

ECRICOME 2020

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M , puis calculer $(M - I_3)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1-1 & -1 \\ 1-1 & 1 & 1-1 \\ 1 & 1-1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(M - I_3)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

□

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M .

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = (X - 1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice M . Ainsi : $\text{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{1\}$.

Ainsi : $\text{Sp}(M) \subset \{1\}$ et 1 est l'unique valeur propre possible de M .

Commentaire

- Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède TOUJOURS un polynôme annulateur non nul Q .
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n .
- Si Q est un polynôme annulateur de M alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme αQ est toujours un polynôme annulateur de M puisque :

$$(\alpha Q)(M) = \alpha Q(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Cela suffit à démontrer que M possède une infinité de polynômes annulateurs.

On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X - 5)Q(X)$ est un polynôme annulateur de M puisqu'on a alors :

$$R(M) = (M - 5I_3)Q(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Il faut donc parler D'UN polynôme annulateur d'une matrice.

Commentaire

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de M . Si c'était le cas, M aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X - 5)Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre. \square

3. La matrice M est-elle inversible? La matrice M est-elle diagonalisable?

Démonstration.

- La matrice M admet 1 comme seule valeur propre possible. Ainsi, le réel 0 n'est pas valeur propre de M .

On en déduit que la matrice M est inversible.

Commentaire

- On se sert ici de la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice M suivante :

La matrice M est inversible \Leftrightarrow 0 n'est pas valeur propre de M

- Il était aussi possible de démontrer l'inversibilité à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \stackrel{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls. Elle (et donc M) est donc inversible.

- On pouvait aussi se servir du résultat de la question 1. pour démontrer l'inversibilité de M et calculer son inverse.

On remarque tout d'abord :

$$(M - I_3)^2 = M^2 - 2M + I_3 \quad (\text{car la matrice } I_3 \text{ commute avec } M, \text{ matrice carrée de même ordre})$$

Ainsi, d'après la question 1. :

$$\begin{aligned} M^2 - 2M + I_3 &= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} \quad -M^2 + 2M &= I_3 \\ \text{et} \quad M(-M + 2I_3) &= I_3 \end{aligned}$$

On en déduit que M est inversible d'inverse $M^{-1} = -M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Démontrons maintenant que 1 est bien valeur propre de M .

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_3 = -C_1$).

On en déduit que 1 est l'unique valeur propre de M .

- Démontrons que M n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde. Supposons que M est diagonalisable. Il existe donc :
 - × une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
 - × une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M , telles que $M = PDP^{-1}$.
- Or 1 est la seule valeur propre de M . Ainsi $D = I_3$ et :

$$M = P I_3 P^{-1} = P I_3 P^{-1} = I_3$$

Absurde!

La matrice M n'est pas diagonalisable.

□

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M , et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0-1 & -1 \\ 1-0 & 0 & 0-1 \\ 1 & 0-1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- On a alors :

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_3 = -C_1$).

On en déduit que 1 est valeur propre de M .

- Déterminons $E_1(M)$ le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 1.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_1(M) &\iff (M - I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y + z \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_1(M)$ suivante :

$$\begin{aligned} E_1(M) &= \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MU = U\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y + z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_1(M)$,

× est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, \mathcal{F} est une base de $E_1(M)$.

On en déduit : $\dim(E_1(M)) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2$.

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(M)$ (ou des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ) par lecture de la matrice $M - \lambda I_3$. Ici on a $\lambda = 1$. On cherche donc les

vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(M)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(M - I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur nul à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut notamment choisir :

× $z = 0$ et $x = y$.

En particulier, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

× $y = 0$ et $x = z$.

En particulier, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

On en déduit : $E_1(M) \supset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. On conclut alors à l'égalité de ces deux espaces

vectoriels en remarquant, à l'aide du théorème du rang, qu'ils ont même dimension 2.

Plus précisément, on a : $\dim(E_1(M)) + \text{rg}(M - I_3) = 3$

||

1

□

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

Démonstration.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu en remarquant que la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre car uniquement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

La matrice M est une matrice carrée d'ordre 3 telle que $\operatorname{rg}(M) = 2 \neq 3$.
On en déduit que M est non inversible. □

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, la matrice M n'est pas inversible.
On en déduit que 0 est valeur propre de M .
De plus, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(E_0(M)) + \operatorname{rg}(M) &= 3 \\ &\parallel \\ &2 \end{aligned}$$

On en conclut : $\dim(E_0(M)) = 1$.

- Comme M est une matrice carrée d'ordre 3, on sait d'après le cours que la somme des dimensions de toutes les espaces propres est majorée par 3. Or :

$$\dim(E_0(M)) + \dim(E_1(M)) = 1 + 2 = 3 \quad (*)$$

On en déduit que la matrice M n'admet pas de valeur propre autre que 0 et 1.

L'égalité (*) démontre de plus que la matrice M est diagonalisable. □

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.

On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} est la matrice M .

Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E .

Démonstration.

- Montrons que la famille (u, v, w) est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$ (*).

$$\begin{aligned}
 \text{Or : } (*) &\iff \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 0) = (0, 0, 0) \\
 &\iff (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0) \\
 &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 &\hspace{10em} (\text{par remontées successives})
 \end{aligned}$$

La famille (u, v, w) est donc libre.

- La famille (u, v, w) est :
 - × libre,
 - × de cardinal $\text{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

On en déduit que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u, v, w) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}((u, v, w)) = 3$).
- $\text{Vect}(u, v, w)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u, v, w) . C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u, v, w) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : ~~$\text{Card}(\text{Vect}(u, v, w))$~~ et ~~$\dim((u, v, w))$~~ n'ont aucun sens !

□

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

Démonstration.

Dans la suite, on note $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \\ &= M U \\ &= \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot U \\ &= a \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a \cdot u) \end{aligned}$$

Finalement : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a \cdot u)$.

L'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ étant bijective, on en déduit : $f(u) = a \cdot u$.

• De même :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(v)) = M V = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$$

Finalement : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(v)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

L'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ étant bijective, on en déduit : $f(v) = v$.

□

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

Démonstration.

• On procède comme dans la question précédente.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(w)) &= M W = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot V + W = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a \cdot v + w) \end{aligned}$$

L'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ étant bijective, on en déduit : $f(w) = a \cdot v + w$.

Finalement, le choix $\alpha = a$ et $\beta = 1$ convient.

□

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' , que l'on notera T .

Démonstration.

D'après les questions précédentes :

$$\times f(u) = a \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w.$$

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u,v,w)}(f(u)) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\times f(v) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w.$$

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u,v,w)}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\times f(w) = 0 \cdot u + a \cdot v + 1 \cdot w.$$

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u,v,w)}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit : } \text{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que déterminer la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' consiste à exprimer l'image par f des vecteurs u, v, w suivant la base (u, v, w) .
- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à M , sa matrice représentative dans la base \mathcal{B} . La base \mathcal{B} étant fixée, l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.

Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$E \text{ espace vectoriel de dimension } n \iff \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$f : E \rightarrow E \text{ endomorphisme} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$f \text{ bijectif} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ inversible}$$

Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\text{expression de } f(u) \text{ dans } (u, v, w) \iff \text{expression de } MU \text{ dans } (U, V, W)$$

Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme. \square

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- Les matrices M et T sont les représentations matricielles du même endomorphisme f dans des bases différentes ($M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$). On en déduit :

$$\text{Sp}(M) = \text{Sp}(f) = \text{Sp}(T)$$

Or : $\text{Sp}(T) = \{a, 1\}$ (rappelons au passage qu'on a : $a \neq 1$) car les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux.

$$\boxed{\text{Sp}(M) = \{a, 1\}}$$

- Déterminons $E_1(M)$. D'après le théorème du rang :

$$\dim(E_1(M)) + \text{rg}(M - I_3) = 3$$

Or $M - I_3$ et $T - I_3$ sont les représentations matricielles du même endomorphisme $f - \text{id}_E$ dans des bases différentes. En effet :

$$M - I_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \text{id}_E) \quad (\text{par linéarité de l'application } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot))$$

$$T - I_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) - \text{Mat}_{\mathcal{B}' }(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f - \text{id}_E) \quad (\text{par linéarité de l'application } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\cdot))$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M - I_3) &= \text{rg}(T - I_3) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} a-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} a-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu en remarquant que la famille $\left(\begin{pmatrix} a-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre car uniquement constituée de deux vecteurs non colinéaires puisque $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \dim(E_1(M)) = 3 - \text{rg}(M - I_3) = 3 - 2 = 1.}$$

- On opère de même pour déterminer $\dim(E_a(M))$. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M - aI_3) &= \text{rg}(T - aI_3) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1-a \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1-a \end{pmatrix} \right) = 2 \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu en remarquant que la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1-a \end{pmatrix} \right)$ est libre car uniquement constituée de deux vecteurs non colinéaires puisque $a \neq 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \dim(E_a(M)) = 3 - \text{rg}(M - aI_3) = 3 - 2 = 1.}$$

- On a alors :

$$\dim(E_1(M)) + \dim(E_a(M)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$$

$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Commentaire

- On vient de démontrer que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat souvent sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).

