HEC 2019

Exercice

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le produit matriciel $M = CL$.

a) (i) Calculer M et M^2.

Démonstration.

- Tout d'abord : $M \; = \; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}}$$

Commentaire

Si on note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M, on remarque :

$$C_1 = C, \quad C_2 = 2\,C \quad \text{et} \quad C_3 = -\,C$$

La matrice M est donc obtenue par concaténation de copies, à coefficients multiplicatifs près, de la colonne C. L'objectif de l'énoncé est l'étude des propriétés de telles matrices.

- Ensuite :

$$\begin{aligned} M^2 &= M \times M \; = \; CL \times CL \\ &= C \times (LC) \times L && \textit{(par associativité)} \\ &= (LC) \cdot C \times L && \textit{(car comme } L \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \textit{ et } C \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ LC \textit{ est un réel)} \\ &= 0 \cdot M \; = \; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

En effet : $LC \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; = \; 1 \times 0 + 2 \times 1 - 1 \times 2 = 2 - 2 = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } M^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

Évidemment, on peut aussi effectuer le calcul de M^2 directement :

$$M^2 \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un tel calcul permet assurément d'obtenir tous les points de la question mais n'est pas dans l'esprit de la construction très particulière de la matrice M. Il s'agit ici de faire apparaître sur un exemple simple de petite taille (manipulation d'une matrice ligne et d'une matrice colonne à 3 éléments), des propriétés qu'on généralisera à des matrices de tailles quelconques.

$\square$

(ii) Déterminer le rang de M.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(M) = 1}$$

□

(iii) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)(i)***, le polynôme $Q(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de la matrice M. Ainsi :
$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$$
$$\boxed{\text{Le réel } 0 \text{ est la seule valeur propre possible de } M.}$$
- D'après la question précédente : $\mathrm{rg}(M) = 1 \neq 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$.
$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } M \text{ n'est pas inversible et } 0 \text{ est la seule valeur propre de } M.}$$
- Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Considérons l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la représentation dans la base $\mathscr{B}$ est M. Par le théorème du rang :
$$\begin{array}{ccccc}
\dim\big(\mathbb{R}^3\big) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
3 & & \dim\big(E_0(f)\big) & & \mathrm{rg}(f) \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(E_0(M)\big) & + & \mathrm{rg}(M)
\end{array}$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_0(M)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) - \mathrm{rg}(M) = 3 - 1 = 2.}$$

$$\boxed{\text{Comme } \dim\big(E_0(M)\big) = 2 \neq 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big), \text{ la matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- On a démontré que la matrice M possédait une unique valeur propre. Dans ce cas, il est classique de procéder par l'absurde pour démontrer que M n'est pas diagonalisable.
- Supposons que M est diagonalisable.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M telles que PDP^{-1}.
Or 0 est la seule valeur propre de M. Ainsi $D = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et :
$$M = PDP^{-1} = P\,0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\,P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
Absurde !

□

Commentaire

- Il était aussi possible de déterminer le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_0(M) & \Longleftrightarrow & M\,X = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ x + 2\,y - z & = & 0 \\ 2\,x + 4\,y - 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ x + 2\,y - z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ x = -2\,y + z \right. \end{array}$$

  Finalement on obtient l'expression de $E_0(M)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_0(M) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -2y + z\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(M)$ par lecture de la matrice $M - \lambda\, I_3$.

  Ici, on a $\lambda = 0$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_0(M)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $M\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ & = & x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, plusieurs choix sont possibles. Plus précisément :

  × si l'on choisit $y = 0$, il suffit de prendre $x = z$ pour obtenir le vecteur nul.
  En prenant (par exemple) $z = 1$, on obtient : $x = 1$.

  × si l'on choisit $z = 0$, il suffit de prendre $x = -2y$ pour obtenir le vecteur nul.
  En prenant (par exemple) $y = 1$, on obtient : $y = -2$.

  On obtient ainsi : $E_0(M) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  Et l'égalité est vérifiée car ces deux espaces vectoriels sont de même dimension.

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice P est inversible et calculer le produit $P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{rg}(P) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \;=\; 3$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } P \text{ est inversible.}}$$

- Ensuite :

$$P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

□

c) Trouver une matrice inversible Q dont la transposée ${}^tQ$ vérifie : ${}^tQ\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Notons ${}^tQ = \begin{pmatrix} x & u & a \\ y & v & b \\ z & w & c \end{pmatrix}$ où $(x, y, z, u, v, w, a, b, c) \in \mathbb{R}^9$. Remarquons tout d'abord :

$${}^tQ\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x & u & a \\ y & v & b \\ z & w & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, plusieurs choix sont possibles. Plus précisément :
  × pour obtenir : $x + 2\,u - a = 1$, on peut prendre $x = 1$ et $u = a = 0$.
  × pour obtenir : $y + 2\,v - b = 0$, on peut prendre $y = 2$ et $v = -1$ et $b = 0$.
  × pour obtenir : $z + 2\,w - c = 0$, on peut prendre $z = -1$ et $w = 1$ et $c = 1$.

  On construit ainsi la matrice ${}^tQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  Cette matrice est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls.
  Elle est donc inversible.

$$\boxed{\text{La matrice } Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible et vérifie } {}^tQ\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Remarquons tout d'abord, par propriété de l'application transposée :
$$ {}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$
L'introduction de la transposée a donc pour but ici de faire apparaître un calcul sur des lignes plutôt que sur des colonnes. Si on travaille directement sur l'égalité de droite, on obtient, avec les notations précédentes :
$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} Q \ = \ 1 \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} $$
On obtient évidemment les mêmes équations que précdemment.
- On retiendra qu'en multipliant $Q \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à droite (resp. gauche) par une matrice colonne (resp. ligne), on obtient une combinaison linéaire des colonnes (resp. lignes) de la matrice Q. On peut retenir l'idée développée dans le paragraphe par la forme :
$$ L \ A \ C $$
qui signifie qu'avec une multiplication à gauche, on effectue une opération sur les (L)ignes, tandis qu'avec une multiplication à droite, on effectue une multiplication sur les (C)olonnes.
- D'autres choix étaient possibles pour la matrice Q. Par exemple, on pouvait choisir :
$$ Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} $$
Il est à noter qu'il ne suffit pas de résoudre les contraintes issues des équations pour exhiber une matrice Q satisfaisante. Il est précisé dans l'énoncé que Q est une matrice inversible. Cela explique la direction prise par la résolution proposée initialement : les choix effectués permettent de construire une matrice qui est visiblement inversible (triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls).

□

d) Pour une telle matrice Q, calculer le produit $P\,M\,Q$.

Démonstration.

$$ \begin{array}{rcl} P\,M\,Q & = & P\,(CL)\,Q \\ & = & (PC)\,(LQ) \\ & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{(d'après les calculs effectués en } \textbf{\textit{1.b)}} \textit{ et en } \textbf{\textit{1.c)}}\textit{)} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ E_{1,1} \end{array} $$

$$ \boxed{\text{Ainsi : } P\,M\,Q = E_{1,1}.} $$

□

2. La fonction **Scilab** suivante permet de multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i d'une matrice A par une réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\,L_i$ (où $a \neq 0$).

```
function B = multilig(a, i, A)
    [n, p] = size(A)
    B = A
    for j = 1:p
        B(i, j) = a ⋆ B(i, j)
    end
endfunction
```

Commentaire

- Le code de ce programme est plutôt simple à comprendre :
  - × on crée une copie de la matrice `A` que l'on stocke dans la variable `B`,
  - × on met à jour la `i`$^{\text{ème}}$ ligne de `B` en modifiant un par un les éléments de cette ligne à l'aide de la boucle `for`.
- Pour être plus proche de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\,L_i$, on pouvait opter pour une présentation ne nécissitant pas l'utilisation de la boucle `for` :

```
function B = multilig(a, i, A)
    [n, p] = size(A)
    B = A
    B(i, :) = a .⋆ B(i, :)
    end
endfunction
```

L'appel `B(i, :)` permet d'accéder à la `i`$^{\text{ème}}$ ligne de `B`. On peut modifier cette ligne en lui assignant une matrice ligne de même taille, ce qu'on fait ici.

a) Donner le code **Scilab** de deux fonctions `adlig` (d'arguments `b`, `i`, `j`, `A`) et `echlig` (d'arguments `i`, `j`, `A`) permettant d'effectuer respectivement les autres opérations sur les lignes d'une matrice :

$$Li \leftarrow L_i + b\,L_j \ (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j \ (i \neq j)$$

Démonstration.

