
\text{Or :} \quad (*) &\iff \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \iff \{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (J,K,L) \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est :
  - × génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ (d'après la question précédente).
  - × libre.

  On en déduit que c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3.}$$ □

4. a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

Démonstration.

- On a :
$$\begin{aligned} f(J) &= ({}^tA)\, J + J\, A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(J) = -J - L}$$

- On a :
$$\begin{aligned} f(K) &= ({}^tA)\, K + K\, A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(K) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

- On a :
$$\begin{aligned} f(L) &= ({}^tA)\, L + L\, A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(L) = -L}$$ □

b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On a démontré précédemment que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et (J, K, L) est en une base. Par caractérisation de l'image d'une application linéaire, on a :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\left(f(J), f(K), f(L)\right) & \\ & = & \mathrm{Vect}\left(-J-L, 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}, -L\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(-J-L, -L\right) & \\ & = & \mathrm{Vect}\left(-J, -L\right) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ vecteur en lui ajoutant l'opposé du } 2^{ème}\textit{)} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(J, L\right) & \textit{(on met à jour les deux vecteurs en les multipliant tous les deux par } -1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(J, L\right)}$$

- Ainsi la famille (J, L) :
  × engendre $\mathrm{Im}(f)$,
  × est libre car constituée de deux matrices non colinéaires.

  On en conclut que la famille (J, L) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit finalement : } \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) \ = \ \mathrm{Card}\left((J, L)\right) \ = \ 2.}$$

Commentaire

- Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(-J-L, -L\right)$, la famille $(-J-L, -L)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. On aurait ainsi pu terminer la question avec cette famille. Cependant, c'est plutôt un bon réflexe que de simplifier la famille génératrice obtenue. Pour se faire, il est primordial de connaître précisément les opérations qui ne modifient pas l'espace vectoriel engendré par la famille étudiée.
- L'énoncé stipule que la base obtenue ne doit que contenir des matrices de $\mathscr{B}$. C'est donc certainement la forme (J, L) qui était attendue ici.
- Notons enfin que l'on pouvait démontrer le caractère libre en rappelant que (J, L) est une sous-famille de la famille (J, K, L) qui est libre en tant que base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

□

c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) & + & \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = 3 - 2 = 1.}$$

- De plus, d'après ce qui précède : $f(K) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{D'où : } K \in \mathrm{Ker}(f).}$$

- Ainsi, la famille (K) est :
  $\times$ une famille libre de $\text{Ker}(f)$, car constituée uniquement d'une matrice non nulle,
  $\times$ telle que : $\text{Card}\big((K)\big) = 1 = \dim\big(\text{Ker}(f)\big)$.
  On en déduit que la famille (K) est une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(K).}$$ □

5. a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède : $f(J) = (-1) \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L$.
  On en conclut : $\text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- D'après ce qui précède : $f(K) = 0 \cdot J + 0 \cdot K + 0 \cdot L$.
  On en conclut : $\text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(K)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- D'après ce qui précède : $f(L) = 0 \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L$.
  On en conclut : $\text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F = \text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$ □

b) En déduire les valeurs propres de f.

Démonstration.
La matrice F étant triangulaire (inférieure), ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi : $\text{Sp}(F) = \{-1, 0\}$.

$$\boxed{\text{Comme } F = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\text{, on en conclut : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(F) = \{-1, 0\}.}$$ □

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer le rang de $f + \text{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \text{rg}(f + \text{id}) & = & \text{rg}(F + I) & \textit{(car F et I sont les représentations matricielles dans la base $\mathscr{B}$ des endomorphismes f et id)} \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) & \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ 2 & \end{array}$$

La dernière égalité est vérifiée car la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est libre (constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(f+\mathrm{id}) = 2.}$$

- Comme $f+\mathrm{id}$ est un endomorphisme de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, on a, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f+\mathrm{id})\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \dim\big(E_{-1}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big) = 3-2 = 1.}$$

- On a démontré précédemment : $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0\}$. Or :

$$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_{-1}(f)\big) = 1+1 = 2 \neq \dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big)$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Dans cette dernière question, on démontre que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir, notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A.
- Considérons un espace vectoriel E de dimension finie.
  Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons λ_1, ..., λ_m les valeurs propres distinctes de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cet exercice, même si elle est un peu cachée. Ici, f a deux valeurs propres : 0 et -1. De plus :
  × le sous-espace propre $E_0(f)$ a pour base la famille (K).
  × le sous-espace propre $E_{-1}(f)$ a pour base la famille (L).
  En effet, comme $f(L) = -L$, on a : $L \in E_{-1}(f)$ et ainsi : $\mathrm{Vect}\,(L) \subset E_{-1}(f)$.
  On conclut : $\mathrm{Vect}\,(L) = E_{-1}(f)$ par égalité des dimensions de ces deux espaces vectoriels (puisqu'on a démontré : $\dim\big(E_{-1}(f)\big) = 1$).

  La famille (K, L) est une famille libre de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ car elle est constituée de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
  On complète alors cette famille en une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ en lui adjoignant le vecteur J. La matrice représentative de f dans la base (J, K, L) obtenue est triangulaire (inférieure). □

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$, où σ est strictement positif.
On rappelle que la fonction $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\ dt$$

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_X(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt$$

Comme les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$ sont convergentes, on effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = -x \ \Rightarrow\ u = x \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt &= \int_{x}^{+\infty} f_X(-u)\ du \\
&= \int_{x}^{+\infty} f_X(u)\ du && \textit{(car } f_X \textit{ est paire)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\ du - \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\ du \\
&= 1 - F_X(x) && \textit{(car } f_X \textit{ est une densité de probabilité)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(-x) = 1 - F_X(x)}$$

□

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y, définie par :

$$F_Y : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 2\,F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de la v.a.r. Y : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors : $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) & \\ & = & F_X(x) - F_X(-x) & \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & F_X(x) - \big(1 - F_X(x)\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 2\, F_X(x) - 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 2\, F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

Démonstration.