On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A .

- Si un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ? Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de f . On cherche alors une base de chaque sous-espace propre E_{λ_i} et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases. Cette famille **N'EST PAS** une base de E . Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs propres et donc E serait diagonalisable. Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E . Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cette question. Ici, f possède deux valeurs propres a et 1 . On a démontré en question **8**. que u est un vecteur propre associé à la valeur propre a et que v est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 . On a alors :

$$E_a(f) \supseteq \text{Vect}(u) \quad \text{et} \quad E_1(f) \supseteq \text{Vect}(v)$$

Pour des raisons de dimension ($\dim(E_a(f)) = 1 = \dim(\text{Vect}(u))$), ces inclusions sont en réalité des égalités. La famille (u, v) est libre car constitué de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Elle est complétée en une base (u, v, w) de E à l'aide du vecteur w fourni par l'énoncé. La matrice représentant f dans la base \mathcal{B}' ainsi formée est triangulaire.

- En question **10.**, on a déterminé la matrice T qui représente f dans la base \mathcal{B}' . À l'aide de cette question, on peut retrouver les résultats des parties **A** et **B**. Plus précisément :

× si $a = 1$ alors :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M n'est alors pas diagonalisable. Si tel était le cas, l'endomorphisme f serait diagonalisable et la matrice T serait à son tour diagonalisable. Ce n'est pas le cas car la matrice T possède 1 comme seule valeur propre. Si T était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice diagonale I_3 et serait donc égale à I_3 .

× si $a = 0$ alors :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé une base \mathcal{B}' dans laquelle la représentation matricielle de l'endomorphisme f est diagonale. Cela signifie que f est diagonalisable. Il en est de même de M . De plus, comme M et T sont semblables, on démontre comme dans la question ci-dessus :

$$\dim(E_0(M)) = \dim(E_0(T)) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(E_1(M)) = \dim(E_1(T)) = 2 \quad \square$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur \mathbb{R}_+ par : $\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$.

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et : $\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$.

Démonstration.

Pour la suite de l'exercice, on introduit la fonction $h_n : t \mapsto \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}$.

- La fonction h_n est continue sur $[0, +\infty[$ car elle est le quotient $h_n = \frac{g_1}{g_2}$ où :
 - × $g_1 : t \mapsto t^{2n} - 1$ est continue sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.
 - × $g_2 : t \mapsto t + 1$:
 - est continue sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.
 - NE S'ANNULE PAS sur $[0, +\infty[$.

La fonction h_n admet donc une primitive H_n de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

- Soit $x \in [0, +\infty[$. Par définition :

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = [H_n(t)]_0^x = H_n(x) - H_n(0)$$

Ainsi, la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ comme somme de la fonction H_n (elle-même \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$) et d'une constante.

La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

- De plus, pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'_n(x) = H'_n(x) = h_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$.

On a bien : $\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$.

Commentaire

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction f_n est la primitive de h_n sur \mathbb{R}_+ qui s'annule au point 0. Ainsi, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = h_n(x)$.
- L'intérêt de la démonstration précédente est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers. Imaginons par exemple une fonction g_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g_n(x) = \int_0^{x^2} h_n(t) dt = [H_n(t)]_0^{x^2} = H_n(x^2) - H_n(0)$$

La fonction g_n N'EST PAS une primitive de h_n .

L'expression ci-dessus permet toutefois de conclure que g_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ comme composée de $x \mapsto x^2$ par H_n toutes les deux de classe \mathcal{C}^1 sur les intervalles adéquats. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'_n(x) = 2x \times H'_n(x^2) = 2x \times h_n(x^2) = 2x \frac{x^{2n-1}}{x + 1}$$

- Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de dériver sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

2. Étudier les variations de f_n .

Démonstration.

- Soit $x > 0$. D'après la question précédente :

$$f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

Comme $x + 1 > 0$, le signe de $f'_n(x)$ est celui de la quantité $x^{2n} - 1$.

$$\begin{aligned} f'_n(x) > 0 &\Leftrightarrow x^{2n} > 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x^{2n}) > \ln(1) && \text{(car la fonction } \ln \text{ est strictement} \\ &&& \text{croissante sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow 2n \ln(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) > 0 && \text{(car } 2n > 0) \\ &\Leftrightarrow x > 1 && \text{(car la fonction exp est strictement} \\ &&& \text{croissante sur }]0, +\infty[) \end{aligned}$$

En remarquant de plus $f'_n(0) = -1$, on en déduit le tableau de variation suivant :

| | | | |
|---------------------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| Signe de $f'_n(x)$ | - | 0 | + |
| Variations de f_n | | | |

□

3. Démontrer que f_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ , et calculer sa dérivée seconde. En déduire que f_n est convexe sur \mathbb{R}_+ .

Démonstration.

- Avec des arguments similaires à ceux de la question 1., on démontre que la fonction h_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

Comme $f'_n = h_n$, la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ .

- Soit $x \geq 0$.

$$f''_n(x) = \frac{(2n x^{2n-1}) \times (x+1) - (x^{2n} - 1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)x^{2n} + 2n x^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}$$

Comme $x \geq 0$, alors $(x+1)^2 > 0$. Ainsi, $f''_n(x)$ est du signe de la quantité $(2n-1)x^{2n} + 2n x^{2n-1} + 1$. Or :

× comme $n \geq 1$, on a : $2n - 1 \geq 1 > 0$ et $2n \geq 0$.

× comme $x \geq 0$, on a : $x^{2n} \geq 0$ et $x^{2n-1} \geq 0$.

Ainsi : $(2n-1)x^{2n} + 2n x^{2n-1} + 1 \geq 0$ comme somme de quantités positives.

Finalement, pour tout $x \geq 0$, $f''_n(x) \geq 0$. Cela démontre que la fonction f_n est convexe sur \mathbb{R}_+ . □

4. a) Démontrer : $\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

Démonstration.

Soit $t \geq 1$.

- Rappelons tout d'abord que si $t \neq 1$, on a :

$$\frac{t^{2n} - 1}{t^2 - 1} = \frac{(t^2)^n - 1}{t^2 - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} (t^2)^k \quad (\text{formule d'une somme géométrique})$$

On peut réécrire cette formule sous la forme suivante, valable pour tout $t \geq 1$:

$$t^{2n} - 1 = (t^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}$$

- Or, pour tout $t \geq 1$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, t^{2k} \geq 1^{2k} = 1 \quad (\text{par croissance de l'application élévation à la puissance } 2k \text{ sur } [0, +\infty[)$$

Finalement par sommation de ces n égalités :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

Et enfin, par multiplication par $t^2 - 1 \geq 0$, on obtient :

$$(t^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \geq n(t^2 - 1)$$

$$\parallel$$

$$t^{2n} - 1$$

$$\boxed{\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)}$$

□

b) Montrer alors : $\forall x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2$.

Démonstration.

Soit $x \geq 1$.

- Alors, pour tout $t \geq 1$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1) \quad (\text{d'après la question précédente})$$

$$\text{donc } \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq n \frac{t^2 - 1}{t + 1} \quad (\text{car } t + 1 > 0)$$

$$\text{d'où } \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq n \frac{(t-1)\cancel{(t+1)}}{\cancel{t+1}}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($1 \leq x$) :

$$\int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \int_1^x n(t - 1) dt$$

$$\parallel$$

$$n \left[\frac{1}{2} (t - 1)^2 \right]_1^x$$

On en conclut : $\forall x \geq 1, \int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2} (x - 1)^2.$

• Finalement :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt + \int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \quad (\text{d'après la relation de Chasles}) \\ &= f_n(1) + \int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \\ &\geq f_n(1) + \frac{n}{2} (x - 1)^2 \end{aligned}$$

On a bien : $\forall x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2} (x - 1)^2.$

□

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.

D'après la question précédente, pour tout $x \geq 1$:

$$f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2} (x - 1)^2$$

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)^2 = +\infty.$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$

□

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$f_n(0) = \int_0^0 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = 0$$

$f_n(0) = 0$

• En question 2., on a démontré que f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Comme $1 > 0$, on en déduit $f_n(1) < f_n(0) = 0.$

□

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.

On note x_n cette solution.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $f_n(0) = 0$.

L'équation $f_n(x) = 0$ admet pour solution $x = 0$.