- On s'inspire de la fonction donnée pour créer `adlig` :

```
function B = adlig(b, i, j, A)
    [n, p] = size(A)
    B = A
    for k = 1:p
        B(i, k) = B(i, k) + b ⋆ B(j, k)
    end
endfunction
```

Commentaire

On note que la variable `j` est ici une variable d'entrée du programme (on l'utilise pour désigner la ligne ajoutée dans l'opération élémentaire $Li \leftarrow L_i + b\,L_j$ $(i \neq j)$). Cela oblige à renommer la variable d'itération du programme `multilig`.

- La fonction `echlig` est créée suivant le même principe :

```
1   function B = echlig(i, j, A)
2       [n, p] = size(A)
3       B = A
4       aux = 0
5       for k = 1:p
6           aux = B(i, k)
7           B(i, k) = B(j, k)
8           B(j, k) = aux
9       end
10  endfunction
```

Commentaire

- On a introduit ici une variable auxiliaire appelée `aux`. Le but de cette variable est de ne pas perdre d'information lors de l'échange des valeurs des deux coefficients de la même colonne. Plus précisément :
  - × l'instruction de la ligne 6 permet de stocker la valeur de `B(i, k)`.
  - × en ligne 7, on écrase la valeur du coefficient $B(i, k)$ en lui affectant la valeur $B(j, k)$.
  - × enfin, en ligne 8, on affecte à `B(i, k)` la valeur de `aux`, c'est-à-dire la valeur **initiale** (et pas la nouvelle valeur) du coefficient $B(i, k)$.
- On pouvait aussi tirer parti du fait que l'on travaille sur une copie `B` de la matrice `A` d'entrée (jamais modifiée) pour ne pas introduire de variable auxiliaire `aux`.

```
function B = echlig(i, j, A)
    [n, p] = size(A)
    B = A
    for k = 1:p
        B(i, k) = A(j, k)
        B(j, k) = A(i, k)
    end
endfunction
```