- La fonction F_Y est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que transformée affine de F_X qui est continue sur cet intervalle,
  × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0$ (par définition de F_Y).
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = 2\, F_X(0) - 1 = 2\, \dfrac{1}{2} - 1 = 0$

    Ainsi :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) \;=\; F_Y(0) \;=\; \lim_{x \to 0^+} F_Y(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

On utilise ici une des propriétés de la v.a.r. X de loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$: $F_X(0) = \dfrac{1}{2}$. On rappelle que la démonstration s'effectue comme suit.

- Comme f_X est une densité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt$ est convergente.
- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt & = & 2 \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt & \textit{(car } f_X \textit{ est paire)} \\ & = & 2\, F_X(0) & \end{array}$$

- La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_Y de Y, on dérive sa fonction de répartition F_Y sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in\,]-\infty, 0[$, alors :
$$f_Y(x) \ = \ F_Y'(x) \ = \ 0$$
  × Si $x \in\,]0, +\infty[$, alors :
$$f_Y(x) \ = \ F_Y'(x) \ = \ 2\,F'(x) \ = \ 2\,f_X(x) \ = \ \frac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}} \ \exp\left(-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}\right)$$
  × On choisit enfin : $f_Y(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_Y : \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}} \ \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\,\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{array} \right. .}$$

$\square$

c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Y) = \sigma\,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f_Y(t)\,dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\,f_Y(t)\,dt$.
- Tout d'abord, comme la fonction f_Y est nulle en dehors de $]0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f_Y(t)\,dt \ = \ \int_0^{+\infty} t\,f_Y(t)\,dt$$
- De plus, la fonction $t \mapsto t\,f_Y(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f_Y(t)\,dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- Soit $B \in]0, +\infty[$.
$$\begin{aligned}
\int_0^B t\,f_Y(t)\,dt &= \int_0^B t\,\frac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\,\exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right)\,dt && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}} \int_0^B t\,\exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right)\,dt \\
&= \frac{2}{\cancel{\sigma}\,\sqrt{2\,\pi}} \left[\,-\sigma^{\cancel{2}}\,\exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right)\right]_0^B \\
&= -\frac{2\,\sigma}{\sqrt{2\,\pi}}\,\exp\left(-\frac{B^2}{2\,\sigma^2}\right) + \frac{2\,\sigma}{\sqrt{2\,\pi}}
\end{aligned}$$

- Or, comme $2\sigma^2 > 0$: $\lim\limits_{B\to+\infty} \exp\left(-\dfrac{B^2}{2\sigma^2}\right) = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } Y \text{ admet une espérance et :}\\ \mathbb{E}(Y) \;=\; \dfrac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}.\end{array}}$$

□

3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.
On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_i$.

a) Montrer que S_n est un estimateur de σ, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ, que l'on notera T_n, construit de façon affine à partir de S_n.

Démonstration.

- La v.a.r. $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ s'exprime :
  - × à l'aide d'un n-échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ de la v.a.r. Y,
  - × sans mention du paramètre σ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } S_n \text{ est donc un estimateur de } \sigma.}$$

- La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. Elle admet donc un biais.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \dfrac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\,\sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } b_\sigma(S_n) = \mathbb{E}(S_n) - \sigma = \sigma\left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} - 1\right).}$$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{lrcll}
 & \mathbb{E}(S_n) & = & \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & \\
\text{donc} & \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\mathbb{E}(S_n) & = & \sigma & \\
\text{d'où} & \mathbb{E}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,S_n\right) & = & \sigma & \textit{(par linéarité de l'espérance)}
\end{array}$$

On pose alors : $T_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,S_n$.

× La v.a.r. $T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ s'exprime :
- à l'aide d'un n-échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la v.a.r. Y,
- sans mention du paramètre σ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ S_n \text{ est donc un estimateur de } \sigma.}$$

× La v.a.r. T_n admet une espérance en tant que transformée linéaire de la v.a.r. S_n qui en admet une. De plus, d'après les équivalences précédentes :

$$\mathbb{E}(T_n) \ = \ \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ S_n\right) \ = \ \sigma$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ S_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma.}$$

□

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Démonstration.

- Par formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= \sigma^2 + 0^2 && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2}$$

- On remarque :

$$\mathbb{E}(Y^2) \ = \ \mathbb{E}\big((\,|X|\,)^2\big) \ = \ \mathbb{E}(X^2) \ = \ \sigma^2$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y^2) = \sigma^2}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) \ = \ \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \ = \ \sigma^2 - \left(\sigma\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2 \ = \ \sigma^2 - \sigma^2\ \frac{2}{\pi} \ = \ \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{\pi - 2}{\pi}\ \sigma^2}$$

- La v.a.r. S_n admet une variance en tant que combinaison de v.a.r. qui en admettent une, et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\ \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) && \textit{(car } Y_1, \ldots, Y_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi - 2}{\pi}\ \sigma^2 && \textit{(d'après ce qui précède)} \\ &= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n} \frac{\pi - 2}{\pi}\ \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \frac{\pi - 2}{n\ \pi}\ \sigma^2}$$

□

c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une variance en tant que transformée linéaire de S_n qui en admet une. Elle admet donc un risque quadratique.
- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned} r_\sigma(T_n) &= \mathbb{V}(T_n) + \big(b_\sigma(T_n)\big)^2 \\ &= \mathbb{V}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, S_n\right) + 0^2 \quad \textit{(car } T_n \textit{ est un estimateur sans biais de } \sigma\textit{)} \\ &= \frac{\pi}{2}\, \mathbb{V}(S_n) \\ &= \frac{\cancel{\pi}}{2}\, \frac{\pi - 2}{n\, \cancel{\pi}}\, \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } r_\sigma(T_n) = \frac{\pi - 2}{2\,n}\, \sigma^2.}$$