- Si $x \in]0, 1]$, alors, par stricte décroissance de f_n sur cet intervalle, on a : $f_n(x) < f_n(0) = 0$.

Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0, 1]$.

- Il reste à traiter le cas de l'intervalle $]1, +\infty[$.

La fonction f_n est :

× continue sur $]1, +\infty[$,

× strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Ainsi f_n réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $f_n(]1, +\infty[)$. Or :

$$f_n(]1, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[=]f_n(1), +\infty[$$

Comme $f_n(1) < 0$, on a : $0 \in]f_n(1), +\infty[$.

Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$, notée x_n .

Finalement, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement 2 solutions sur $[0, +\infty[$: $x = 0$ et $x = x_n > 1$, seule solution strictement positive.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$).

□

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n) , où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.

On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2(n+1)} - 1}{t+1} dt - \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1} dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{t^{2n+2} - \cancel{1}}{t+1} - \frac{t^{2n} - \cancel{1}}{t+1} \right) dt && \text{(par linéarité de l'intégration)} \\ &= \int_0^x \frac{t^{2n} (t^2 - 1)}{t+1} dt \\ &= \int_0^x \frac{t^{2n} (t-1)\cancel{(t+1)}}{\cancel{t+1}} dt \\ &= \int_0^x t^{2n+1} dt - \int_0^x t^{2n} dt && \text{(par linéarité de l'intégration)} \\ &= \left[\frac{1}{2n+2} t^{2n+2} \right]_0^x - \left[\frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2n+2} [t^{2n+2}]_0^x - \frac{1}{2n+1} [t^{2n+1}]_0^x \\ &= \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} - \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \\ &= x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

□

8. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \frac{2n+2}{2n+1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \geq \frac{2n+2}{2n+1}$.

Comme $x \geq \frac{2n+2}{2n+1} > 0$ alors $x^{2n+1} > 0$.

Ainsi, le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est celui de $\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2n+2} \geq \frac{1}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{2n+2}{2n+1} \quad (\text{car } 2n+2 > 0)$$

La dernière proposition étant vérifiée, il en est de même de la première.

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \frac{2n+2}{2n+1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé : $x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$.

On peut donc utiliser la propriété précédente pour $x = x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$. On obtient :

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n)$$

||

$$0 \quad (\text{par définition de } x_n)$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$.

□

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de x_{n+1} , on a : $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$$

- De plus, on sait :

- × $x_n > 1$ et $x_{n+1} > 1$ d'après la question 6.

- × la fonction f_{n+1} réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]f_n(1), +\infty[$.

La réciproque de cette bijection, définie de $]f_n(1), +\infty[$ sur $]1, +\infty[$ est strictement croissante car de même monotonie que f_{n+1} sur $]1, +\infty[$. En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité :

$$x_n \geq x_{n+1}$$

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq x_{n+1}$. La suite (x_n) est donc décroissante.

- La suite (x_n) est :
 - × décroissante,
 - × minorée par 1 (par définition, pour tout $n \geq 1 : x_n > 1$).
 Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geq 1$.

La suite (x_n) est convergente.

Commentaire

- La **Partie B** consiste en l'étude de la suite (x_n) . On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (x_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation $f_n(x) = 0$

On comprend alors que l'étude de (x_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction f_n .

- De cette définition, on tire la propriété : $\forall m \in \mathbb{N}^*, f_m(x_m) = 0$.

Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (x_n) .

On l'utilise en **8.b)** pour $m = n$ et en **8.c)** pour $m = n + 1$.

- Comme la suite (x_n) est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de (x_n) à l'aide de la différence $x_{n+1} - x_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$$

et de conclure : $x_n \geq x_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f_{n+1} . □

- 9. a)** Démontrer que pour tout entier $n \geq 1 : -\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.

Démonstration.

Soit $n \geq 1$.

- D'après la question **5.**, on a : $f_n(1) < 0$.

On a bien : $f_n(1) \leq 0$.

- Soit $t \in [0, 1]$.

Alors $0 \leq t \leq 1$

donc $0^{2n} \leq t^{2n} \leq 1^{2n}$ (par croissance de la fonction élévation à la puissance $2n$)

ainsi $-1 \leq t^{2n} - 1 \leq 0$

d'où $-\frac{1}{t+1} \leq \frac{t^{2n} - 1}{t+1} \leq 0$ (car $t+1 > 0$)

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$) :

$$\int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t+1} dt \geq \int_0^1 \frac{-1}{t+1} dt$$

=

$$\left[-\ln(|t+1|) \right]_0^1 = -(\ln(2) - \ln(1))$$

On a bien : $\forall n \geq 1, -\ln(2) \leq f_n(1)$. □

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.b) de la partie A, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, par définition (question 6.), on a : $x_n > 1$.

$$\boxed{\text{On a bien : } x_n - 1 \geq 0.}$$

- En appliquant le résultat de la 4.b) en $x = x_n \geq 1$, on obtient :

$$f_n(x_n) \geq f_n(1) + \frac{n}{2} (x_n - 1)^2 \geq -\ln(2) + \frac{n}{2} (x_n - 1)^2 \quad (\text{d'après la question précédente})$$

Or, par définition de x_n , on a : $f_n(x_n) = 0$. On en déduit, en réordonnant :

$$\frac{n}{2} (x_n - 1)^2 \leq \ln(2)$$

$$\text{donc} \quad (x_n - 1)^2 \leq \frac{2}{n} \ln(2) \quad (\text{car } \frac{2}{n} > 0)$$

$$\text{ainsi} \quad \sqrt{(x_n - 1)^2} \leq \sqrt{\frac{2}{n} \ln(2)} \quad (\text{par croissance de la fonction racine sur } [0, +\infty[)$$

$$\text{d'où} \quad |x_n - 1| \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, comme } x_n - 1 \geq 0, \text{ on obtient bien : } x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}.}$$

- On vient de démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

Or :

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0,$$

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}} = 0.$$

Par théorème d'encadrement, on en conclut : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - 1 = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.}$$

Commentaire

- Encore une fois, c'est la propriété de définition des termes de la suite (x_n) qui est utilisée ici. C'est logique puisqu'on ne connaît pas d'expression explicite des termes de (x_n) .
- La présence de la quantification « $\forall n \in \mathbb{N}^*$ » peut faire penser à utiliser une récurrence. Ce type de raisonnement nécessite l'existence d'une propriété liant les termes de rangs successifs afin pouvoir mettre en œuvre l'étape d'hérédité. C'est pourquoi la récurrence est l'outil de base de démonstration des propriétés des suites récurrentes d'ordre 1 (le terme au rang $n + 1$ s'exprime directement en fonction du terme au rang n). L'utilisation est plus rare dans le cas des suites implicites. □

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Démonstration.

- La fonction $h_n : (x, y) \rightarrow f_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $h_n = f_n \circ g$ où :

× $g : (x, y) \rightarrow x$ est :

- de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale,
- telle que : $g(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$.

× f_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* d'après 3.

De même, la fonction $(x, y) \rightarrow f_n(y)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que G_n est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

- Comme G_n est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, elle admet en particulier des dérivées premières et secondes sur cet ensemble.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \partial_1(G_n)(x, y) = f_n(y) f'_n(x)$$

$$\partial_2(G_n)(x, y) = f_n(x) f'_n(y)$$

□

11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n .

Démonstration.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$$(x, y) \text{ est un point critique de } G_n \Leftrightarrow \nabla(G_n)(x, y) = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(G_n)(x, y) = 0 \\ \partial_2(G_n)(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_n(y) f'_n(x) = 0 \\ f_n(x) f'_n(y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_n(y) = 0 \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} f_n(y) = 0 \\ f'_n(y) = 0 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} f'_n(x) = 0 \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} f'_n(x) = 0 \\ f'_n(y) = 0 \end{cases}$$

Or :

× d'après la question 6. : $f_n(t) = 0 \Leftrightarrow t = x_n$

× d'après la question 2. : $f'_n(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

On obtient donc :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } G_n \Leftrightarrow \begin{cases} y = x_n \\ x = x_n \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} y = x_n \\ y = 1 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} x = 1 \\ x = x_n \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Enfin, d'après la question 6. : $x_n > 1$. Ainsi :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } G_n \Leftrightarrow \begin{cases} y = x_n \\ x = x_n \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

On en déduit que G_n admet exactement 2 points critiques : (x_n, x_n) et $(1, 1)$.