□

b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```
function B = multiligmat(a, i, A)
    [n, p] = size(A)
    D = eye(n, n)
    D(i, i) = a
    B = D ⋆ A
endfunction
```

Démonstration.
Nommons A, B, i, a, n et p les éléments codés par les variables du programme correspondantes.

- L'instruction en ligne <u>3</u> : `D = eye(n, n)` permet de créer la matrice identité I_n.
(le nom `eye` *provient d'un jeu sur les sonorités : on crée à l'aide de cette instruction la matrice identité qui en anglais se dit « identity matrix » qu'il faut lire* `eye`*-dentity matrix)*
- L'instruction en ligne <u>4</u> : `D(i, i) = a` permet de remplacer le coefficient $D_{i,i}$ par la valeur a.
On crée ainsi une matrice D diagonale carrée d'ordre n dont :
  × le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal est la valeur a,
  × les autres coefficients diagonaux ont tous la même valeur 1.
- L'instruction en ligne <u>5</u> : `B = D * A` permet de stocker, dans la variable `B`, le résultat de la multiplication $D \times A$. Détaillons ce calcul.

  Soit $(i', j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. Par la formule de multiplication matricielle, on a :

$$B_{i',j} \ = \ \sum_{k=1}^{n} D_{i',k} \times A_{k,j} \ = \ D_{i',i'} \times A_{i',j} \qquad \textit{(car } D_{i',k} = 0 \textit{ si } k \neq i' \textit{)}$$

  Deux cas se présentent alors :
  × <u>si $i' = i$</u> alors $D_{i',i'} = D_{i,i} = $ a et ainsi : $B_{i,j} = a \times A_{i,j}$.

  $\boxed{\text{La } i^{\text{ème}} \text{ ligne de } B \text{ est obtenue en multipliant la } i^{\text{ème}} \text{ ligne de } A \text{ par } a.}$

  × <u>si $i' \neq i$</u> alors $D_{i',i'} = 1$ et ainsi : $B_{i',j} = 1 \times A_{i',j} = A_{i',j}$.

  $\boxed{\text{Les autres lignes de } B \text{ sont des copies des lignes correspondantes de la matrice } A.}$

On en conclut que la fonction `multiligmat` permet de calculer la matrice obtenue en appliquant à A l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\, L_i$.
Cela correspond bien au calcul effectué par la fonction `multilig`.

Commentaire

- La matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ décrite dans cette question est une matrice **de dilatation**.
L'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\, L_i$ (resp. $C_i \leftarrow a\, C_i$) se traduit par la multiplication matricielle à gauche (resp. à droite) de la matrice initiale A par la matrice D.
- Illustrons de point par un exemple simple. Considérons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors :

$$D\,M \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 10 & 20 & -10 \end{pmatrix}$$

(on multiplie la $3^{\text{ème}}$ ligne par 5)

$$\text{et} \qquad M\,D \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

(on multiplie la $3^{\text{ème}}$ colonne par 5)

□

3. Dans cette question, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et de sa $j^{\text{ème}}$ colonne, et qui vaut 1.

a) (i) Justifier l'existence d'une matrice colonne non nulle $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice ligne non nulle $L_1 = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = C\,L$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} C\,L &= \begin{pmatrix} c_1\,\ell_1 & c_1\,\ell_2 & \dots & c_1\,\ell_{n-1} & c_1\ell_n \\ c_2\,\ell_1 & c_2\,\ell_2 & \dots & c_2\,\ell_{n-1} & c_2\ell_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1}\,\ell_1 & c_{n-1}\,\ell_2 & \dots & c_{n-1}\,\ell_{n-1} & c_{n-1}\,\ell_n \\ c_n\,\ell_1 & c_n\,\ell_2 & \dots & c_n\,\ell_{n-1} & c_n\ell_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\ell_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \quad \ell_2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \quad \dots \quad \ell_{n-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \quad \ell_n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \ell_1\,C & \dots & \ell_n\,C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Il s'agit donc de démontrer que toute matrice de rang 1 apparaît comme concaténation de colonnes colinéaires à une matrice colonne C non nulle.
  Ce résultat se montre en deux étapes.

- Tout d'abord, comme la matrice M est de rang 1 elle est forcément non nulle (si c'était le cas, elle serait de rang 0). Ainsi, M admet (au moins) une colonne non nulle. On note C la première colonne non nulle de M.

- Démontrons maintenant que toutes les colonnes de M sont colinéaires à C.
  On procède par l'absurde.

  Supposons que le matrice M possède une colonne non colinéaire à C.
  Notons $k \in [\![1,n]\!]$ l'indice de cette colonne. Alors :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) &= \text{rg}\left(C_1(M), \dots, C_n(M)\right) \\ &\geqslant \text{rg}\left(C_k(M), C\right) \qquad \textit{(car C et $C_k(M)$ sont des colonnes de M)} \end{aligned}$$

  La famille $\left(C_k(M), C\right)$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.
  On en déduit :

$$\text{rg}(M) \geqslant \text{rg}\left(C_k(M), C\right) = 2$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, toute colonne de } M \text{ est colinéaire à } C}$$

- Il existe donc un n-uplet $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \ell_1\,C & \dots & \ell_n\,C \end{pmatrix}$$

  Notons que ce n-uplet est forcément différent du n-uplet $(0, \dots, 0)$ (si c'était le cas, la matrice M serait nulle).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, si } M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1, il existe un matrice colonne } C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ \text{une matrice ligne non nulle } L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \text{ telles que : } M = C\,L.\end{array}}$$

□

(ii) Calculer la matrice $M\,C$ et en déduire une valeur propre de M.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} M \times C & = & (C\,L) \times C & \\ & = & C \times (L\,C) & \textit{(par associativité)} \\ & = & (LC) \cdot C & \textit{(car comme } L \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \textit{ et } C \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ LC \textit{ est un réel)} \\ & = & \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ell_i\, c_i\right) \cdot C & \end{array}$$

> Comme $C \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, le vecteur C est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\sum\limits_{i=1}^{n} \ell_i\, c_i$.

□

(iii) Montrer que si le réel $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, \ell_i$ est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.

Démonstration.

- Par définition :

$$\mathrm{rg}(M) = 1 \neq n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$$

  En effet, il est précisé dans l'énoncé : $n \geqslant 2$.

  > On en déduit que M n'est pas inversible. Ainsi, le réel 0 est valeur propre de M.

- Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ dont la représentation dans la base $\mathscr{B}$ est M. Par le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathbb{R}^n\big) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ n & & \dim\big(E_0(f)\big) & & \mathrm{rg}(f) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(E_0(M)\big) & + & \mathrm{rg}(M) \end{array}$$

  > Ainsi : $\dim\big(E_0(M)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) - \mathrm{rg}(M) = n - 1$.

- Notons $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, l_i$. On suppose α non nul.

  D'après la question précédente, α est valeur propre de M. On en déduit : $\dim\big(E_\alpha(M)\big) \geqslant 1$.
  Ainsi :

$$\dim\big(E_0(M)\big) + \dim\big(E_\alpha(M)\big) \geqslant (n-1) + 1 \geqslant n$$

  Et comme on a forcément : $\dim\big(E_0(M)\big) + \dim\big(E_\alpha(M)\big) \leqslant n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$, on en conclut :

$$\dim\big(E_0(M)\big) + \dim\big(E_\alpha(M)\big) = n$$

> Ainsi, si $\alpha \neq 0$, la matrice M possède deux valeurs propres distinctes 0 et α.
> Comme : $\dim\big(E_0(M)\big) + \dim\big(E_\alpha(M)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$, la matrice M est diagonalisable.

□

b) (i) À l'aide de l'égalité $M = C\,L$, établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $P\,M\,Q = E_{1,1}$.

Démonstration.

- D'après un calcul analogue à celui fait en ***3.a)(i)*** : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1}$.
- Pour résoudre la question, il suffit donc de trouver deux matrices inversibles P et Q de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$P\,C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad L\,Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, si c'est le cas, on a :

$$\begin{array}{rcll} P\,M\,Q & = & P\,(CL)\,Q & \\ & = & (PC)\,(LQ) & \textit{(par associativité)} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} & \end{array}$$

- Il reste à démontrer l'existence des matrices P et Q. Remarquons dans un premier temps :

$$PC = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C \quad \Leftrightarrow \quad \text{La première colonne de } P^{-1} \text{ est le vecteur } C$$

Il s'agit donc de construire une matrice **inversible** dont la première colonne est C.
La première colonne étant fixée, il reste à choisir les suivantes.

- Construisons une telle matrice. Deux cas se présentent :
  × si $c_1 \neq 0$, on pose :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c_2 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice est bien inversible car elle est trinagulaire inférieure et de coefficients diagonaux tous non nuls.

  × si $c_1 = 0$, on note i_0 l'indice du premier coefficient non nul du vecteur C. On pose alors :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i_0} & \vdots & & \ddots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ c_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrons que cette matrice est inversible :

$$\mathrm{rg}\left(P^{-1}\right) \overset{C_1 \leftrightarrow C_{i_0}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & c_{i_0} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

La réduite obtenue est triangulaire inférieure et à coefficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale P^{-1}.

- Il reste alors à construire Q. Remarquons :

$$LQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow {}^tQ\ {}^tL = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left({}^tQ\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = {}^tL \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{La première colonne} \\ \text{de } \left({}^tQ\right)^{-1} = {}^t\left(Q\right)^{-1} \\ \text{est le vecteur } {}^tL \end{array}$$

On construit alors ${}^t\left(Q\right)^{-1}$ par la méthode ayant permis la construction de P^{-1}.

$$\boxed{\text{On a bien démontré l'existence de deux matrices inversibles } P \text{ et } Q \text{ telles que } P\,M\,Q = E_{1,1}.}$$

□

Commentaire

Pour construire P^{-1}, on peut aussi faire appel au théorème dit de la base incomplète qui stipule :

> Toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie n peut être complétée en une base de E

Ici, comme le vecteur C est non nul, la famille (C) est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On peut donc compléter cette famille en une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit, il existe des vecteurs colonnes $C_2, \dots C_n$ tels que la famille $\left(C, C_2, \dots, C_n\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On peut alors construire la matrice P^{-1} par concaténation de ces vecteurs :

$$P^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} C & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

Cette matrice est bien inversible. En effet :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} C & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(C, C_2, \dots, C_n\right) \ = \ n \quad \textit{(car } \left(C, C_2, \dots, C_n\right) \textit{ est une famille libre)}$$

(ii) En déduire que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i \, M \, Q_j = E_{i,j}$.

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On raisonne comme précédemment.

- Remarquons tout d'abord que $E_{i,j}$ peut s'obtenir comme produit :
  - × de la matrice colonne contenant uniquement des 0 sauf en ligne i où il contient un 1.
  - × de la matrice ligne contenant uniquement des 0 sauf en colonne j où il contient un 1.
- Pour résoudre la question, il suffit donc de trouver deux matrices inversibles P et Q de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_i \, C \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad L \, Q_j \ = \ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Pour un raisonnement analogue à celui de la question précédente, il suffit alors de trouver :
  - × une matrice P_i^{-1} inversible dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est C.
  - × une matrice ${}^t\big(Q_j\big)^{-1}$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est ${}^tL$.

On obtient ces deux matrices par une construction similaire à la précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout couple } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \text{ il existe deux matrices inversibles } P_i \text{ et } Q_j \text{ telles que } P_i \, M \, Q_j = E_{i,j}.}$$

□

Problème

Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité.
Les cumulants d'ordre 3 *et* 4 *permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui viennent compléter la description usuelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion) ; ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.*

Dans tout le problème :

- on note $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$;
- sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$;
- pour tout variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire $\mathrm{e}^{t\,X}$ admet une espérance, on pose :
$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln\big(M_X(t)\big);$$
(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants* de X)
- lorsque, pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle *cumulant d'ordre p de X*, noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée $p^{\text{ème}}$ de K_X en 0 :
$$Q_p(X) \;=\; K_X^{(p)}(0).$$

Commentaire

- La fonction génératrice des moments d'une v.a.r. X est un objet classique en probabilités. Comme son nom l'indique, cette fonction permet de retrouver les moments de X (sous réserve d'existence). Plus précisément, si la v.a.r. X admet un moment d'ordre n, alors :
$$\mathbb{E}(X^n) \;=\; M_X^{(n)}(0)$$
- On ne confondra pas cette fonction avec une autre fonction classique en probabilités : la fonction génératrice (des probabilités). Cette dernière n'est définie que pour des v.a.r. X à valeurs entières et positives par la formule :
$$\forall s \in [0,1], \quad G_X(s) \;=\; \mathbb{E}(s^X) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} s^k\, \mathbb{P}([X=k])$$
Cette fonction caractérise quant à elle, non pas les moments de X, mais sa loi.