- On remarque : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\pi - 2}{2\,n} = 0$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} r_\sigma(T_n) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n \text{ est un estimateur convergente de } \sigma.}$$

□

4. On rappelle qu'en **Scilab**, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i, j, 'nor', m, s)` simule dans un tableau à `i` lignes et `j` colonnes, `i` $\times$ `j` variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance `m` et de variance `s`^{2}.
Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
X = ------ // simulations de X1, ..., Xn
Y = ------ // simulations de Y1, ..., Yn
S = ------
T = ------
```

Démonstration.
On propose le programme **Scilab** suivant :

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
X = grand(1, n, 'nor', 0, sigma) // simulations de X1, ..., Xn
Y = abs(X) // simulations de Y1, ..., Yn
S = (1/n) ⋆ sum(Y)
T = sqrt(%pi / 2) ⋆ S
```

Détaillons l'obtention de ce script.

- **Début du programme**
  On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier `n` et pour l'écart-type `sigma`.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
```

- **Simulations des v.a.r.**
  × On commence par simuler un n-échantillon de la v.a.r. X où $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. D'après l'énoncé, cela s'effectue à l'aide de la commande suivante :

```
X = grand(1, n, 'nor', 0, sigma)
```

  × On simule ensuite un n échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ de la v.a.r. $Y = |X|$.

```
Y = abs(X)
```

  × À l'aide de la simulation de $(Y_1, \dots, Y_n)$, on en déduit une simulation de $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

```
S = (1/n) * sum(Y)
```

Commentaire

Notons que l'on pouvait procéder de manières différentes. Par exemple :
- en exploitant les commances **Scilab** :

```
S = mean(Y)
```

- en codant la somme « à la main »

```
S = 0
for k = 1:n
    S = S + Y(k)
end
S = (1/n) * S
```

Étant donné l'espace alloué par le programme (une ligne), le concepteur avait certainement en tête la première ou la deuxième solution. Cependant, il est raisonnable de penser que toute réponse juste sera comptée comme telle. Ainsi, la dernière solution rapporte certainement la totalité des points.

  × On simule enfin la v.a.r. $T_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n$.

```
T = srqt(%pi / 2) * S
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

Démonstration.

- Dans le cas où $n = 1$, l'urne U contient une unique boule numérotée 1. Ainsi, l'événement $[X = 1]$ est toujours réalisé (autrement dit : $[X = 1] = \Omega$).
- Comme l'événement $[X = 1]$ est réalisé, on pioche 1 boule dans l'urne V. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès p (probabilité de piocher une boule blanche).
- La v.a.r. Y prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p).}$$

Commentaire

En toute rigueur, on a ici démontré que la **loi conditionnelle de Y sachant** $[X = 1]$ est la loi $\mathcal{B}(p)$. Cependant, comme $[X = 1] = \Omega$, cela revient bien à dire que la loi de Y est la loi $\mathcal{B}(p)$. En effet :

- comme $n = 1$, on peut obtenir 0 ou 1 boule blanche en piochant dans l'urne V.
  Ainsi : $Y(\Omega) \subset \{0, 1\}$.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y=1]) & = & \mathbb{P}([Y=1] \cap [X=1]) & \textit{(car } [X=1] = \Omega\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}([X=1])\ \mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1]) & \\ & = & \mathbb{P}(\Omega) \times p & \textit{(car la loi conditionnelle de } Y \textit{ sachant } [X=1] \textit{ est } \mathcal{B}(p)\textit{)} \\ & = & 1 \times p \ = \ p & \end{array}$$

On retrouve bien : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

□

On revient au cas général

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- La première partie de l'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi n issues numérotées de 1 à n.
- La v.a.r. X correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

□

3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X = k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}(\,[Y = i]\,)$.

Démonstration.

- Si l'événement $[X = k]$ est réalisé, c'est qu'on a pioché la boule numérotée k dans l'urne U. On effectue alors k tirages dans l'urne V.
  Cette deuxième partie de l'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir une boule blanche dans l'urne V).
- La v.a.r. Y correspond au nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit que la loi conditionnelle de } Y \text{ sachant } [X = k] \text{ est la loi } \mathcal{B}(k, p).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i}\, p^i\, (1-p)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}}$$

□

4. On rappelle les commandes **Scilab** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$,
- `grand(1, 1, 'bin', n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p,
- `grand(1, 1, 'geom', p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p,
- `grand(1, 1, 'poi', a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
X = ------
Y = ------
```

Démonstration.

- **Début du programme**
  Les valeurs de `n` et de `p` sont choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
```

- **Simulation de X**
  D'après la question *2.*, la v.a.r. X suit la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. On stocke alors dans la variable `X` une simulation de la v.a.r. X à l'aide de l'appel suivant :

```
X = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
```

  Notons qu'on simule ainsi un tirage dans l'urne U. Le numéro de la boule piochée est donc stockée dans la variable `X`.

- **Simulation de Y**
  En ligne 3, le numéro k de la boule piochée dans l'urne U est stockée dans la variable `X`. Une fois ce nombre connu, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi $\mathcal{B}(k, p)$ (d'après la question précédente). On stocke alors dans la variable `Y` une simulation de la v.a.r. Y à l'aide de l'appel suivant :

```
4  Y = grand(1, 1, 'bin', X, p)
```

□

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

Démonstration.

