

ECRICOME 2020

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M , puis calculer $(M - I_3)^2$.
2. En déduire l'unique valeur propre possible de M .
3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M , et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.
5. Démontrer que M n'est pas inversible.
6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.

On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} est la matrice M .

Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E .
8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.
9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.
10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' , que l'on notera T .
11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

2. Étudier les variations de f_n .

3. Démontrer que f_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ , et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur \mathbb{R}_+ .

4. a) Démontrer : $\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

b) Montrer alors : $\forall x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x - 1)^2$.

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n) , où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.

On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n + 2} - \frac{1}{2n + 1} \right)$$

8. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$.

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.b) de la partie A, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n .
12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.
13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1, 1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

- a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.
 - b) Donner la fonction de répartition de X .
 - c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.
 - d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.
3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose : $Y = \frac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.
 - a) Déterminer $Y(\Omega)$.
 - b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.
 - c) Écrire une fonction en langage **Scilab** d'en-tête : `function Y = simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X . Ces réels seront choisis de façon indépendante.
À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m, n)` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

4. a) Calculer $\mathbb{P}([X > 2a])$.
- b) Calculer $\mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a])$.
- c) On suppose que la fonction **Scilab** de la question 3.a) a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```

1  a = 10
2  N = 100000
3  s1 = 0
4  s2 = 0
5  X = simulX(a, 1, N)
6  for k = 1:N
7      if ..... then
8          s1 = s1 + 1
9          if X(k) > 6 * a then
10             .....
11         end
12     end
13 end
14 if s1 > 0 then
15     disp(.....)
16 end

```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a .

Soit n un entier naturel non nul, et X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

5. On pose : $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a .

b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n}$.

6. On pose : $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.

Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a .

d) Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n(3n-2)}$.

7. On rappelle que :

- si A est une matrice **Scilab**, l'instruction : `A(i, :)` renvoie la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .
- si A est une matrice **Scilab** (éventuellement une matrice ligne), l'instruction : `sum(A)` renvoie la somme des coefficients de la matrice A .
- si X est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X, style = -1)` représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de croix droites.
- si X est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X, style = -2)` représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de croix obliques.

a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```

1  function V = simulV(a, m, n)
2      X = simulX(a, m, n)
3      V = zeros(1, m)
4      for k = .....
5          V(k) = .....
6      end
7  endfunction

```

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```

1  W = simulW(..., ..., ...)
2  V = simulV(..., ..., ...)
3  plot2d(..., style = -1)
4  plot2d(..., style = -2)

```

On justifiera la réponse pour les deux dernière lignes.