Commentaire

- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(G_n)(x, y) = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on obtient deux équations du type :

$$\Psi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(y) = 0$$

Ces deux équations ne dépendent que d'une seule variable, on peut donc utiliser toutes les techniques usuelles de résolution d'équation. □

12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$$\partial_{1,1}^2(G_n)(x, y) = f_n(y) f_n''(x)$$

$$\partial_{1,2}^2(G_n)(x, y) = f_n'(x) f_n'(y)$$

$$\partial_{2,1}^2(G_n)(x, y) = f_n'(x) f_n'(y)$$

$$\partial_{2,2}^2(G_n)(x, y) = f_n(x) f_n''(y)$$

Commentaire

- × Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- × Ici, le calcul de $\partial_{1,2}^2(G_n)(x, y)$ et $\partial_{2,1}^2(G_n)(x, y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la 1^{ère} variable puis par rapport à la 2^{ème}, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

- On note : $H_n = \nabla^2(G_n)(x_n, x_n)$.
Par définition de x_n : $f_n(x_n) = 0$. D'où :

$$H_n = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(G_n)(x_n, x_n) & \partial_{1,2}^2(G_n)(x_n, x_n) \\ \partial_{2,1}^2(G_n)(x_n, x_n) & \partial_{2,2}^2(G_n)(x_n, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n) f_n''(x_n) & f_n'(x_n) f_n'(x_n) \\ f_n'(x_n) f_n'(x_n) & f_n(x_n) f_n''(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & 0 \end{pmatrix}$$

- On note : $M_1 = \nabla^2(G_n)(1, 1)$.
Par définition de $x_n : f_n(x_n) = 0$. D'où :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(G_n)(1, 1) & \partial_{1,2}^2(G_n)(1, 1) \\ \partial_{2,1}^2(G_n)(1, 1) & \partial_{2,2}^2(G_n)(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(1) f_n''(1) & f_n'(1) f_n'(1) \\ f_n'(1) f_n'(1) & f_n(1) f_n''(1) \end{pmatrix}$$

Or :

× d'après la question 1. : $f_n'(1) = 0$.

× d'après la question 3. : $f_n''(1) = \frac{(2n - \mathcal{X}) + 2n + \mathcal{X}}{2^2} = n$.

On en déduit : $M_1 = \begin{pmatrix} n f_n(1) & 0 \\ 0 & n f_n(1) \end{pmatrix}$

□

13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \det(H_n - \lambda I_2) &= \det \left(\begin{pmatrix} -\lambda & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \lambda^2 - (f_n'(x_n))^2 \\ &= (\lambda - f_n'(x_n)) (\lambda + f_n'(x_n)) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } H_n &\Leftrightarrow H_n - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(H_n - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - f_n'(x_n)) (\lambda + f_n'(x_n)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = f_n'(x_n) \text{ OU } \lambda = -f_n'(x_n) \end{aligned}$$

On en déduit : $\text{Sp}(H_n) = \{f_n'(x_n), -f_n'(x_n)\}$.

- D'après la question 6. : $x_n > 1$. Ainsi, d'après la question 2. : $f_n'(x_n) > 0$.
On en déduit que les 2 valeurs propres de H_n sont **non nulles** et de signes opposés.

On en déduit que G_n n'admet pas d'extremum local en (x_n, x_n) . C'est un point selle.

□

14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1, 1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Démonstration.

- La matrice $M_1 = \begin{pmatrix} n f_n(1) & 0 \\ 0 & n f_n(1) \end{pmatrix}$ est diagonale. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

Ainsi : $\text{Sp}(M_1) = \{n f_n(1)\}$.

- Or, d'après la question 5. : $f_n(1) < 0$.

On en conclut que la fonction G_n admet un maximum local en $(1, 1)$.

□

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

Démonstration.

Soit $n \geq 2$.

- Comme $a > 0$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant n ($n \geq 2 > 1$). Elle est donc convergente.

L'intégrale $I_n(a)$ est convergente.

- Soit $B \in [a, +\infty[$.

$$\int_a^B \frac{1}{t^n} dt = \int_a^B t^{-n} dt = \left[\frac{1}{-n+1} t^{-n+1} \right]_a^B = \frac{1}{-n+1} \left(\frac{1}{B^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right)$$

Or, comme $n-1 > 0$: $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B^{n-1}} = 0$.

On en déduit : $I_n(a) = \frac{1}{-n+1} \left(-\frac{1}{a^{n-1}} \right) = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

□

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

- a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
 - × sur $] -\infty, a[$ en tant que fonction constante,
 - × sur $]a, +\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $t \mapsto t^4$ qui :
 - est continue sur $]a, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
 - NE S'ANNULE PAS sur $]a, +\infty[$.

La fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en a .

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
 - × si $t \in] -\infty, a[$, alors : $f(t) = 0 \geq 0$.
 - × si $t \in [a, +\infty[$, alors, comme $a > 0$: $f(t) = \frac{3a^3}{t^4} \geq 0$.

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$.

- Démontrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

× Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[a, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

× D'après la question 1., pour tout $n \geq 2$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

Ainsi, en appliquant cette question pour $n = 4$, on obtient que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$ converge et vaut $\frac{1}{3a^3}$.

× On en déduit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente (on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par un réel non nul). De plus :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^4} dt = 3a^3 I_4(a) = \cancel{3a^3} \frac{1}{\cancel{3a^3}} = 1$$

On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

Finalement, la fonction f est bien une densité de probabilité. □

b) Donner la fonction de répartition de X .

Démonstration.

• Dans la suite, on considère : $X(\Omega) = [a, +\infty[$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in]-\infty, a]$, alors : $[X \leq x] = \emptyset$ (car $X(\Omega) = [a, +\infty[$). D'où :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si $x \in [a, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt && \text{(car } f \text{ est nulle en} \\ &&& \text{dehors de } [a, +\infty[) \\ &= 3a^3 \int_a^x \frac{1}{t^4} dt \\ &= \cancel{3}a^3 \left[\frac{1}{-\cancel{3}} \frac{1}{t^3} \right]_a^x \\ &= -a^3 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3} \right) \end{aligned}$$

Finalement : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \frac{a^3}{x^3} & \text{si } x \geq a \end{cases}$.

Commentaire

Profitions de cette question pour faire une remarque sur la notation $X(\Omega)$.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X .
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité \mathbb{P} n'apparaît.

- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq]-\infty, +\infty[$.
En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans \mathbb{R} , ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
 - × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (i.e. l'ensemble $X(\Omega)$),
 - × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}([X = x]) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
 - × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on se permet d'écrire :

« Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0, 1]$. »

- × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
On se permet alors d'écrire :

« Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient à l'aide d'une disjonction de cas).

- Cette considération était d'ailleurs sans doute dans l'esprit du sujet puisqu'il est demandé de déterminer $Y(\Omega)$ en question **3.a**. □

c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f(t) dt$.

- Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[a, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_a^{+\infty} t f(t) dt$$

- Soit $t \in [a, +\infty[$. On remarque de plus :

$$t f(t) = t \frac{3a^3}{t^4} = 3a^3 \frac{1}{t^3}$$

Or, d'après la question 1. appliquée à $n = 3 \geq 2$, on obtient que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{2a^2}$.

- On en déduit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} t f(t) dt$ est convergente (on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par un réel non nul).

On en conclut que X admet une espérance.

- De plus :

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^{+\infty} t f(t) dt = 3a^3 I_3(a) = 3a^3 \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2} a$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2} a$$

□

- d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f(t) dt$.
- Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[a, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_a^{+\infty} t^2 f(t) dt$$

- Soit $t \in [a, +\infty[$. On remarque de plus :

$$t^2 f(t) = t^2 \frac{3a^3}{t^4} = 3a^3 \frac{1}{t^2}$$

Or, d'après la question 1. appliquée à $n = 2 \geq 2$, on obtient que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{1 \times a^1} = \frac{1}{a}$.

- On en déduit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} t f(t) dt$ est convergente (on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par un réel non nul).

On en conclut que X admet une variance.

- De plus :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^{+\infty} t^2 f(t) dt = 3a^3 I_2(a) = 3a^3 \frac{1}{a} = 3a^2$$

Enfin, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 3a^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = 3a^2 - \frac{9}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{3}{4}a^2}$$

□

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose : $Y = \frac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$.

Démonstration.

Notons $h : x \mapsto \frac{a}{x^{\frac{1}{3}}}$, de sorte que $Y = h(U)$.