- Démontrons : $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour cela, on procède par double inclusion.
  - $(\subset)$ On effectue au maximum n tirages dans l'urne V. Le nombre de boules blanches obtenues peut donc varier au plus entre 0 et n. Donc : $Y(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
  - $(\supset)$ Montrons maintenant que la v.a.r. Y peut prendre chaque valeur entière entre 0 et n.
    Si on obtient la boule numérotée n dans l'urne U, on effectue alors n tirages dans l'urne V.
    - × Si on n'obtient aucune boule blanche, alors l'événement $[Y = 0]$ est réalisé.
    - × Si on obtient 1 boule blanche, alors l'événement $[Y = 1]$ est réalisé.
    - × $\cdots$
    - × Si on obtient n boules blanches, alors l'événement $[Y = n]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Finalement : } Y(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

- On donne dans cette démonstration des exemples de tirages qui réalisent les événements $[Y = i]$. Il était bien sûr possible d'en choisir d'autres.
  Par exemple, pour l'événement $[Y = 0]$, si on obtient la boule numérotée 2 dans l'urne U, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne V.
  Si ce 2-tirage ne comporte pas de boule blanche, alors l'événement $[Y = 0]$ est réalisé.
- On peut un peu moins détailler la démonstration de cette question en rédigeant différemment :
  Si on obtient la boule numérotée n dans l'urne U, alors on effectue un n-tirage dans l'urne V, les tirages dans cette urne peuvent fournir de 0 à n boules blanches. Donc, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, l'évément $[X = i]$ peut être réalisé.
- Comme l'énoncé demande de **justifier** : $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, on peut penser qu'une réponse brève était attendue.
- Remarquons que pour la suite de l'exercice, notamment la détermination de la loi de Y, l'inclusion « $Y(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ » suffit.

- La famille $(\,[X=k]\,)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=0]) & \\
 & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=0]) & \textit{(car : } \forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k])\neq 0\textit{)} \\
 & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}\times\dbinom{k}{0}\ p^0\ (1-p)^{k-0} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.}} \textit{ et } \textbf{\textit{3.}}\textit{)} \\
 & = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(1-p)^k & \\
 & = & \dfrac{1}{n}\times(1-p)^1\ \dfrac{1-(1-p)^n}{\cancel{1}-(\cancel{1}-p)} & \textit{(car : } 1-p\neq 1\textit{)} \\
 & = & \dfrac{(1-p)\ \big(1-(1-p)^n\big)}{n\ p} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Comme } q=1-p, \text{ on obtient : } \mathbb{P}([Y=0]) = \dfrac{q\ (1-q^n)}{n\ (1-q)}.}$$

□

b) Écrire, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(\,[Y=i]\,)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Démonstration.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$.
La famille $(\,[X=k]\,)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=i]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=i]) & \\
 & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) & \textit{(car : } \forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k])\neq 0\textit{)} \\
 & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) & \textit{(car } X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)} \\
 & = & \dfrac{1}{n}\left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{i-1}\mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i])} + \sum\limits_{k=i}^{n}\mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i])\right) & \\
 & = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=i}^{n}\dbinom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.}}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([Y=i]) = \dfrac{1}{n}\ p^i \sum\limits_{k=i}^{n}\dbinom{k}{i}\ (1-p)^{k-i}}$$

□

6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Démontrer : $i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$i \binom{k}{i} = i \frac{k!}{i!\ (k-i)!} = \frac{k!}{(i-1)!\ (k-i)!}$$
- De plus :
$$k \binom{k-1}{i-1} = k \frac{(k-1)!}{(i-1)!\ \big((k-\cancel{1})-(i-\cancel{1})\big)!} = \frac{k!}{(i-1)!\ (k-i)!}$$

$$\boxed{i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}}$$

Commentaire

Cette relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se démontrer par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à k éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient k individus)
On souhaite alors construire une partie P à i éléments de cet ensemble contenant 1 élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de i individus dans lequel figure 1 représentant de ces individus).*
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à i éléments de E : $\binom{k}{i}$ possibilités.

On distingue ensuite 1 élément de cet ensemble P : $\binom{i}{1}$ possibilités.

(on choisit d'abord les i individus et on élit ensuite 1 représentants de ces individus)

Ainsi, il y a $\binom{k}{i} \binom{i}{1} = \binom{k}{i}\ i$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\binom{k}{1}$ possibilités.

On choisit ensuite $i-1$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{k-1}{i-1}$ possibilités.

(on choisit d'abord 1 représentant puis on leur adjoint un groupe de $i-1$ individus)

Ainsi, il y a $\binom{k}{1} \binom{k-1}{i-1} = k \binom{k-1}{i-1}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat souhaité. □

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

Démonstration.

- Tout d'abord, la v.a.r. Y admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y) & = & \sum\limits_{i=0}^{n} i\, \mathbb{P}([Y=i]) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} i\, \mathbb{P}([Y=i]) & \textit{(car : } 0 \times \mathbb{P}([Y=0]) = 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} i \left(\dfrac{1}{n}\ p^i \sum\limits_{k=i}^{n} \dbinom{k}{i}\ (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=i}^{n} i\ \dbinom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} i\ \dbinom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} i\ \dbinom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} k\ \dbinom{k-1}{i-1}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=1}^{k} \dbinom{k-1}{i-1}\ p^i\ q^{k-i} \right).}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\,p}{2}$.