Plus précisément :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X=n]) \;=\; \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$
- L'énoncé propose de démontrer quelques propriétés de la fonction génératrice des moments pour des v.a.r. particulières. Par exemple, dans le cas d'une v.a.r. X à valeurs dans $[\![-n,n]\!]$:
  - × $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p)$,
  - × $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{nt}\, M_X(t)$.
  (lien entre la fonction génératrice et la fonction génératrice des moments)

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes à valeurs entières ;
- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([S=-1]) \ = \ \mathbb{P}([S=+1]) \ = \ \frac{1}{2}.$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
La v.a.r. X est une v.a.r. finie. Ainsi, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X}$ est également une v.a.r. finie. Elle admet donc des moments à tout ordre, en particulier une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ le réel } M_X(t) \text{ est bien défini.}}$$

Commentaire

On rappelle que, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset [\![-n, n]\!] = \{k \mid k \in [\![-n, n]\!]\}$.
On en déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right)(\Omega) \ = \ \mathrm{e}^{t\,X(\Omega)} \ = \ \{\mathrm{e}^{t\,k} \mid k \in [\![-n, n]\!]\}$$

On retrouve bien que la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X}$ est finie.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme X est une v.a.r. discrète, par théorème de transfert :

$$M_X(t) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right) \ = \ \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{t\,k}\, \mathbb{P}([X=k])$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{t\,k}\, \mathbb{P}([X=k])}$$

- La fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$ des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{t\,k}\, \mathbb{P}([X=k])$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } M_X \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

Soit $k \in [\![-n, n]\!]$.
Il faut noter que l'expression $\mathbb{P}([X=k])$ est une constante par rapport à t. Ainsi, pour étudier la régularité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t\,k}\, \mathbb{P}([X=k])$ on peut se contenter d'étudier la régularité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t\,k}$ (qui, elle, est trivialement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). $\square$

b) Justifier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $M_X^{(p)}$ existe.
- Commençons par déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $M_X^{(p)}$.
  Démontrons par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$
  où $\quad \mathcal{P}(p)$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X^{(p)}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} k^p \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$.
  - **Initialisation** :
    D'après la question précédente :
    $$M_X : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$$
    Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
    $$M_X^{(1)}(t) \ = \ M_X'(t) \ = \ \sum_{k=-n}^{n} k \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$$
    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(p)$ et démontrons $\mathcal{P}(p+1)$ (*i.e.* $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X^{(p+1)}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} k^{p+1} \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$).
    Par hypothèse de récurrence :
    $$M_X^{(p)} : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} k^p \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$$
    Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
    $$M_X^{(p+1)}(t) \ = \ \left(M_X^{(p)}\right)'(t) \ = \ \sum_{k=-n}^{n} k^p \left(k \, \mathrm{e}^{k\,t}\right) \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \sum_{k=-n}^{n} k^{p+1} \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$$
    D'où $\mathcal{P}(p + 1)$.

  Par principe de récurrence : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X^{(p)}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} k^p \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On en déduit :
  $$M_X^{(p)}(0) \ = \ \sum_{k=-n}^{n} k^p \, \mathrm{e}^{k \times 0} \, \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \sum_{k=-n}^{n} k^p \, \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{E}(X^p)$$
  où la dernière égalité est obtenue par théorème de transfert.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } p \in \mathbb{N}^* : M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p).}$$

Commentaire

L'obtention de l'expression de $M_X^{(p)}$ s'effectue au brouillon :

1) on commence par déterminer les premières dérivées successives de la fonction M_X :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X'(t) = \sum_{k=-n}^{n} k\, e^{k\,t}\, \mathbb{P}([X = k])$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X''(t) = \sum_{k=-n}^{n} k\left(k\, e^{k\,t}\right) \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=-n}^{n} k^2 e^{k\,t}\, \mathbb{P}([X = k])$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X^{(3)}(t) = \sum_{k=-n}^{n} k^2\left(k\, e^{k\,t}\right) \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=-n}^{n} k^3 e^{k\,t}\, \mathbb{P}([X = k])$$

2) on en déduit une formule générale :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^{n} k^p\, e^{k\,t}\, \mathbb{P}([X = k])$$

□

c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X.
On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} G_X(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k-n])\, x^k \\ G_Y(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([Y = k-n])\, x^k \end{cases}$$

(i) Vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité : $G_X(e^t) = e^{nt}\, M_X(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G_X\left(e^t\right) &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k-n])\, \left(e^t\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k-n])\, e^{k\,t} \\ &= \sum_{k=0-n}^{2n-n} \mathbb{P}([X = k])\, e^{(k+n)\,t} \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \left(\mathbb{P}([X = k])\, e^{k\,t}\, e^{n\,t}\right) \\ &= e^{n\,t} \sum_{k=-n}^{n} \mathbb{P}([X = k])\, e^{k\,t} \\ &= e^{n\,t}\, M_X(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, G_X\left(e^t\right) = e^{nt}\, M_X(t)}$$

□

(ii) Justifier la relation : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(\mathrm{e}^t) = G_Y(\mathrm{e}^t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} G_X\left(\mathrm{e}^t\right) & = & \mathrm{e}^{n\,t}\, M_X(t) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mathrm{e}^{n\,t}\, M_Y(t) & \textit{(car, d'après l'énoncé : } M_X = M_Y\textit{)} \\ & = & G_Y\left(\mathrm{e}^t\right) & \textit{(avec le même raisonnement qu'en question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_X\left(\mathrm{e}^t\right) = G_Y\left(\mathrm{e}^t\right)}$$

□

(iii) En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X.

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$.
- Ensuite, d'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X\left(\mathrm{e}^t\right) = G_Y\left(\mathrm{e}^t\right)$$

Ainsi, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:

$$\begin{array}{ccc} G_X\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right) & = & G_Y\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ G_X(x) & & G_Y(x) \end{array}$$

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$, on en déduit : $(G_X - G_Y)(x) = 0$.
Or :

$$\begin{array}{rcl} (G_X - G_Y)(x) & = & G_X(x) - G_Y(x) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k-n])\, x^k - \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([Y = k-n])\, x^k \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \left(\mathbb{P}([X = k-n])\, x^k - \mathbb{P}([Y = k-n])\, x^k\right) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \left(\mathbb{P}([X = k-n]) - \mathbb{P}([Y = k-n])\right) x^k \end{array}$$

Ainsi, le polynôme $G_X - G_Y$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, *i.e.* :

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ \mathbb{P}([X = k-n]) - \mathbb{P}([Y = k-n]) = 0$$

D'où :

$$\forall k \in [\![-n, n]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) - \mathbb{P}([Y = k]) = 0$$

Ainsi :

$$\forall k \in [\![-n, n]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([Y = k])$$

$$\boxed{\text{Finalement, les v.a.r. } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$$

□

2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
On suppose que les variables aléatoires X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = S\,X_2$.

a) (i) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2.

Démonstration.

- Comme $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$, on a : $X_2(\Omega) = [\![0, 2]\!] = \{0, 1, 2\}$.
- De plus : $S(\Omega) = \{-1, 1\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y_2(\Omega) = (S\,X_2)(\Omega) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\} = [\![-2, 2]\!].}$$

□

(ii) Calculer les probabilités $\mathbb{P}([Y_2 = y])$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2.

Démonstration.

- Tout d'abord, on a l'égalité entre événements :

$$[Y_2 = -2] \ = \ [S\,X_2 = -2] \ = \ [S = -1] \cap [X_2 = 2]$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y_2 = -2]) & = & \mathbb{P}([S = -1] \cap [X_2 = 2]) & \\ & = & \mathbb{P}([S = -1])\ \mathbb{P}([X_2 = 2]) & \textit{(car } S \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \frac{1}{2} \times \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2} & \\ & = & \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_2 = -2]) = \frac{1}{8}}$$

- Ensuite :

$$[Y_2 = -1] \ = \ [S = -1] \cap [X_2 = 1]$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y_2 = -1]) & = & \mathbb{P}([S = -1] \cap [X_2 = 1]) & \\ & = & \mathbb{P}([S = -1])\ \mathbb{P}([X_2 = 1]) & \textit{(car } S \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \frac{1}{2} \times \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} & \\ & = & \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_2 = -1]) = \frac{1}{4}}$$

- De même :

$$[Y_2 = 1] = [S = 1] \cap [X_2 = 1] \quad \text{et} \quad [Y_2 = 2] = [S = 1] \cap [X_2 = 2]$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Y_2 = 1]) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y_2 = 2]) = \frac{1}{8}.}$$

- Enfin : $[Y_2 = 0] = [X_2 = 0]$. Ainsi :

$$\mathbb{P}([Y_2 = 0]) \; = \; \mathbb{P}([X_2 = 0]) \; = \; \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \; = \; \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_2 = 0]) = \frac{1}{4}}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que la famille $([Y_2 = k])_{k \in [\![-2,2]\!]}$ est un système complet d'événements. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_2 = 0]) &= 1 - \Big(\mathbb{P}([Y_2 = -2]) + \mathbb{P}([Y_2 = -1]) + \mathbb{P}([Y_2 = 1]) + \mathbb{P}([Y_2 = 2])\Big) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \; = \; \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

b) Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S + 1)$ suit la même loi que Y_2.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $S(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a : $(S + 1)(\Omega) = \{0, 2\}$.
  De plus $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. D'où, en notant $T_2 = X_2 - (S + 1)$: $T_2(\Omega) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$$\boxed{T_2(\Omega) \subset [\![-2, 2]\!] \text{ (on rappelle : } Y_2(\Omega) \subset [\![-2, 2]\!] \text{ d'après } \textit{\textbf{2.a)(i)}}\text{)}}$$

- Soit $k \in [\![-2, 2]\!]$.
  La famille $([S = -1], [S = 1])$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([T_2 = k]) \\ = \; & \mathbb{P}([T_2 = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([T_2 = k] \cap [S = 1]) \\ = \; & \mathbb{P}([X_2 - (S + 1) = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 - (S + 1) = k] \cap [S = 1]) \\ = \; & \mathbb{P}([X_2 - (-1 + 1) = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 - (1 + 1) = k] \cap [S = 1]) \\ = \; & \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 = k + 2] \cap [S = 1]) \\ = \; & \mathbb{P}([X_2 = k]) \; \mathbb{P}([S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 = k + 2]) \; \mathbb{P}([S = 1]) && \textit{(car } X_2 \textit{ et } S \textit{ sont indépendantes)} \\ = \; & \frac{1}{2} \; \mathbb{P}([X_2 = k]) + \frac{1}{2} \; \mathbb{P}([X_2 = k + 2]) \end{aligned}$$

- On obtient ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([T_2 = -2]) & = & \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = -2]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = 0]) \;=\; \cancel{\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{8} \;=\; \mathbb{P}([Y_2 = -2]) \\[2mm]
\mathbb{P}([T_2 = -1]) & = & \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = -1]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = 1]) \;=\; \cancel{\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{4} \;=\; \mathbb{P}([Y_2 = -1]) \\[2mm]
\mathbb{P}([T_2 = 0]) & = & \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = 0]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = 2]) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{4} \;=\; \mathbb{P}([Y_2 = 0]) \\[2mm]
\mathbb{P}([T_2 = 1]) & = & \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = 1]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = 3]) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)} \;=\; \frac{1}{4} \;=\; \mathbb{P}([Y_2 = 1]) \\[2mm]
\mathbb{P}([T_2 = 2]) & = & \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = 2]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = 4]) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)} \;=\; \frac{1}{8} \;=\; \mathbb{P}([Y_2 = 2])
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_2 = X_2 - (S+1) \text{ et } Y_2 \text{ suivent la même loi.}}$$

Commentaire

- Lors d'une rédaction classique de détermination de la loi d'une somme, après obtention de la relation :

$$\mathbb{P}([T_2 = k]) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = k]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2 = k+2])$$

  On cherche à déterminer si les événements $[X_2 = k]$ et/ou $[X_2 = k+2]$ sont l'événement impossible.

- Ici, cela varie suivant les valeurs de k. C'est pour cela qu'on effectue le calcul direct des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = k])$ après l'obtention de la formule précédente.

□

3. Le script **Scilab** suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```
n = 10
X = grand(n,2,'bin',2,0.5)
B = grand(n,2,'bin',1,0.5)
S = 2 ⋆ B - ones(n,2)
Z1 = [S(1:n,1) .⋆ X(1:n,1) , X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)]
Z2 = [S(1:n,1) .⋆ X(1:n,1) , X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)]
```