On **considère** : $U(\Omega) =]0, 1]$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (h(U))(\Omega) = h(U(\Omega)) \\ &= h(]0, 1]) \\ &= [h(1), \lim_{x \rightarrow 0} h(x)[\quad (\text{car, comme } a > 0, \text{ la fonction } h \text{ est continue} \\ &\quad \text{et strictement décroissante sur }]0, 1]) \\ &= [a, +\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y(\Omega) = [a, +\infty[.}$$

Commentaire

Rappelons que la v.a.r. $Y = h(U)$ est par définition l'application :

$$\begin{aligned} Y = h(U) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto h(U(\omega)) \end{aligned}$$

Comme la fonction h est définie uniquement sur $]0, +\infty[$, la v.a.r. $Y = h(U)$ est bien définie seulement si :

$$\forall \omega \in \Omega, U(\omega) \in]0, +\infty[$$

Autrement dit, il est primordial, pour la bonne définition de l'objet $Y = h(U)$, de considérer que U est à valeurs dans $]0, 1] \subset]0, +\infty[$ (et non $[0, 1] \not\subset]0, +\infty[$). □

b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

- si $x \in]-\infty, a]$, alors : $[Y \leq x] = \emptyset$ (car $Y(\Omega) = [a, +\infty[$). D'où :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- si $x \in [a, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{a}{U^{\frac{1}{3}}} \leq x\right]\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{U^{\frac{1}{3}}}{a} \geq \frac{1}{x}\right]\right) && \text{(par stricte décroissance de la fonction} \\
 &&& \text{inverse sur }]0, +\infty[, \text{ car } U(\Omega) =]0, 1]) \\
 &= \mathbb{P}\left(\left[U^{\frac{1}{3}} \geq \frac{a}{x}\right]\right) && \text{(car } a > 0) \\
 &= \mathbb{P}\left(\left[U \geq \left(\frac{a}{x}\right)^3\right]\right) && \text{(par stricte croissance de la} \\
 &&& \text{fonction } x \mapsto x^3 \text{ sur } \mathbb{R}) \\
 &= 1 - F_U\left(\left(\frac{a}{x}\right)^3\right) && \text{(car } U \text{ est une v.a.r. à densité)}
 \end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
 &x \geq a \\
 \text{donc } &\frac{1}{x} \leq \frac{1}{a} && \text{(par décroissance de la fonction} \\
 &&& \text{inverse sur }]0, +\infty[, \text{ car } a > 0) \\
 \text{d'où } &\frac{a}{x} \leq 1 && \text{(car } a > 0) \\
 \text{ainsi } &\left(\frac{a}{x}\right)^3 \leq 1 && \text{(par croissance de la fonction} \\
 &&& \text{ } x \mapsto x^3 \text{ sur } \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Comme $a > 0$ et $x > 0$, on en déduit : $0 < \left(\frac{a}{x}\right)^3 \leq 1$.

- De plus, comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1])$: $F_U : u \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } 0 < u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}$.

$$\text{Ainsi : } F_U\left(\left(\frac{a}{x}\right)^3\right) = \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a^3}{x^3}.$$

$$\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \frac{a^3}{x^3} & \text{si } x \geq a \end{cases}.$$

- D'après la question **2.b)**, on reconnaît la fonction de répartition F_X de X . Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

On en déduit que les v.a.r. X et Y ont même loi.

Commentaire

- On a démontré, lors de l'étude de $Y(\Omega)$, que h réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $[a, +\infty[$. Il est possible de déterminer l'expression de $h^{-1} : [a, +\infty[\rightarrow]0, 1]$. Pour ce faire, on remarque que pour tout $x \in]0, 1]$ et $y \in [a, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = \frac{a}{x^3} \\ &\Leftrightarrow x = \left(\frac{a}{y}\right)^3 \\ &\Leftrightarrow x = h^{-1}(y) \end{aligned}$$

On démontre ainsi que h^{-1} a pour expression : $h^{-1} : x \mapsto \left(\frac{a}{x}\right)^3$.

- On retrouve ici l'expression de la quantité $\left(\frac{a}{x}\right)^3$ apparaissant à la fin de la résolution de la question. Ce n'est pas surprenant car la méthode utilisée ici consiste justement à faire apparaître, étape par étape, la quantité $h^{-1}(x)$. Plus précisément, on a :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}([h(U) \leq x]) = \mathbb{P}([U \leq h^{-1}(x)]) = F_U(h^{-1}(x))$$

On comprend mieux pourquoi cette manière de procéder est appelée **méthode d'inversion**. \square

- c) Écrire une fonction en langage **Scilab** d'en-tête : `function Y = simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X . Ces réels seront choisis de façon indépendante. À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m, n)` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

Démonstration.

On propose la fonction **Scilab** suivante :

```

1  function Y = simulX(a, m, n)
2      U = rand(m, n)
3      Y = a ./ (U.^(1/3))
4  endfunction

```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**

On commence par préciser la structure de la fonction :

- × cette fonction se nomme `simulX`,
- × elle prend en entrée 3 paramètres `a`, `m` et `n`,
- × elle admet pour variable de sortie la variable `Y`.

```

1  function Y = simulX(a, m, n)

```

• **Contenu de la fonction**

En ligne **2**, on stocke dans la variable U une matrice à m lignes et n colonnes dont tous les coefficients sont des simulations de la v.a.r. U de loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

$$\mathbf{2} \quad U = \text{rand}(m, n)$$

D'après la question précédente, la v.a.r. $Y = \frac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$ suit la même loi que la v.a.r. X , dès lors que $U \leftrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

Ainsi, en ligne **3**, on stocke dans la variable Y une matrice à m lignes et n colonnes dont tous les coefficients sont des simulations de la v.a.r. X .

$$\mathbf{3} \quad Y = a ./ (U.^{(1/3)})$$

Commentaire

- On rappelle que l'opérateur $./$ est l'opérateur de division terme à terme.
- De même, l'opérateur $.^$ est l'opérateur de puissance terme à terme, contrairement à l'opérateur $^$ qui est l'opérateur de puissance mathématique classique. Par exemple, en notant : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on obtient :

```
--> A = [1, 2 ; 3, 4]
--> A.^2
ans =
    1.    4.
    9.   16.
--> A^2
ans =
    7.   10.
   15.   22.
```

4. **a)** Calculer $\mathbb{P}([X > 2a])$.

Démonstration.

Tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > 2a]) = 1 - \mathbb{P}([X \leq 2a]) = 1 - F_X(2a)$$

Or $2a \geq a$. Ainsi, d'après **2.b)** :

$$\mathbb{P}([X > 2a]) = 1 - \left(1 - \frac{a^3}{(2a)^3}\right) = \frac{a^3}{8a^3} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}([X > 2a]) = \frac{1}{8}$$

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a])$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\mathbb{P}([X > 2a]) \neq 0$. Ainsi le réel $\mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a])$ est bien défini.

- De plus :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a]) &= \frac{\mathbb{P}([X > 2a] \cap [X > 6a])}{\mathbb{P}([X > 2a])} \\
 &= \frac{\mathbb{P}([X > 6a])}{\mathbb{P}([X > 2a])} && \text{(car, comme } 6a \geq 2a : \\
 & && [X > 6a] \subset [X > 2a]) \\
 &= \frac{\mathbb{P}([X > 6a])}{\frac{1}{8}} && \text{(d'après la question} \\
 & && \text{précédente)} \\
 &= 8 \mathbb{P}([X > 6a])
 \end{aligned}$$

- Comme $6a \geq a$, avec le même raisonnement qu'en question précédente :

$$\mathbb{P}([X > 6a]) = 1 - F_X(6a) = 1 - \left(1 - \frac{a^3}{(6a)^3}\right) = \frac{a^3}{6^3 a^3} = \frac{1}{6^3}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a]) = 8 \frac{1}{6^3} = 2^3 \frac{1}{6^3} = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a]) = \frac{1}{27}}$$

□

- c) On suppose que la fonction **Scilab** de la question 3.a) a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```

1  a = 10
2  N = 100000
3  s1 = 0
4  s2 = 0
5  X = simulX(a, 1, N)
6  for k = 1:N
7      if ..... then
8          s1 = s1 + 1
9          if X(k) > 6 * a then
10             .....
11         end
12     end
13 end
14 if s1 > 0 then
15     disp(.....)
16 end

```

Démonstration.

- On commence par rappeler :

$$\mathbb{P}_{[X>2a]}([X > 6a]) = \frac{\mathbb{P}([X > 2a] \cap [X > 6a])}{\mathbb{P}([X > 2a])}$$

- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de $\mathbb{P}([X > 2a] \cap [X > 6a])$ est :

1) de simuler un grand nombre de fois ($N = 100000$ est ce grand nombre) la v.a.r. X .

Formellement, on souhaite obtenir un N -uplet (x_1, \dots, x_N) qui correspond à l'observation d'un N -échantillon (X_1, \dots, X_N) de la v.a.r. X .

2) de compter le nombre de fois où $(x_k > 2a)$ ET $(x_k > 6a)$, pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\frac{\text{nombre de fois où } (x_k > 2a) \text{ ET } (x_k > 6a)}{\text{taille } N \text{ de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([X > 2a] \cap [X > 6a])$$

- De même, par LfGN :

$$\frac{\text{nombre de fois où } x_k > 2a}{\text{taille } N \text{ de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([X > 2a])$$

- On en déduit :

$$\frac{\frac{\text{nombre de fois où } (x_k > 2a) \text{ ET } (x_k > 6a)}{\text{nombre de fois où } x_k > 2a}}{\text{nombre de fois où } (x_k > 2a) \text{ ET } (x_k > 6a)}}{\text{nombre de fois où } x_k > 2a}} \simeq \frac{\frac{\mathbb{P}([X > 2a] \cap [X > 6a])}{\mathbb{P}([X > 2a])}}{\mathbb{P}([X > 2a])}}{\mathbb{P}_{[X>2a]}([X > 6a])}}$$

- On propose alors de compléter le programme **Scilab** de la manière suivante :