Démonstration.
On reprend les calculs précédents.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y) & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=1}^{k} \dbinom{k-1}{i-1}\ p^i\ q^{k-i} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dbinom{k-1}{i}\ p^{i+1}\ q^{k-(i+1)} \right) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \dfrac{p}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dbinom{k-1}{i}\ p^{i}\ q^{(k-1)-i} \right) & \\
& = & \dfrac{p}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k\ (p+q)^{k-1} & \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
& = & \dfrac{p}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k & \textit{(car : } p+q=1\textit{)} \\
& = & \dfrac{p}{\cancel{n}} \times \dfrac{\cancel{n}(n+1)}{2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\ p}{2}.}$$

□

7. a) Établir :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\,(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2}\, p^i\, q^{k-i} \right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. $Y(Y-1)$ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie (car Y est une v.a.r. finie).
- De plus, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^{n} i\,(i-1)\,\mathbb{P}([Y=i]) \\
&= \sum_{i=2}^{n} i\,(i-1)\,\mathbb{P}([Y=i]) && \textit{(car : } 0 \times (-1) \times \mathbb{P}([Y=0]) = 0 \textit{ et } 1 \times 0 \times \mathbb{P}([Y=1]) = 0\textit{)} \\
&= \sum_{i=2}^{n} i\,(i-1) \left(\frac{1}{n}\, p^i \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i}\,(1-p)^{k-i} \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} i\ (i-1)\ \binom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{2 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} i\ (i-1)\ \binom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{k} i\ (i-1)\ \binom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{k} k\ (i-1)\ \binom{k-1}{i-1}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{k} k\ (k-1)\ \binom{k-2}{i-2}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.a)}} \textit{ appliquée à } i-1 \textit{ et } k-1\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\,(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2}\, p^i\, q^{k-i} \right).}$$ □

b) Montrer que l'on a :
$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \ = \ \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

Démonstration.
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On reprend les calculs précédents.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\ (k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2}\ p^i\ q^{k-i} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\ (k-1) \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i}\ p^{i+2}\ q^{k-(i+2)} \right) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\ (k-1) \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i}\ p^i\ q^{(k-2)-i} \right)
\end{aligned}$$

Par formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\ (p+q)^{k-1} \\
&= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1) && \textit{(car : } p+q=1\textit{)} \\
&= \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\,k && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \\
&= \frac{p^2}{\cancel{n}} \left(\frac{(n-1)\,\cancel{n}\,(2\,(n-1)+1)}{6} + \frac{(n-1)\,\cancel{n}}{2} \right) \\
&= p^2\ (n-1)\ \frac{(2n-1)+3}{6} \\
&= p^2\ (n-1)\ \frac{2n+2}{6} \\
&= p^2\ (n-1)\ \frac{n+1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) = \frac{(n^2-1)\ p^2}{3}.}$$

☐

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

Démonstration.

- D'une part, pour $n = 1$, on obtient :

$$\frac{(1^2-1)\,p^2}{3} \ = \ 0$$

- D'autre part, d'après la question , lorsque $n = 1$, alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\,(p)$.
  - × On en déduit que la v.a.r. $Y(Y-1)$ admet une espérance, car c'est une v.a.r. finie.
  - × De plus, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) \ = \ 0 \times (0-1) \times \mathbb{P}([Y=0]) + 1 \times 0 \times \mathbb{P}([Y=1]) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{L'expression de la question précédente reste donc valable pour } n = 1.}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que, dans le cas $n = 1$, la v.a.r. $Y\,(Y-1)$ est constante égale à 0.
Démontrons le.
Soit $\omega \in \Omega$.
Comme $n = 1$, alors : $Y(\Omega) \subset \{0, 1\}$. Deux cas se présentent alors :

- si $Y(\omega) = 0$, alors :

$$\big(Y\,(Y-1)\big)(\omega) \ = \ Y(\omega)\,\big(Y(\omega)-1\big) \ = \ 0 \times (-1) \ = \ 0$$

- si $Y(\omega) = 1$, alors :

$$\big(Y\,(Y-1)\big)(\omega) \ = \ Y(\omega)\,\big(Y(\omega)-1\big) \ = \ 1 \times 0 \ = \ 0$$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\big(Y\,(Y-1)\big)(\omega) = 0$. Ainsi la v.a.r. $Y\,(Y-1)$ est constante égale à 0. $\square$

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une variance car c'est une v.a.r. finie.
- De plus, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) \ = \ E\left(Y^2\right) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2$$

Or :

$$Y^2 \ = \ Y(Y-1) + Y$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) \ &= \ \mathbb{E}\big(Y(Y-1) + Y\big) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \\ &= \ \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) + \mathbb{E}(Y) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) + \mathbb{E}(Y) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2}$$

Commentaire

Rappelons qu'il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. On peut même trouver des questions simples en bout de sujet comme ici. Il est donc important de commencer son épreuve par une brève lecture de sujet pour les repérer.

$\square$

Problème

On convient que, pour tout réel x, on a : $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ est continue sur le **segment** $[0,1]$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - $\times$ $f_1 : x \mapsto x^n$ continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale,
  - $\times$ $f_2 : x \mapsto (1+x)^2$
    - continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale,
    - qui `NE S'ANNULE PAS` sur $[0,1]$

  $\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } I_n \text{ est bien définie.}}$

- De même, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ est continue sur le **segment** $[0,1]$.

  $\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } J_n \text{ est bien définie.}}$

□

2. Calculer I_0 et I_1.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2}\, dx = \int_0^1 (1+x)^{-2}\, dx = \left[\frac{1}{-2+1}\,(1+x)^{-2+1} \right]_0^1 = -\left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+0} \right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- Ensuite :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{(1+x)^2}\, dx$$

  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \left[x \times \left(-\dfrac{1}{1+x}\right) \right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 1 \times \left(-\dfrac{1}{1+x}\right) \, dx \\ & = & -\dfrac{1}{1+1} + 0 + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x} \, dx \\ & = & -\dfrac{1}{2} + \left[\, \ln\left(|1+x|\right) \, \right]_0^1 \\ & = & -\dfrac{1}{2} + \ln(2) - \cancel{\ln(1)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

□

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n & = & \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{(1+x)^2} \, dx + 2 \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \, dx + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \, dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \dfrac{2\, x^{n+1}}{(1+x)^2} + \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \, dx \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^n \, \left(x^2 + 2\, x + 1\right)}{(1+x)^2} \, dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^n \, \cancel{(1+x)^2}}{\cancel{(1+x)^2}} \, dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 x^n \, dx \\ & = & \left[\dfrac{1}{n+1} \, x^{n+1} \right]_0^1 \; = \; \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2\, I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}}$$

□

b) En déduire I_2.