a) Que contiennent les variables `X` et `S` après l'exécution des quatre premières instructions ?

Démonstration.

- L'instruction `X = grand(n,2,'bin',2,0.5)` permet de stocker dans la variable `X` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes où chaque colonne contient une observation d'un `n`-échantillon de loi $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire un `n`-échantillon de la v.a.r. X. Plus précisément, la première colonne de `X` contient une observation $(c_1, \dots, c_n)$ d'un `n`-échantillon $(C_1, \dots, C_n)$ de X, et la deuxième colonne de `X` contient une observation $(c'_1, \dots, c'_n)$ d'un `n`-échantillon $(c'_1, \dots, C'_n)$ de `X`.
  (les v.a.r. C_i et C'_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. X)

- L'instruction `B = grand(n,2,'bin',1,0.5)` permet de stocker dans la variable `B` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes où la première colonne contient une observation $(b_1, \dots, b_n)$ d'un `n`-échantillon $(B_1, \dots, B_n)$ de loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, et la deuxième colonne contient une observation $(b'_1, \dots, b'_n)$ d'un `n`-échantillon $(B'_1, \dots, B'_n)$ de loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
  (les v.a.r. B_i et B'_i sont indépendantes et ont même loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$)
- On commence par rappeler que l'instruction `ones(n,2)` permet d'obtenir une matrice à `n` lignes et 2 colonnes dont tous les coefficients sont égaux à 1.
  On en déduit que l'instruction `S = 2 ⋆ B - ones(n,2)` permet de stocker dans la variable `S` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes.
  La première colonne contient l'observation $(s_1, \dots, s_n) = (2\,b_1 - 1, \dots, 2\,b_n - 1)$ du `n`-échantillon $(2\,B_1 - 1, \dots, 2\,B_n - 1)$.
  La deuxième colonne contient l'observation $(s'_1, \dots, s'_n) = (2\,b'_1 - 1, \dots, 2\,b'_n - 1)$ du `n`-échantillon $(2\,B'_1 - 1, \dots, 2\,B'_n - 1)$.
- Les v.a.r. $2\,B_i - 1$ et $2\,B'_i - 1$ sont indépendantes et de même loi. Déterminons cette loi : on note B une v.a.r. de loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et on cherche la loi de $V = 2\,B - 1$.
  × Tout d'abord, comme $B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, on a : $B(\Omega) = \{0, 1\}$.
  On en déduit : $V(\Omega) = \{2 \times 0 - 1, 2 \times 1 - 1\} = \{-1, 1\}$.
  × De plus :
  $$[V = 1] \ = \ [2\,B - 1 = 1] \ = \ [2\,B = 2] \ = \ [B = 1]$$
  D'où : $\mathbb{P}([V = 1]) = \mathbb{P}([B = 1]) = \dfrac{1}{2}$
  × Enfin, comme la famille $([V = -1], [V = 1])$ est un système complet d'événements :
  $$\mathbb{P}([V = -1]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([V = 1]) \ = \ 1 - \frac{1}{2} \ = \ \frac{1}{2}$$
  On en déduit que la v.a.r. $V = 2\,B - 1$ suit la même loi que la v.a.r. S.
- La variable `S` contient donc une matrice à `n` lignes et 2 colonnes, où la première colonne contient une observation $(s_1, \dots, s_n)$ d'un `n`-échantillon $(S_1, \dots, S_n)$ de la v.a.r. S, et la deuxième colonne contient une observation $(s'_1, \dots, s'_n)$ du `n`-échantillon $(S'_1, \dots, S'_n)$ de la v.a.r. S.
  (les v.a.r. S_i et S'_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. S)

Commentaire

- Comme souvent dans les sujets HEC, l'une des difficultés provient de la prise d'initiatives nécessaires pour répondre à une question.
- Dans cette question par exemple, déterminer la loi de la v.a.r. $V = 2\,B - 1$ n'est pas difficile. C'est prendre l'initiative de déterminer cette loi qui constitue la difficulté.

□

b) Expliquer pourquoi, après l'exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices `Z1` et `Z2` contient une simulation de la variable aléatoire Y_2.

Démonstration.