```

1  a = 10
2  N = 100000
3  s1 = 0
4  s2 = 0
5  X = simulX(a, 1, N)
6  for k = 1:N
7      if X(k) > 2 * a then
8          s1 = s1 + 1
9          if X(k) > 6 * a then
10             s2 = s2 + 1
11         end
12     end
13 end
14 if s1 > 0 then
15     disp( s2 / s1 )
16 end

```


Détaillons les éléments de ce script.

× **Début du programme**

La ligne 1 permet de stocker dans la variable **a** la valeur du paramètre a choisie pour tout le programme, ici 10.

$\underline{1} \quad a = 10$

La ligne 2 permet de stocker dans la variable **N** le nombre d'observations souhaitées, ici 100000.

$\underline{2} \quad N = 100000$

Les lignes 3 et 4 permettent d'initialiser les variables **s1** et **s2** à 0.

$\underline{3} \quad s1 = 0$

$\underline{4} \quad s2 = 0$

On souhaite :

- que la variable **s1** contienne le nombre de fois où $x_k > 2a$, pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,
- que la variable **s2** contienne le nombre de fois où $(x_k > 2a)$ ET $(x_k > 6a)$, pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

La ligne 5 permet de stocker dans la variable **X** les N simulations de la v.a.r. X . C'est donc ce vecteur **X** qui contient donc le N -uplet d'observations (x_1, \dots, x_N) .

$\underline{5} \quad X = \text{simulX}(a, 1, N)$

× **Structure itérative**

Les lignes 6 à 13 permettent de mettre à jour les variables **s1** et **s2** à chaque observation. Pour cela on utilise une structure itérative (boucle **for**).

Détaillons cette mise à jour.

- si $X(k) > 2 \star a$, alors on effectue l'instruction :

$\underline{8} \quad s1 = s1 + 1$

Ainsi, à chaque fois que $X(k) > 2 \star a$, la variable **s1** est incrémentée de 1.

On poursuit avec les lignes 9 à 11, où l'on effectue la mise à jour de **s2**. Détaillons également cette mise à jour.

- ▶ si $X(k) > 6 \star a$, alors on effectue l'instruction :

$\underline{10} \quad s2 = s2 + 1$

Ainsi, à chaque fois que $X(k) > 6 \star a$, la variable **s2** est incrémentée de 1.

- ▶ si $X(k) \leq 6 \star a$, alors on ne met pas la variable **s2** à jour.

Comme on est déjà placé dans une 1^{ère} structure conditionnelle (**if** $X(k) > 2 \star a$ **then**), on en déduit que la variable **s2** est incrémentée de 1 à chaque fois que les conditions $X(k) > 2 \star a$ et $X(k) > 6 \star a$ sont toutes les deux vérifiées.

- si $X(k) \leq 2 \star a$, alors on ne met aucune variable à jour (ni **s1**, ni **s2**).

Cela signifie qu'en sortie de boucle **for** :

- la variable **s1** compte le nombre de fois où $X(k) > 2 \star a$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,
- la variable **s2** compte le nombre de fois où $(X(k) > 2 \star a)$ ET $(X(k) > 6 \star a)$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$

× **Fin du programme**

Une fois cette boucle effectuée, on souhaite renvoyer l'approximation de $\mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a])$ fournie par la LfGN :

$$\frac{\text{nombre de fois où } (x_k > 2a) \text{ ET } (x_k > 6a)}{\text{nombre de fois où } x_k > 2a}$$

Autrement dit on souhaite renvoyer $s2 / s1$. Comme on souhaite effectuer une division par le réel $s1$, on vérifie au préalable que ce réel est différent de 0. On obtient les commandes suivantes :

```

14  if s1 > 0 then
15      disp( s2 / s1 )
16  end

```

□

Commentaire

- Le sujet impose ici un programme avec deux structures conditionnelles imbriquées l'une dans l'autre. Comme on l'a vu dans la question, cette imbrication permet de mettre à jour la variable $s2$ pour qu'elle contienne le nombre de fois où $(x_k > 2a)$ ET $(x_k > 6a)$.

De manière générale, on dispose en **Scilab** de 2 méthodes pour tester si des conditions $C1$ et $C2$ sont simultanément réalisées.

```

1  if C1 then
2      if C2 then
3          instructions
4      end
5  end

```

```

1  if C1 & C2 then
2      instructions
3  end

```

- Dans ce sujet, la condition $C1$ est $X(k) > 2 * a$, et la condition $C2$ est $X(k) > 6 * a$. Ici, le programme est un peu plus complexe puisqu'il intercale une instruction entre les 2 structures conditionnelles imbriquées. Pour bien comprendre cette nouvelle imbrication, il est encore possible de « désimbriquer » cette structure conditionnelle.

```

1  if C1 then
2      instruction_1
3      if C2 then
4          instruction_2
5      end
6  end

```

```

1  if C1 then
2      instruction_1
3  end
4  if C1 & C2 then
5      instruction_2
6  end

```

On aurait donc pu proposer le programme suivant pour les lignes 7 à 12 :