Démonstration.
D'après la question précédente : $I_2 + 2\, I_1 + I_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} I_2 & = & 1 - 2\, I_1 - I_0 \\ & = & 1 - 2 \left(\ln(2) - \dfrac{1}{2} \right) - \dfrac{1}{2} \qquad \textit{(d'après \textbf{2.})} \\ & = & \dfrac{3}{2} - 2\, \ln(2) \end{array}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{3}{2} - 2\, \ln(2)}$$

□

c) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 n = input('donnez une valeur pour n : ')
2 a = 1/2
3 b = log(2) - 1/2
4 for k = 2:n
5     aux = a
6     a = ------
7     b = ------
8 end
9 disp(b)
```

Démonstration.
Détaillons les différents éléments présents dans ce script.

- **Début du programme**
  - × En ligne 1, on stocke dans la variable `n`, une valeur pour n à l'aide d'une interface de dialogue avec l'utilisateur :

```
1 n = input('donnez une valeur pour n : ')
```

  - × En ligne 2 et 3, on définit les variables `a` et `b`.
    Initialement, ces deux variables sont affectées aux valeurs de I_0 et I_1.

```
2 a = 1/2
3 b = log(2) - 1/2
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 7 consistent à mettre à jour les variables `a` et `b` de sorte à ce qu'elles contiennent les valeurs successives de la suite (I_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
4 for k = 2:n
5     aux = a
6     a = b
7     b = 1/((k-2) + 1) - 2 ⋆ a + aux
8 end
```

Pour ce faire, on a introduit une variable auxiliaire `aux`. Détaillons le principe de cette boucle :

× avant le 1er tour de boucle :

$$\texttt{a} \text{ contient } I_0 \qquad \text{et} \qquad \texttt{b} \text{ contient } I_1$$

lors du 1er tour de boucle (`k` contient 2) :

`aux = a`	(`aux` contient alors I_0, dernière valeur en date de `a`)
`a = b`	(`a` contient alors I_1, dernière valeur en date de `b`)
`b = 1/((k-2) + 1) - 2 ⋆ a + aux`	(`b` contient alors $\dfrac{1}{0+1} - 2\ I_1 - I_0 = I_2$, valeur obtenue avec la relation de ***3.a)*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

× avant le $2^{\text{ème}}$ tour de boucle, d'après ce qui précède :

`a` contient I_1 et `b` contient I_2

lors du $2^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` contient 3) :

```
aux = a
```
(`aux` contient alors I_1, dernière valeur en date de `a`)

```
a = b
```
(`a` contient alors I_2, dernière valeur en date de `b`)

```
b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a + aux
```
(`b` contient alors $\dfrac{1}{1+1} - 2\ I_2 - I_1 = I_3$, valeur obtenue avec la relation de ***3.a)*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

× ...

× avant le $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle :

`a` contient I_{n-2} et `b` contient I_{n-1}

lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` contient n) :

```
aux = a
```
(`aux` contient alors I_{n-2}, dernière valeur en date de `a`)

```
a = b
```
(`a` contient alors I_{n-1}, dernière valeur en date de `b`)

```
b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a + aux
```
(`b` contient alors $\dfrac{1}{n+1} - 2\ I_{n-1} - I_{n-2} = I_n$, valeur obtenue avec la relation de ***3.a)*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

- **Fin du programme**
À l'issue de cette boucle, la variable `b` contient la quantité I_n. Il n'y a plus qu'à renvoyer la valeur contenue dans `b`.

```
9  disp(b)
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On a démontré dans cette question que si, avant le $k^{\text{ème}}$ tour de boucle :

  `aux` contient I_{k-2}, `a` contient I_{k-1} et `b` contient I_k

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  `aux` contient I_{k-1}, `a` contient I_k et `b` contient I_{k+1}

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `b` contient I_n.

Commentaire

- Il est à noter que si on teste la fonction avec une valeur de `n` strictement inférieure à 2, alors on n'entre pas dans la boucle (l'instruction `2:n` crée une matrice ligne vide). Dans ce cas, la variable `b` n'est pas mise à jour et contient à la fin du programme I_1, soit la valeur initialement affectée à `b`. Ainsi, la fonction renvoie la bonne valeur aussi lorsque la variable `n` prend la valeur 1 (mais pas quand `n` prend la valeur 0).
- Pour le calcul informatique du $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite (z_n) récurrente d'ordre 1 (dont chaque terme dépend uniquement du précédent), il suffit d'introduire une variable `u` et de mettre à jour son contenu à l'aide d'une boucle. La suite (I_n) de l'énoncé est récurrente d'ordre 2 (chaque terme dépend des deux précédents). Obtenir son $n^{\text{ème}}$ terme nécessite non pas deux mais bien trois variables distinctes (la mise à jour de `a` écrase la valeur précédente de `a` qui est pourtant nécessaire pour définir la nouvelle valeur de `b`. On fait donc appel à une variable auxiliaire `aux` qui permet de stocker en mémoire de l'information.

