

## ECRICOME 2020

---

### Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note  $I_3$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Soit  $a$  un réel ; on pose  $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$ .

#### Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que  $a = 1$ .

1. Expliciter la matrice  $M$ , puis calculer  $(M - I_3)^2$ .
2. En déduire l'unique valeur propre possible de  $M$ .
3. La matrice  $M$  est-elle inversible ? La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

#### Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que  $a = 0$ .

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de  $M$ , et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.
5. Démontrer que  $M$  n'est pas inversible.
6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de  $M$ , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

#### Partie C : Étude du cas où $a$ est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que  $a$  est différent de 0 et de 1.

On pose  $E = \mathbb{R}^3$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $E$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice  $M$ .

Soit  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (1, 0, 1)$  et  $w = (1, 1, 0)$ .

7. Démontrer que la famille  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $E$ .
8. Calculer  $f(u)$ ,  $f(v)$ .
9. Calculer  $f(w)$  et trouver deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $f(w) = \alpha v + \beta w$ .
10. Déterminer la matrice représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , que l'on notera  $T$ .
11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de  $M$ , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

## Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

### Partie A : Étude de la fonction $f_n$

Dans cette partie, on fixe un entier naturel  $n$  non nul.

1. Démontrer que la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

2. Étudier les variations de  $f_n$ .

3. Démontrer que  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ , et calculer sa dérivée seconde.  
En déduire que  $f_n$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+$ .

4. a) Démontrer :  $\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$ .

b) Montrer alors :  $\forall x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x - 1)^2$ .

c) En déduire la limite de  $f_n(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

5. Calculer  $f_n(0)$ , puis démontrer :  $f_n(1) < 0$ .

6. Démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.  
On note  $x_n$  cette solution.

### Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite  $(x_n)$ , où pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x_n$  est l'unique solution strictement positive de l'équation :  $f_n(x) = 0$ .

On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}$$

7. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left( \frac{x}{2n + 2} - \frac{1}{2n + 1} \right)$$

8. a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ .

b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$ .

c) Montrer alors que la suite  $(x_n)$  est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. a) Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :  $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$ .

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.b) de la partie A, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de  $x_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

### Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel  $n$  non nul.

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction  $G_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Justifier que la fonction  $G_n$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  et calculer ses dérivées partielles premières.
11. Déterminer l'ensemble des points critiques de  $G_n$ .
12. Calculer la matrice hessienne de  $G_n$  au point  $(x_n, x_n)$  puis au point  $(1, 1)$ .
13. La fonction  $G_n$  admet-elle un extremum local en  $(x_n, x_n)$  ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
14. La fonction  $G_n$  admet-elle un extremum local en  $(1, 1)$  ? Si oui, donner la nature de cet extremum.

### Exercice 3

Soit  $a$  un réel strictement positif.

1. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$

Montrer que l'intégrale  $I_n(a)$  converge et vaut  $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

- a) Démontrer que  $f$  est bien une densité de probabilité. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  pour densité.
  - b) Donner la fonction de répartition de  $X$ .
  - c) Démontrer que  $X$  admet une espérance et calculer cette espérance.
  - d) Démontrer que  $X$  admet une variance et que celle-ci vaut  $\frac{3a^2}{4}$ .
3. Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $]0, 1]$ . On pose :  $Y = \frac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$ .
    - a) Déterminer  $Y(\Omega)$ .
    - b) Déterminer la fonction de répartition de  $Y$  et vérifier que  $Y$  et  $X$  suivent la même loi.
    - c) Écrire une fonction en langage **Scilab** d'en-tête : `function Y = simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel  $a$  strictement positif et deux entiers naturels  $m$  et  $n$  non nuls, qui renvoie une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de  $X$ . Ces réels seront choisis de façon indépendante.  
À cet effet, on rappelle que si  $m$  et  $n$  sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m, n)` renvoie une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur  $]0, 1]$ , ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

4. a) Calculer  $\mathbb{P}([X > 2a])$ .
- b) Calculer  $\mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a])$ .
- c) On suppose que la fonction **Scilab** de la question 3.a) a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```

1  a = 10
2  N = 100000
3  s1 = 0
4  s2 = 0
5  X = simulX(a, 1, N)
6  for k = 1:N
7      if ..... then
8          s1 = s1 + 1
9          if X(k) > 6 * a then
10             .....
11         end
12     end
13 end
14 if s1 > 0 then
15     disp(.....)
16 end

```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre  $a$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul, et  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que  $X$ .

5. On pose :  $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$ .

a) Montrer que  $V_n$  est un estimateur sans biais pour le paramètre  $a$ .

b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut  $\frac{a^2}{3n}$ .

6. On pose :  $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

a) Déterminer la fonction de répartition de  $W_n$  et vérifier que  $W_n$  est bien une variable aléatoire à densité.

b) Montrer que  $W_n$  admet pour densité la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

c) Démontrer que  $W_n$  admet une espérance et calculer cette espérance.

Déterminer alors l'unique réel  $\lambda_n$  dépendant de  $n$  tel que  $\lambda_n W_n$  est un estimateur sans biais pour le paramètre  $a$ .

d) Calculer le risque quadratique de  $\lambda_n W_n$  et vérifier que celui-ci vaut  $\frac{a^2}{3n(3n-2)}$ .

7. On rappelle que :

- si  $A$  est une matrice **Scilab**, l'instruction : `A(i, :)` renvoie la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$ .
- si  $A$  est une matrice **Scilab** (éventuellement une matrice ligne), l'instruction : `sum(A)` renvoie la somme des coefficients de la matrice  $A$ .
- si  $X$  est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X, style = -1)` représente graphiquement les coefficients de  $X$  à l'aide de croix droites.
- si  $X$  est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X, style = -2)` représente graphiquement les coefficients de  $X$  à l'aide de croix obliques.

a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise  $m$  simulations de la variable aléatoire  $V_n$  et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à  $m$  éléments :

```

1  function V = simulV(a, m, n)
2      X = simulX(a, m, n)
3      V = zeros(1, m)
4      for k = .....
5          V(k) = .....
6      end
7  endfunction

```

Pour la suite, on prend  $n = 100$  et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir  $m$  simulations de la variable aléatoire  $\lambda_n W_n$ .

b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```

1  W = simulW(..., ..., ...)
2  V = simulV(..., ..., ...)
3  plot2d(..., style = -1)
4  plot2d(..., style = -2)

```

On justifiera la réponse pour les deux dernière lignes.