- L'instruction `Z1 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)]` permet de stocker dans la variable `Z1` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes.
  Le contenu de la première colonne est donné par la commande `S(1:n,1) .* X(1:n,1)` et celui de la deuxième colonne par `X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)`.
- L'instruction `S(1:n,1) .* X(1:n,1)` permet d'obtenir une matrice colonne à `n` lignes contenant l'observation $(d_1, \ldots, d_n) = (s_1 \times c_1, \ldots, s_n \times c_n)$ du `n`-échantillon $(S_1\, C_1, \ldots, S_n\ C_n)$.
  Or, les S_i suivent la même loi que S et les C_i suivent la même loi que X_2. Ainsi, les $S_i\, C_i$ suivent la même loi que Y_2.
  La première colonne de `Z1` contient donc une observation $(d_1, \ldots, d_n)$ d'un `n`-échantillon $(D_1, \ldots, D_n)$ de Y_2.
  (les v.a.r. D_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. Y_2)
- L'instruction `X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)` permet d'obtenir une matrice colonne à `n` lignes contenant l'observation $(d'_1, \ldots, d'_n) = (c_1 - s_1 - 1, \ldots, c_n - s_n - 1)$ du `n`-échantillon $(C_1 - S_1 - 1, \ldots, C_n - S_n - 1)$.
  Or, les S_i suivent la même loi que S et les C_i suivent la même loi que X_2. Ainsi, les $C_i - S_i - 1$ suivent la même loi que $X_2 - S - 1$. De plus, d'après la question ***2.b)***, la v.a.r. $X_2 - S - 1$ suit la même loi que Y_2.
  La deuxième colonne de `Z1` contient donc une observation $(d'_1, \ldots, d'_n)$ d'un `n`-échantillon $(D'_1, \ldots, D'_n)$ de Y_2.
  (les v.a.r. D'_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. Y_2)
- De même, l'instruction `Z2 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)]` permet de stocker dans la variable `Z2` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes.
  Le contenu de la première colonne est donné par la commande `S(1:n,1) .* X(1:n,1)` et celui de la deuxième colonne par `X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)`.
- La première colonne de `Z2` est identique à celle de `Z1`, donc la première colonne de `Z2` contient l'observation $(d_1, \ldots, d_n)$ du `n`-échantillon $(D_1, \ldots, D_n)$ de Y_2.
- L'instruction `X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)` permet d'obtenir une matrice colonne à `n` lignes contenant l'observation $(d''_1, \ldots, d''_n) = (c'_1 - s'_1 - 1, \ldots, c'_n - s'_n - 1)$ du `n`-échantillon $(C'_1 - S'_1 - 1, \ldots, C'_n - S'_n - 1)$.
  Or, les S'_i suivent la même loi que S et les C'_i suivent la même loi que X_2. Ainsi, les $C'_i - S'_i - 1$ suivent la même loi que $X_2 - S - 1$, donc que Y_2.
  La deuxième colonne de `Z2` contient donc une observation $(d''_1, \ldots, d''_n)$ d'un `n`-échantillon $(D''_1, \ldots, D''_n)$ de Y_2.
  (les v.a.r. D''_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. Y_2)

$$\boxed{\text{Finalement, chacun des coefficients des matrices Z1 et Z2 contient une simulation de la v.a.r. } Y_2.}$$

Commentaire

On aurait pu utiliser davantage les commandes Scilab. En effet, l'appel classique permettant d'extraire la première colonne de la matrice `S` est plutôt `S(:,1)` (que `S(1:n,1)`).

□

c) On modifie la première ligne du script précédent en affectant à `n` une valeur beaucoup plus grande que 10 (par exemple, 100000) et en lui adjoignant les deux instructions 7 et 8 suivantes :

```
7  p1 = length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))) / n
8  p2 = length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))) / n
```

Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour `p1` et `p2` après l'exécution des huit lignes du nouveau script ?

Dans le langage **Scilab**, la fonction `length` fournit la « longueur » d'un vecteur ou d'une matrice et la fonction `find` calcule les positions des coefficients d'une matrice pour lesquels une propriété est vraie, comme l'illustre le script suivant :

```
--> A = [1 ; 2 ; 0 ; 4]
--> B = [2 ; 2 ; 4 ; 3]
--> length(A)
    ans = 4.
--> length([A , B])
    ans = 8.
--> find(A < B)
    ans = 1. 3. // car 1 < 2 et 0 < 4, alors que 2 ⩾ 2 et 4 ⩾ 3
```

Démonstration.

- Commençons par commenter l'instruction :

```
7  p1 = length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))) / n
```

  × L'instruction `find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))` permet d'obtenir une matrice ligne contenant les positions des coefficients des matrices `Z1(1:n,1)` et `Z1(1:n,2)` égaux. Autrement dit, on obtient une matrice ligne contenant les indices i tels que $d_i = d'_i$.
  (on rappelle que $(d_1, \dots, d_n)$ est une observation d'un `n`-échantillon $(D_1, \dots, D_n)$ de $S\,X_2$ et $(d'_1, \dots, d'_n)$ est une observation d'un `n`-échantillon $(D'_1, \dots, D'_n)$ de $X_2 - S - 1$)

  × L'instruction `length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2)))` permet d'obtenir la longueur de la matrice précédente. Ainsi, on obtient le nombre de fois où $d_i = d'_i$, pour $i \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$.

  × Enfin, on divise ce nombre par la taille `n` de l'observation.
  Or, par loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\frac{\text{nombre de fois où } d_i = d'_i}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([S\,X_2 = X_2 - S - 1])$$

$$\boxed{\text{La variable } \mathtt{p1} \text{ contient une valeur approchée de } \mathbb{P}([S\,X_2 = X_2 - S - 1]).}$$

- Commentons ensuite l'instruction :

```
8  p2 = length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))) / n
```

  × L'instruction `find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))` permet d'obtenir une matrice ligne contenant les positions des coefficients des matrices `Z1(2:n,1)` et `Z1(2:n,2)` égaux. Autrement dit, on obtient une matrice ligne contenant les indices i tels que $d_i = d''_i$.
  (on rappelle que $(d_1, \dots, d_n)$ est une observation d'un `n`-échantillon $(D_1, \dots, D_n)$ de $S\,X_2$ et $(d''_1, \dots, d''_n)$ est une observation d'un `n`-échantillon $(D''_1, \dots, D''_n)$ de $X'_2 - S - 1$, où la v.a.r. X'_2 suit la même loi que X_2)

  × L'instruction `length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2)))` permet d'obtenir la longueur de la matrice précédente. Ainsi, on obtient le nombre de fois où $d_i = d''_i$, pour $i \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$.

× Enfin, on divise ce nombre par la taille `n` de l'observation.
Or, par loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\frac{\text{nombre de fois où } d_i = d_i''}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}(\left[S\,X_2 = X_2' - S - 1\right])$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La variable } \texttt{p2} \text{ contient une valeur approchée de } \mathbb{P}([S\,X_2 = X_2' - S - 1]) \\ \text{où la v.a.r. } X_2' \text{ suit la même loi que } X_2.\end{array}}$$

Commentaire

- Le programme proposé par l'énoncé n'est ici rien d'autre qu'une illustration de l'idée naturelle pour obtenir une approximation de $\mathbb{P}([S\,X_2 = X_2 - S - 1])$:
  × simuler un grand nombre de fois ($\texttt{n} = 100000$) les v.a.r. $S\,X_2$ et $X_2 - S - 1$.
  Formellement, on souhaite obtenir une observation $(d_1, \dots, d_n)$ d'un `n`-échantillon $(D_1, \dots, D_n)$ de la v.a.r. $S\,X_2$, et une observation $(d_1', \dots, d_n')$ d'un `n`-échantillon $(D_1', \dots, D_n')$ de la v.a.r. $X_2 - S - 1$.
  × de compter le nombre de fois où $d_i = d_i'$, pour $i \in [\![1, \texttt{n}]\!]$.
- L'objectif de cette question **Scilab** est de revenir sur un point important en probabilités :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \quad \not\Rightarrow \quad X = Y$$

(mais bien sûr, si $X = Y$, alors X et Y ont même loi)
- On peut avoir la confirmation du point précédent en exécutant le programme **Scilab**.
On obtient :

```
p1 =
    0.1261
p2 =
    0.2179
```

On constate qu'on a $\texttt{p1} \neq 1$ et $\texttt{p2} \neq 1$. Ainsi, ici :
× les v.a.r. $S\,X_2$ et $X_2 - S - 1$ ont même loi,
× mais $\mathbb{P}([S\,X_2 = X_2 - S - 1]) \neq 1$. Cela démontre en particulier : $S\,X_2 \neq X_2 - S - 1$. □

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = S\,X_n$.

a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
La v.a.r. X_n est une v.a.r. finie. Ainsi, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X_n}$ est également une v.a.r. finie. Elle admet donc des moments à tout ordre, en particulier une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_{X_n} \text{ défini sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} M_{X_n}(t) & = & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X_n}\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,t}\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(par théorème de transfert } (X_n(\Omega) = [\![0, n]\!])\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,t} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} & \textit{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{k\,t} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \\ & = & \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^t\right)^k\ 1^{n-k} & \\ & = & \frac{1}{2^n} \left(\mathrm{e}^t + 1\right)^n & \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M_{X_n}(t) = \frac{1}{2^n} \left(1 + \mathrm{e}^t\right)^n}$$