□

4. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{array}{lccccccl}
 & 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 & & \\
\text{donc} & 1 & \leqslant & 1+x & \leqslant & 2 & & \\
\text{d'où} & 1 & \leqslant & (1+x)^2 & \leqslant & 4 & & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & 1 & \geqslant & \dfrac{1}{(1+x)^2} & \geqslant & \dfrac{1}{4} & & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{alors} & x^n & \geqslant & \dfrac{x^n}{(1+x)^2} & \geqslant & \dfrac{x^n}{4} & & \textit{(car } x^n \geqslant 0\textit{)} \\
\text{enfin} & x^n & \geqslant & \dfrac{x^n}{(1+x)^2} & \geqslant & 0 & & \textit{(car } \dfrac{x^n}{4} \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_0^1 x^n\, dx & \geqslant & I_n & \geqslant & \displaystyle\int_0^1 0\, dx \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
\dfrac{1}{n+1} & & & & 0 \quad \textit{(d'après le calcul de } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :
  $$\forall t \in [a, b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$m(b-a) = \int_a^b m\ dt \ \leqslant \ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant \ \int_a^b M\ dt = M(b-a)$$
- L'idée à retenir est que pour encadrer une intégrale, on commence systématiquement par encadrer l'intégrande.

□

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \ \leqslant \ I_n \ \leqslant \ \frac{1}{n+1}$$
Or :
× d'une part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
× d'autre part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

□

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n\, J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On procède par intégration par parties (IPP).
$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^n & & u'(x) & = & n\, x^{n-1} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array}\right.$$
Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

On obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \left[\, x^n \times \left(-\frac{1}{1+x}\right) \,\right]_0^1 - \int_0^1 n\,x^{n-1} \times \left(-\frac{1}{1+x}\right)\,dx \\ &= -\frac{1}{1+1} + 0 + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2} + n\,J_{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\,J_{n-1} - \frac{1}{2}}$$

□

6. a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$J_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\, \ln\left(|1+x|\right) \,\right]_0^1 = \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$$

$$\boxed{J_0 = \ln(2)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n\,\frac{\cancel{1+x}}{\cancel{1+x}}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Avec le même calcul qu'en } \textbf{\textit{3.a)}}\text{, on obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}.}$$

□

b) En déduire la valeur de J_1.

Démonstration.
D'après la question précédente : $J_0 + J_1 = \dfrac{1}{0+1} = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2).}$$

□

7. En utilisant les questions ***5.*** et ***6.***, compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 n = input('donnez une valeur pour n : ')
2 J = log(2)
3 for k = 1:(n-1)
4     J = ------
5 end
6 I = ------
7 disp(I)
```

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
  × En ligne 1, on stocke dans la variable `n`, une valeur de n à l'aide d'une interface de dialogue avec l'utilisateur.

```
1 n = input('donnez une valeur pour n : ')
```

  × En ligne 2, on définit la variable `J`.
  Cette variable est initialisée à J_0.

```
2 J = log(2)
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à mettre à jour la variable `J` de sorte à ce qu'elle contienne les valeurs successives de la suite (J_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
3 for k = 1:(n-1)
4     J = 1/k - J
5 end
```

  On a ici utilisé la relation obtenue en question ***6.a)*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - J_n$. Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n \ = \ \frac{1}{n} - J_{n-1}$$

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `J` contient la valeur J_{n-1} (puisque la variable `k` varie de 1 à `n` $-$ 1). On obtient alors la valeur de I_n en utilisant la relation démontrée en question ***5***.

```
6 I = n ⋆ J - 1/2
```

  On finit en renvoyant la valeur de `I`.