```

7      if X(k) > 2 * a then
8          s1 = s1 + 1
9      end
10     if (X(k) > 2 * a) & (X(k) > 6 * a) then
11         s2 = s2 + 1
12     end

```

On remarque très bien sur ce nouveau script que la variable $s2$ contient le nombre de fois où $(x_k > 2a)$ ET $(x_k > 6a)$. On retrouve :

$$\frac{s2}{N} = \frac{\text{nombre de fois où } (x_k > 2a) \text{ ET } (x_k > 6a)}{N} \simeq \mathbb{P}([X > 2a] \cap [X > 6a])$$

(et en particulier : $\frac{s2}{N} \simeq \mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a])$)

Commentaire

- Notons bien que si la désimbrication est intéressante d'un point de vue théorique (pour comprendre ce que contient chaque variable du script), elle est très peu pertinente d'un point de vue informatique. En effet, la condition **C1 & C2** n'est vérifiée que si la condition **C1** l'est. Dans le programme désimbriqué, on teste donc 2 fois la condition **C1** (à la place d'une seule fois dans le programme de l'énoncé).
- Ainsi l'imbrication, en plus d'être plus naturelle permet une optimisation du coût de calcul :
 - × dans le programme proposé en remarque, on a N mises à jour à effectuer pour la variable s_1 (une mise à jour pour chaque valeur de k) et N mises à jour à effectuer pour la variable s_2 (pour la même raison). On a donc, en tout, $2N$ mises à jour.
 - × dans le programme proposé par l'énoncé, on a toujours N mises à jour à effectuer pour la variable s_1 (toujours une mise à jour pour chaque valeur de k), mais on ne met à jour la variable s_2 que dans les cas où la condition $X(k) > 2 * a$ est vérifiée (et non pas pour toutes les valeurs de k).

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a .

Soit n un entier naturel non nul, et X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

5. On pose : $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a .

Démonstration.

- La v.a.r. $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$ s'exprime :
 - × à l'aide d'un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) de la v.a.r. X ,
 - × sans mention du paramètre a .

La v.a.r. V_n est donc un estimateur de a .

- La v.a.r. V_n admet une espérance (donc un biais) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- De plus :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(V_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k\right) \\
 &= \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
 &= \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2} a\right) && \text{(d'après 2.c)} \\
 &= \frac{2}{3n} \times n \frac{3}{2} a = a
 \end{aligned}$$

On en déduit que V_n est un estimateur sans biais de a .

□

- b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n}$.

Démonstration.

- La v.a.r. V_n admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned}
 r_a(V_n) &= \mathbb{V}(V_n) + (b_a(V_n))^2 \\
 &= \mathbb{V}\left(\frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k\right) + 0 && \text{(car } V_n \text{ est un estimateur sans biais de } a \text{ d'après 5.a)} \\
 &= \left(\frac{2}{3n}\right)^2 \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\
 &= \frac{4}{9n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) && \text{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes)} \\
 &= \frac{4}{9n^2} \sum_{k=1}^n \frac{3a^2}{4} && \text{(d'après 2.d)} \\
 &= \frac{4}{9n^2} \times n \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{3n}
 \end{aligned}$$

$$r_a(V_n) = \frac{a^2}{3n}$$

□

6. On pose : $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

- a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k(\Omega) = [a, +\infty[$.

$$\text{Ainsi : } W_n(\Omega) \subset [a, +\infty[.$$

- Déterminons F_{W_n} , la fonction de répartition de W_n .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in]-\infty, a[$, alors $[W_n \leq x] = \emptyset$ (car $W_n(\Omega) \subset [a, +\infty[$). D'où :

$$F_{W_n}(x) = \mathbb{P}([W_n \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si $x \in [a, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned}
 F_{W_n}(x) &= \mathbb{P}([W_n \leq x]) \\
 &= 1 - \mathbb{P}([W_n > x]) \\
 &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k > x]\right) \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k > x]) && \text{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes)} \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^n (1 - F_{X_k}(x)) \\
 &= 1 - (1 - F_X(x))^n && \text{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \text{ ont même loi que } X) \\
 &= 1 - \left(x - \left(x - \frac{a^3}{x^3}\right)\right)^n && \text{(d'après 2.b), car } x \geq a) \\
 &= 1 - \frac{a^{3n}}{x^{3n}}
 \end{aligned}$$

Enfinement : $F_{W_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \frac{a^{3n}}{x^{3n}} & \text{si } x \geq a \end{cases} .$

• Démontrons que W_n est une v.a.r. à densité.

× La fonction F_{W_n} est continue :

- sur $] - \infty, a[$ en tant que fonction constante.
- sur $]a, +\infty[$ en tant que somme de fonctions usuelles.
- en a . En effet, d'une part : $\lim_{x \rightarrow a^-} F_{W_n}(x) = 0$.

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow a^+} F_{W_n}(x) = F_{W_n}(a) = 1 - \frac{a^{3n}}{a^{3n}} = 1 - 1 = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_{W_n}(x) = F_{W_n}(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F_{W_n}(x)$$

La fonction F_{W_n} est continue sur \mathbb{R} .

× La fonction F_{W_n} est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

Elle est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

La v.a.r. W_n est donc une v.a.r. à densité.

□

b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Démonstration.

Pour déterminer une densité f_n de W_n , on dérive sa fonction de répartition F_{W_n} sur les intervalles **ouverts** $] - \infty, a[$ et $]a, +\infty[$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

× si $t \in] - \infty, a[$, alors :

$$f_n(t) = F'_{W_n}(t) = 0$$

× si $t \in]a, +\infty[$, alors :

$$f_n(t) = F'_{W_n}(t) = -(-3n) a^{3n} t^{-3n-1} = \frac{3n a^{3n}}{t^{3n+1}}$$

× On choisit enfin : $f_n(a) = \frac{3na^{3a}}{a^{3n+1}}$.

Finalement : $f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3a}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$.

□

c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.

Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a .

Démonstration.

- La v.a.r. W_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_n(t) dt$.
- Comme la fonction f_n est nulle en dehors de $[a, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_a^{+\infty} t f_n(t) dt$$

- Soit $t \in [a, +\infty[$. On remarque de plus :

$$t f_n(t) = t \frac{3n a^{3n}}{t^{3n+1}} = 3n a^{3n} \frac{1}{t^{3n}}$$

Or, d'après la question 1. appliquée à $3n \geq 2$ (car $n \geq 1$), on obtient que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n}} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{(3n-1) a^{3n-1}}$.

- On en déduit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} t f_n(t) dt$ est convergente (on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par un réel non nul).

On en conclut que W_n admet une espérance.

- De plus :

$$\mathbb{E}(W_n) = \int_a^{+\infty} t f_n(t) dt = 3n a^{3n} I_{3n}(a) = 3n a^{3n} \frac{1}{(3n-1) a^{3n-1}} = \frac{3n}{3n-1} a$$

$$\mathbb{E}(W_n) = \frac{3n}{3n-1} a$$

- On obtient alors :

$$\mathbb{E}(W_n) = \frac{3n}{3n-1} a$$

$$\text{donc } \frac{3n-1}{3n} \mathbb{E}(W_n) = a$$

$$\text{d'où } \mathbb{E}\left(\frac{3n-1}{3n} W_n\right) = a \quad (\text{par linéarité de l'espérance})$$

On pose alors $\lambda_n = \frac{3n-1}{3n}$. La v.a.r. $\lambda_n W_n = \frac{3n-1}{3n} \min(X_1, \dots, X_n)$ s'exprime :

× à l'aide d'un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) de la v.a.r. X ,

× sans mention du paramètre a .

La v.a.r. $\lambda_n W_n$ est donc un estimateur de a .

- La v.a.r. $\lambda_n W_n$ admet une espérance (donc un biais) en tant que transformée linéaire de la v.a.r. W_n qui en admet une. De plus :

$$b_a(\lambda_n W_n) = \mathbb{E}(\lambda_n W_n) - a = 0 \quad (\text{d'après un point précédent})$$

La v.a.r. $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais de a .

□

- d)** Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n(3n-2)}$.

Démonstration.

- La v.a.r. W_n admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_n(t) dt$.
- Comme la fonction f_n est nulle en dehors de $[a, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt = \int_a^{+\infty} t^2 f_n(t) dt$$

- Soit $t \in [a, +\infty[$. On remarque de plus :

$$t^2 f_n(t) = t^2 \frac{3n a^{3n}}{t^{3n+1}} = 3n a^{3n} \frac{1}{t^{3n-1}}$$

Or, d'après la question 1. appliquée à $3n-1 \geq 2$ (car $n \geq 1$), on obtient que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n-1}} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{(3n-2)a^{3n-2}}$.

- On en déduit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} t^2 f_n(t) dt$ est convergente (on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par un réel non nul).

On en conclut que W_n admet une variance.

- De plus :

$$\mathbb{E}(W_n^2) = \int_a^{+\infty} t^2 f_n(t) dt = 3n a^{3n} I_{3n-1}(a) = 3n a^{3n} \frac{1}{(3n-2) a^{3n-2}} = \frac{3n}{3n-2} a^2$$

Ainsi, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(W_n) &= \mathbb{E}(W_n^2) - (\mathbb{E}(W_n))^2 \\ &= \frac{3n}{3n-2} a^2 - \left(\frac{3n}{3n-1} a \right)^2 \\ &= \left(\frac{3n}{3n-2} - \frac{(3n)^2}{(3n-1)^2} \right) a^2 \\ &= 3n \frac{(3n-1)^2 - 3n(3n-2)}{(3n-2)(3n-1)^2} a^2 \\ &= 3n \frac{9n^2 - 6n + 1 - (9n^2 - 6n)}{(3n-2)(3n-1)^2} a^2 \\ &= \frac{3n}{(3n-2)(3n-1)^2} a^2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(W_n) = \frac{3n}{(3n-2)(3n-1)^2} a^2$$

- La v.a.r. $\lambda_n W_n$ admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que transformée linéaire de la v.a.r. W_n qui en admet une.
- Enfin, par décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned} r_a(\lambda_n W_n) &= \mathbb{V}(\lambda_n W_n) + (b_a(\lambda_n W_n))^2 \\ &= \mathbb{V}(\lambda_n W_n) + 0 && \text{(car } \lambda_n W_n \text{ est un estimateur sans biais de } a \text{ d'après la question précédente)} \\ &= \lambda_n^2 \mathbb{V}(W_n) \\ &= \frac{\cancel{(3n-1)^2}}{(3n)^2} \frac{3n}{(3n-2)\cancel{(3n-1)^2}} a^2 && \text{(d'après un point précédent)} \\ &= \frac{a^2}{3n(3n-2)} \end{aligned}$$

$$r_a(\lambda_n W_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)}$$

□

7. On rappelle que :

- si **A** est une matrice **Scilab**, l'instruction : `A(i, :)` renvoie la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice **A**.
- si **A** est une matrice **Scilab** (éventuellement une matrice ligne), l'instruction : `sum(A)` renvoie la somme des coefficients de la matrice **A**.
- si **X** est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X, style = -1)` représente graphiquement les coefficients de **X** à l'aide de croix droites.
- si **X** est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X, style = -2)` représente graphiquement les coefficients de **X** à l'aide de croix obliques.

- a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```

1  function V = simulV(a, m, n)
2      X = simulX(a, m, n)
3      V = zeros(1, m)
4      for k = .....
5          V(k) = .....
6      end
7  endfunction

```

Démonstration.

- On commence par rappeler, d'après l'énoncé : $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- Détaillons et complétons le script proposé.