□

b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R},\ M_{Y_n}(t) = \dfrac{1}{2^{n+1}} \left((1+\mathrm{e}^t)^n + (1+\mathrm{e}^{-t})^n\right)$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  La v.a.r. Y_n est une v.a.r. finie (car les v.a.r. X_n et S le sont). Ainsi, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,Y_n}$ est également une v.a.r. finie. Elle admet donc des moments à tout ordre, en particulier une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_{Y_n} \text{ défini sur } \mathbb{R}.}$$

- Déterminons la loi de Y_n.
  - × Tout d'abord, comme $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $S(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a : $Y_n(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$.
  - × Soit $k \in [\![-n, n]\!]$.
    La famille $([S = -1], [S = 1])$ forme un système complet d'événements.
    Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y_n = k]) & = & \mathbb{P}([S = -1] \cap [Y_n = k]) + \mathbb{P}([S = 1] \cap [Y_n = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([S = -1] \cap [S\,X_n = k]) + \mathbb{P}([S = 1] \cap [S\,X_n = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([S = -1] \cap [-X_n = k]) + \mathbb{P}([S = 1] \cap [X_n = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([S = -1])\ \mathbb{P}([X_n = -k]) + \mathbb{P}([S = 1])\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(car les v.a.r. } S \textit{ et } X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \frac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = -k]) + \frac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \end{array}$$

Trois cas se présentent alors :

- si $k \in [\![-n, 0[\![$, alors $[X_n = k] = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) = \frac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = -k]) + \cancel{\frac{1}{2}\ \mathbb{P}(\varnothing)} = \frac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = -k])$$

- si $k = 0$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y_n = 0]) &= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_n = 0]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_n = 0]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ &= \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} \\ &= \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

- si $k \in]\!]0, n]\!]$, alors $[X_n = -k] = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) = \cancel{\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)} + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_n = k])$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}M_{Y_n}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{t\,Y_n}\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} e^{k\,t}\,\mathbb{P}([Y_n = k]) \\ &= \sum_{k=-n}^{-1}\left(e^{k\,t}\,\mathbb{P}([Y_n = k])\right) + e^{0\,t}\,\mathbb{P}([Y_n = 0]) + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{k\,t}\,\mathbb{P}([Y_n = k])\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{-1}\left(e^{k\,t}\,\mathbb{P}([X_n = -k])\right) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{k\,t}\,\mathbb{P}([X_n = k])\right)\end{aligned}$$

× Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{-1} e^{k\,t}\,\mathbb{P}([X_n = -k]) &= \sum_{j=1}^{n} e^{-j\,t}\,\mathbb{P}([X_n = j]) && \textit{(par changement d'indice } j = -k\textit{)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} e^{-j\,t}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(e^{-t}\right)^j\,1^{n-j} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(e^{-t}\right)^j\,1^{n-j}\right) - 1\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\left(e^{-t}+1\right)^n - 1\right) && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}\end{aligned}$$

× De même :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{k\,t}\,\mathbb{P}([X_n = k]) &= \sum_{k=1}^{n} e^{k\,t}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{t}\right)^k\,1^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\left(e^{t}\right)^k\,1^{n-k}\right) - 1\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\left(e^{t}+1\right)^n - 1\right) && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} M_{Y_n}(t) & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \left((1+\mathrm{e}^{-t})^n - 1\right) + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \left((1+\mathrm{e}^{t})^n - 1\right) \\ & = & \dfrac{1}{2^{n+1}}(1+\mathrm{e}^{-t})^n - \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}}(1+\mathrm{e}^{t})^n - \dfrac{1}{2^{n+1}} \\ & = & \dfrac{1}{2^{n+1}} \left((1+\mathrm{e}^{-t})^n + (1+\mathrm{e}^{t})^n\right) - \dfrac{\cancel{2}}{2^{n+\cancel{1}}} + \dfrac{1}{2^n} \\ & = & \dfrac{1}{2^{n+1}} \left((1+\mathrm{e}^{-t})^n + (1+\mathrm{e}^{t})^n\right) - \cancel{\dfrac{1}{2^n}} + \cancel{\dfrac{1}{2^n}} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M_{Y_n}(t) = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ \left((1+\mathrm{e}^{t})^n + (1+\mathrm{e}^{-t})^n\right)}$$

□

c) En utilisant l'égalité $(1+\mathrm{e}^{-t})^n = \mathrm{e}^{-nt}\,(1+\mathrm{e}^{t})^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrons l'égalité : $(1+\mathrm{e}^{-t})^n = \mathrm{e}^{-nt}(1+\mathrm{e}^{t})^n$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{-n\,t}\ (1+\mathrm{e}^{t})^n & = & \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n\ (1+\mathrm{e}^{t})^n \\ & = & \left(\mathrm{e}^{-t}(1+\mathrm{e}^{t})\right)^n \\ & = & (\mathrm{e}^{-t}+1)^n \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ (1+\mathrm{e}^{-t})^n = \mathrm{e}^{-nt}(1+\mathrm{e}^{t})^n}$$

- Il s'agit de démontrer que les v.a.r. Y_n et $X_n - H_n$ ont même loi. On peut déjà remarquer : $Y(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$. Or, en question ***1.c)***, on a démontré que, si deux v.a.r. X et Y vérifient :
  - × $X(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$,
  - × $Y(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$,
  - × $M_X \ = \ M_Y$,

  alors X et Y ont même loi.
  Pour répondre à cette question, il suffit donc de trouver une v.a.r. H_n indépendante de X_n telle que :

$$(X_n - H_n)(\Omega) \subset [\![-n,n]\!] \quad \text{et} \quad M_{Y_n} = M_{X_n - H_n}$$

  Pour déterminer une telle v.a.r. H_n, on commencera par supposer qu'elle existe pour en déduire des propriétés sur sa loi, puis on choisira une v.a.r. vérifiant ces propriétés, et enfin on établira que l'on est bien dans le cadre d'application de la question ***1.c)***.

- Supposons qu'il existe une telle v.a.r. H_n. Alors, soit $t \in \mathbb{R}$:
  - × d'une part :

$$\begin{array}{rcll} M_{X_n - H_n}(t) & = & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,(X_n - H_n)}\right) & \\ & = & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X_n}\ \mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) & \\ & = & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X_n}\right)\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) & \textit{(car, par lemme des coalitions, les v.a.r. } \mathrm{e}^{t\,X_n} \textit{ et } \mathrm{e}^{-t\,H_n} \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & M_{X_n}(t)\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) & \\ & = & \dfrac{1}{2^n}\ (1+\mathrm{e}^{t})^n\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) & \textit{(d'après la question 4.a))} \end{array}$$

× d'autre part :

$$\begin{array}{rcll} M_{Y_n}(t) & = & \dfrac{1}{2^{n+1}} \left((1+\mathrm{e}^t)^n + (1+\mathrm{e}^{-t})^n\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\[2ex] & = & \dfrac{1}{2^{n+1}}\left((1+\mathrm{e}^t)^n + \mathrm{e}^{-nt}(1+\mathrm{e}^t)^n\right) & \textit{(d'après l'indication de l'énoncé)} \\[2ex] & = & \dfrac{1}{2^{n+1}} \, (1+\mathrm{e}^t)^n \left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right) & \\[2ex] & = & \dfrac{1}{2^n} \, (1+\mathrm{e}^t)^n \times \dfrac{1}{2} \, \left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right) & \end{array}$$

Ainsi, si H_n vérifie les propriétés souhaitées :

$$\begin{array}{rcl} M_{X_n - H_n}(t) = M_{Y_n}(t) & \Leftrightarrow & \cancel{\dfrac{1}{2^n} \, (1+\mathrm{e}^t)^n} \; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\, H_n}\right) = \cancel{\dfrac{1}{2^n} \, (1+\mathrm{e}^t)^n} \times \dfrac{1}{2} \, \left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right) \\[2ex] & \Leftrightarrow & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\, H_n}\right) = \dfrac{1}{2} \left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right) \\[2ex] & \Leftrightarrow & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\, H_n}\right) = \mathrm{e}^{-0\,t} \, \dfrac{1}{2} + \mathrm{e}^{-nt} \, \dfrac{1}{2} \end{array}$$