```
7 disp(I)
```

□

8. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

▸ **Initialisation**

× d'une part, d'après ***6.b)*** : $J_1 = 1 - \ln(2)$.

× d'autre part :

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = -\Big(\ln(2) - \frac{(-1)^{1-1}}{1}\Big) = -\big(\ln(2) - 1\big) = 1 - \ln(2)$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$)

× D'une part, d'après la question ***6.a)*** :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - J_n \\ &= \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \end{aligned}$$

× D'autre part :

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \\ =\ & (-1)^{n+1} \ln(2) - (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ =\ & (-1)^{n+1} \ln(2) - (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{n+1}\right) \\ =\ & (-1)^{n+1} \ln(2) - (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n+1} \\ =\ & (-1)^{n=1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + (-1)^{1+(n+1)+n} \frac{1}{n+1} \\ =\ & (-1)^{n=1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + (-1)^{2n+2} \frac{1}{n+1} \\ =\ & (-1)^{n=1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1} \qquad \textit{(car } 2n+2 \textit{ est pair)} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).}$$

□

9. a) Utiliser les questions ***4.*** et ***5.*** pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$
On en déduit : $I_n + \dfrac{1}{2} = n\, J_{n-1}$. Et donc :
$$\frac{I_n}{n} + \frac{1}{2\,n} \ = \ J_{n-1}$$
- Or, d'après la question ***4.*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0.}$$

Commentaire

- On pouvait également déduire des questions ***4.*** et ***5.*** un équivalent de (J_n) pour conclure quant à sa limite.
  × D'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$
  Or, d'après la question ***4.*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, J_{n-1} - \dfrac{1}{2} = 0$.
  D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, J_{n-1} = \dfrac{1}{2}$.
  × Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on obtient : $n\, J_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Ainsi :
  $$J_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,n}$$
  Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.
  On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0$.
- Ce n'était cependant sans doute pas la méthode attendue au regard de la question ***9.c)***. □

b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. Autrement dit :
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \ = \ 0$$

- Par continuité de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right| \ = \ 0$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right| \ = \ |(-1)^n| \left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \ = \ \left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ est convergente et : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).}$$

□

c) Utiliser la question ***5.*** pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha\, n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} \ = \ (n+1)\, J_n - \frac{1}{2}$$

Or, d'après la question ***4.*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, J_n - \dfrac{1}{2} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{n\to+\infty} (n+1)\, J_n = \frac{1}{2}.}$$

- Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on obtient : $(n+1)\, J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$J_n \ \underset{n\to+\infty}{\sim} \ \frac{1}{2\,(n+1)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,n}.}$$

□

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ***8.*** :

$$J_n \ = \ (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \ = \ (-1)^n\, u_n$$

- Or, d'après la question précédente : $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n}$. On en déduit : $(-1)^n\, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n}$. D'où :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(-1)^n\ 2\,n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n \times (-1)^n\ 2\,n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{2n}\ 2\,n} = \frac{(-1)^n}{1 \times 2\,n}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\,n}.}$$

□

b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\frac{(-1)^n}{2\,n} = -\frac{1}{2}\ \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ est convergente d'après } \textbf{\textit{9.b)}}, \\ \text{on en déduit que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{2\,n} \text{ est convergente.}\end{array}}$$

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ n'est pas une série à termes de signe constant. On ne peut donc pas lui appliquer (à elle ou son opposée) un critère de convergence des séries à termes positifs. On cherche alors à savoir si $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente.

× Tout d'abord, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2\,n}$, alors :

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^n}{2\,n}\right| = \frac{1}{2\,n}$$

× Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\,n} \geqslant 0$

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2\,n}$ aussi.

(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n|$ n'est pas convergente.

Autrement dit, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.

On en conclut que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente ou divergente.

Commentaire

La tournure de la 2nde partie de la question est suffisamment vague pour que l'on doncsidère plusieurs réponses comme acceptables. Il convient cependant d'être précis.

- Dire qu'on ne peut rien conclure car $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ n'est pas une série à termes positif est `FAUX` !
  D'ailleurs, on parvient à conclure quant à la convergence de cette série dans la question ***11***.
- dire qu'on ne peut pas utiliser directement les critères de convergence des séries à termes positifs est par contre acceptable et permet certainement de récupérer une partie des points de la question.

$\square$

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)\,u_{k+1} - k\,u_k + (-1)^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_k = (k+1)\,u_{k+1} - k\,u_k + (-1)^k \quad &\Leftrightarrow \quad (k+1)\,u_k - (-1)^k = (k+1)\,u_{k+1} \\ &\Leftrightarrow \quad u_k - \frac{(-1)^k}{k+1} = u_{k+1} \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vérifiée. En effet, par définition de u_{k+1} :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\ &= \ln(2) - \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} + \frac{(-1)^k}{k+1} \right) \\ &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ u_k - \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi, par équivalence, la première assertion est également vérifiée.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = (k+1)\,u_{k+1} - k\,u_k + (-1)^k.}$$

$\square$

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \ = \ (n+1)\,u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\,(1 - (-1)^n)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les égalités de la question précédente pour k variant de 1 à n.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k}_{= S_n} \ = \ \sum_{k=1}^{n} (k+1)\,u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\,u_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} (k+1)\, u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k\, u_k - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \cancel{\sum_{k=2}^{n} k\, u_k} + (n+1)\, u_{n+1} - \left(1 \times u_1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n} k\, u_k}\right) && \textit{(par télescopage)} \\
= \ & (n+1)\, u_{n+1} - u_1
\end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^k &= \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} && \textit{(car } -1 \neq 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_n = (n+1)\, u_{n+1} - u_1 + \frac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right).}$$

□

c) Démontrer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

Démonstration.

- Étudions la suite (S_{2n}).
  - × Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{2n}\right) \\
&= (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1-1) \\
&= (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1
\end{aligned}$$

  - × De plus :

$$u_1 = \ln(2) - \sum_{j=1}^{1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2) - 1$$

  - × Par ailleurs, d'après la question ***10.a)*** : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$. D'où :

$$(2n+1)\, u_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \cancel{(2n+1)} \frac{(-1)^{2n+1}}{2\,\cancel{(2n+1)}} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n \to +\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - \left(\ln(2) - 1\right) = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

- Étudions ensuite la suite (S_{2n+1}).
  - × Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= (2n+2)\, u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{2n+1}\right) \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}\,(1+1) \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - \ln(2) + 1 - 1 \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - \ln(2) \end{aligned}$$

  - × Par ailleurs, d'après la question ***10.a)*** : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$. D'où :

$$(2n+2)\, u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{(2n+2)}\, \frac{(-1)^{2n+2}}{2\,\cancel{(2n+2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

- Soit I un intervalle ouvert contenant $\ell = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.
  - × Comme $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
  - × Comme $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indices impairs de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

  On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
  Ceci signifie que la suite (S_n) est convergente de limite $\ell = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ est donc convergente de somme } \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question la propriété, parfois appelée « propriété de recouvrement » :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

  Cette propriété n'apparaît pas dans le programme officiel de la voie ECE.
  Il faut donc la redémontrer à chaque utilisation.

- La convergence d'une suite (S_n) vers un réel ℓ admet deux définitions équivalentes.

  1) Définition sans les ε :

  (S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux

  C'est la définition donnée par le programme officiel (et celle qu'on a utilisée pour la démonstration).

  2) Définition avec les ε :

  $$(S_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |S_n - \ell| < \varepsilon$$

- On peut aussi effectuer la démonstration précédente à l'aide de cette deuxième définition. Détaillons ce point.
  Soit $\varepsilon > 0$.

  × $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc, par définition de la convergence :

  il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$: $|S_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

  × $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc, par définition de la convergence :

  il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$: $|S_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

  On choisit alors $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$.

  $$\boxed{\text{Alors, pour tout } n \geqslant n_0 : |S_n - \ell| \leqslant \varepsilon.}$$

□

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$ ***b)*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$ ***c)*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right)$$

- De plus, d'après la question ***9.b)*** : $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2)$. D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

$\square$