× **Début de la fonction**

On commence par préciser la structure de la fonction :

- cette fonction se nomme `simulV`,
- elle prend en entrée les 3 paramètres `a`, `m` et `n`.
- elle admet pour variable de sortie la variable `V`.

```

1  function V = simulV(a, m, n)

```

En ligne 2, on stocke dans la variable `X` un vecteur à `m` lignes et `n` colonnes contenant des simulations de la v.a.r. X . Pour cela, on fait appel à la fonction `simulX` codée en **3.c**).

```

2      X = simulX(a, m, n)

```

En ligne 3, la variable `V`, qui contiendra les `m` simulations de la variable aléatoire V_n , est initialisée au vecteur nul.

```

3      V = zeros(1, m)

```

× **Structure itérative**

Les lignes 4 à 6 consistent à mettre à jour les coordonnées successives du vecteur `V` (de la 1^{ère} à la $m^{\text{ème}}$) pour qu'il contienne `m` simulations de la v.a.r. V_n . Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle `for`).

```

4      for k = 1:m

```

On rappelle que la variable `X` est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_{ij} est une simulation de la v.a.r. X .

Ainsi, chaque ligne k de la matrice \mathbf{X} peut nous fournir une simulation t_k de V_n :

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k,1} & x_{k,2} & \cdots & x_{k,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n x_{1,i} = t_1 \\ \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n x_{2,i} = t_2 \\ \vdots \\ \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n x_{k,i} = t_k \\ \vdots \\ \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n x_{m,i} = t_m \end{array}$$

Pour obtenir ces m simulations t_1, \dots, t_m de V_n , on doit donc, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

- 1) isoler la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{X} . Pour cela, d'après l'énoncé, on doit effectuer l'appel $\mathbf{X}(k, :)$.
- 2) sommer les éléments de cette ligne. Pour cela, on effectue l'appel $\text{sum}(\mathbf{X}(k, :))$.
- 3) multiplier le résultat obtenu par $\frac{2}{3n}$.

On complète donc le programme avec l'instruction suivante :

```

5      V(k) = (2 / (3*n)) * sum( X(k, :) )
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le script **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- Il est aussi possible de proposer une fonction tirant parti des fonctionnalités de la fonction `sum` de **Scilab**.

```

1  function V = simulV(a, m, n)
2      X = simulX(a, m, n)
3      V = zeros(1, m)
4      for k = 1:m
5          V(k) = sum(X, 'c')
6      end
7  endfunction
```

La commande `sum(X, 'c')` permet ici d'obtenir une matrice à m lignes et 1 colonne, où le coefficient de la $k^{\text{ème}}$ ligne est la somme des éléments de la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{X} . □

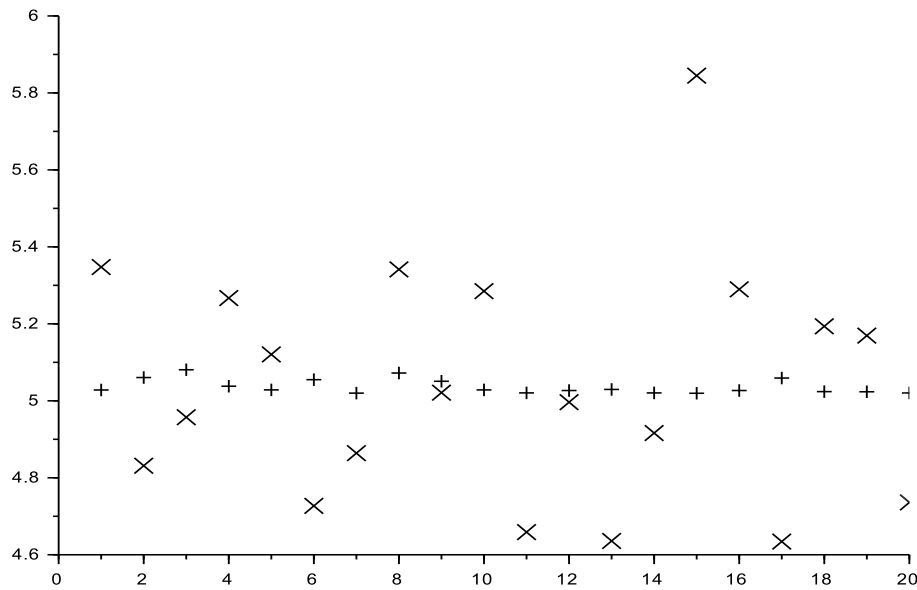
Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```

1  W = simulW(..., ..., ...)
2  V = simulV(..., ..., ...)
3  plot2d(..., style = -1)
4  plot2d(..., style = -2)
```

On justifiera la réponse pour les deux dernière lignes.



Démonstration.

- Commençons par étudier brièvement le script.
 - × En ligne 1, on stocke dans la variable W des simulations de la v.a.r. $\lambda_n W_n$. Il reste à déterminer :
 - la valeur du paramètre a choisi,
 - le nombre de simulations de $\lambda_n W_n$ choisi (il s'agit du paramètre m),
 - la valeur de n choisie
 - × En ligne 2, on stocke dans la variable V des simulations de la v.a.r. V_n . Il reste à déterminer :
 - la valeur du paramètre a choisi,
 - le nombre de simulations de V_n choisi (il s'agit du paramètre m),
 - la valeur de n choisie

Tout d'abord, d'après l'énoncé, on choisit : $n = 100$.

- × En ligne 3 et 4, on lit les instructions pour représenter graphiquement :
 - les coefficients d'un 1^{er} vecteur avec des croix droites,
 - les coefficients d'un 2nd vecteur avec des croix obliques.
 Il semble donc qu'on souhaite représenter graphiquement les vecteurs W et V . Il reste donc à déterminer :
 - quel vecteur (de V ou W) est représenté par les croix droites,
 - quel vecteur (de V ou W) est représenté par les croix obliques.
- Étudions maintenant le graphique présenté.
 - × Les croix obliques **et** les croix droites semblent osciller autour de la valeur 5. Ainsi, les valeurs contenues dans les vecteurs V et W sont *en moyenne* très proches de 5. Or on rappelle que la moyenne des valeurs prises par une v.a.r. est mesurée par l'espérance. Comme les vecteurs V et W contiennent respectivement des simulations des estimateurs V_n et $\lambda_n W_n$ qui sont tous les deux sans biais, on a :

$$\mathbb{E}(\lambda_n W_n) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(V_n) = a$$

Et on en déduit que le paramètre a choisi dans ce script est : $a = 5$.

- × On remarque que les croix obliques sont beaucoup plus écartées que les croix droites de la valeur moyenne 5 (valeur du paramètre a à estimer).

Or on rappelle que le risque quadratique d'un estimateur mesure la moyenne des carrés des écarts au paramètre a . Ainsi, plus le risque d'un estimateur est faible, plus les valeurs prises par cet estimateur sont proches du paramètre a .

Pour savoir qui de V ou W est représenté par des croix droites, on cherche donc à savoir qui des estimateurs V_n et $\lambda_n W_n$ de a possède le risque quadratique le plus faible. Or :

- d'après **5.b**) : $r_a(V_n) = \frac{a^2}{3n}$

- d'après **6.d**) : $r_a(\lambda_n W_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)}$.

Ainsi : $r_a(\lambda_n W_n) \leq r_a(V_n)$.

On en déduit que le vecteur W (contenant des simulations de $\lambda_n W_n$) est représenté par les croix droites, et le vecteur V (contenant des simulations de V_n) est représenté par les croix obliques.

- × La figure comporte 20 croix droites et 20 croix obliques (les dernières croix ne sont visibles qu'à moitié). On en déduit que les vecteurs W et V sont de taille 20. Autrement dit, on a effectué 20 simulations de $\lambda_n W_n$ et 20 simulations de V_n .

Ainsi, on a choisi : $m = 20$.

- Enfin, on complète le script proposé avec les valeurs trouvées précédemment.

```

1 W = simulW(5, 20, 100)
2 V = simulV(5, 20, 100)
3 plot2d(W, style = -1)
4 plot2d(V, style = -2)

```

Commentaire

L'énoncé aurait également pu demander le script de la fonction `simulW` permettant de fournir m simulations de la variable $\lambda_n W_n$. On aurait alors pu proposer l'un des codes suivants :

```

1 function W = simulW(a, m, n)
2     X = simulX(a, m, n)
3     W = zeros(1, m)
4     for k = 1:m
5         W(k) = ((3 * n) / (3 * n - 1)) * min( X(k, :) )
6     end
7 endfunction

```

```

1 function W = simulW(a, m, n)
2     X = simulX(a, m, n)
3     W = zeros(1, m)
4     for k = 1:m
5         W(k) = ((3 * n) / (3 * n - 1)) * min(X, 'c')
6     end
7 endfunction

```

□