- On semble faire apparaître ici le théorème de transfert. On choisit donc une v.a.r. H_n qui vérifie cette égalité. On choisit alors une v.a.r. H_n, indépendante de X_n telle que :
  × $H_n(\Omega) = \{0, n\}$,
  × $\mathbb{P}([H_n = 0]) = \mathbb{P}([H_n = n]) = \dfrac{1}{2}$.
- Vérifions qu'avec cette v.a.r. H_n, nous sommes dans le cadre d'application de la question ***1.c)***.
  × Tout d'abord, comme $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $H_n(\Omega) = \{0, n\}$, alors : $(X_n - H_n)(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$.
  × Ensuite, la v.a.r. $\mathrm{e}^{-t\, H_n}$ admet une espérance en tant que v.a.r. finie (car H_n est une v.a.r. finie). Ainsi, par théorème de transfert, soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\, H_n}\right) \;=\; \mathrm{e}^{-0\,t} \; \mathbb{P}([H_n = 0]) + \mathrm{e}^{-nt} \; \mathbb{P}([H_n = n]) \;=\; \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-nt} \, \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2} \left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right)$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} M_{Y_n}(t) & = & \dfrac{1}{2^n} \, (1+\mathrm{e}^t)^n \times \dfrac{1}{2} \, (1+\mathrm{e}^{-t})^n & \\[2ex] & = & M_{X_n}(t) \times \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-t\, H_n}) & \\[1ex] & = & \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\, X_n}) \; \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-t\, H_n}) & \\[1ex] & = & \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\, X_n} \; \mathrm{e}^{-t\, H_n}) & \textit{(car les v.a.r. } \mathrm{e}^{t\, X_n} \textit{ et } \mathrm{e}^{-t\, H_n} \textit{ sont indépendantes)} \\[1ex] & = & M_{X_n - H_n}(t) & \end{array}$$

  D'où : $M_{Y_n} = M_{X_n - H_n}$

D'après ***1.c)***, on en déduit que les v.a.r. Y_n et $X_n - H_n$ suivent la même loi.

Commentaire

Les termes « en utilisant ... » de cette question font hésiter quant à la nécessité de démontrer l'égalité énoncée. Dans le doute, on le démontre.

□

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et $\mathcal{D}_X$ le domaine de définition de la fonction K_X.

a) Donner la valeur de $K_X(0)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, la v.a.r. $\mathrm{e}^{0\,X} = 1$ (v.a.r. constante égale à 1) est une v.a.r. finie. Elle admet donc une espérance. Donc $M_X(0)$ est bien défini. De plus :

$$M_X(0) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{0\,X}\right) \ = \ \mathbb{E}(1) \ = \ 1$$

- Ainsi, $K_X(0)$ est bien défini et :

$$K_X(0) \ = \ \ln\left(M_X(0)\right) \ = \ \ln(1) \ = \ 0$$

$$\boxed{K_X(0) = 0}$$

□

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = a\,X + b$. Justifier pour tout réel t pour lequel $a\,t$ appartient à $\mathcal{D}_X$, l'égalité :

$$K_Y(t) \ = \ b\,t + K_X(a\,t)$$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $a\,t \in \mathcal{D}_X$.

- Comme $a\,t \in \mathcal{D}_X$, alors $K_X(a\,t)$ est bien défini, donc $M_X(a\,t)$ également et : $M_X(a\,t) > 0$.
- De plus :

$$M_X(a\,t) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{a\,t}\right) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,(a\,X)}\right) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,(a\,X+b)-b\,t}\right) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,Y}\,\mathrm{e}^{-b\,t}\right) \ = \ \mathrm{e}^{-b\,t}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,Y}\right)$$

Or, par définition de $M_Y(t)$ (si cette quantité existe) : $M_Y(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,T}\right)$.
D'après le calcul précédent, on en déduit que le réel $M_Y(t)$ est bien défini et :

$$M_Y(t) \ = \ \mathrm{e}^{b\,t}\,M_X(a\,t)$$

- Comme : $M_X(a\,t) > 0$ et $\mathrm{e}^{b\,t} > 0$, alors : $M_Y(t) = \mathrm{e}^{b\,t}\,M_X(a\,t) > 0$.
On en déduit que $K_Y(t)$ est bien défini. Et enfin :

$$K_Y(t) \ = \ \ln\left(M_Y(t)\right) \ = \ \ln\left(\mathrm{e}^{b\,t}\,M_X(a\,t)\right) \ = \ b\,t + \ln\left(M_X(a\,t)\right) \ = \ b\,t + K_X(a\,t)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } a\,t \in \mathcal{D}_X : K_Y(t) = b\,t + K_X(a\,t).}$$

Commentaire

On notera que la difficulté de cette question ne réside pas dans la démonstration de la relation entre $K_Y(t)$ et $K_X(a\,t)$ mais bien dans la démonstration de l'existence de tous les objets manipulés.

□

c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi.
Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variables aléatoire X ?

Démonstration.

- Soit $t \in \mathcal{D}_X$.
Les v.a.r. X et $-X$ ont même loi. On en déduit que les v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X}$ et $\mathrm{e}^{-t\,X}$ ont même loi.
Or, comme $t \in \mathcal{D}_X$, $K_X(t)$ existe, donc $\mathrm{e}^{t\,X}$ admet une espérance $(M_X(t))$ et : $M_X(t) > 0$.
On en déduit que la v.a.r. $\mathrm{e}^{-t\,X}$ admet une espérance $(M_{-X}(t) = M_X(-t))$ et : $M_X(-t) > 0$.
D'où : $-t \in \mathcal{D}_X$.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } t \in \mathcal{D}_X, \text{ on a : } -t \in \mathcal{D}_X.}$$

- Soit $t \in \mathcal{D}_X$, alors $-t \in \mathcal{D}_X$.
  - Ainsi, d'après la question précédente (appliquée à $a = -1$ et $b = 0$) :

$$K_{-X}(t) \ = \ 0 \times t + K_X(-t) \ = \ K_X(-t)$$

  - De plus, comme X et $-X$ ont même loi (on rappelle que $M_X(t)$ et $M_{-X}(t)$ sont bien définis car $t \in \mathcal{D}_X$ et $-t \in \mathcal{D}_X$) :

$$M_{-X}(t) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,(-X)}\right) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right) \ = \ M_X(t)$$

  Ainsi : $K_{-X}(t) \ = \ \ln\big(M_{-X}(t)\big) \ = \ \ln\big(M_X(t)\big) \ = \ K_X(t)$.

  On en déduit : $K_X(t) = K_{-X}(t) = K_X(-t)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si les v.a.r. } X \text{ et } -X \text{ suivent la même loi : } \forall t \in \mathcal{D}_X,\ K_X(t) = K_X(-t).}$$

- Supposons maintenant que la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_X$. Soit $p \in \mathbb{N}$:
  × tout d'abord : $Q^{(2p+1)}(X) = K_X^{(2p+1)}(0)$,
  × ensuite : $\forall t \in \mathcal{D}_X$, $K_X(t) = K_X(-t)$.
  Alors, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathcal{D}_X$, $K_X^{(n)}(t) = (-1)^n\, K_X^{(n)}(-t)$.
  En particulier, pour tout $t \in \mathcal{D}_X$:

$$K_X^{(2p+1)}(t) \ = \ (-1)^{2p+1}\, K_X^{(2p+1)}(-t) \ = \ -K_X^{(2p+1)}(-t)$$

  Comme $0 \in \mathcal{D}_X$ (d'après ***5.a)***), on en déduit :

$$K_X^{(2p+1)}(0) = -K^{(2p+1)}(0) \ \Leftrightarrow \ 2\,K_X^{(2p+1)}(0) = 0 \ \Leftrightarrow \ K_X^{(2p+1)}(0) = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } X \text{ et } -X \text{ suivent la même loi, sous réserve d'existence : } \forall p \in \mathbb{N},\ Q^{(2p+1)}(X) = 0.}$$

Commentaire

- Remarquons que si K_X n'est pas dérivable sur $\mathcal{D}_X$ alors on ne peut rien dire des cumulants de X, puisque ces derniers n'existent pas.
- Dans le programme ECE, on trouve la propriété :

Les v.a.r. X et Y ont même loi	$\Leftrightarrow$	Les v.a.r. X et Y ont même fonction de répartition

- On peut alors démontrer que si X et Y sont des v.a.r. discrètes (resp. à densité), on a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Les v.a.r. } X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\ \bullet \text{ Les v.a.r. } X \text{ et } Y \text{ admettent un} \\ \quad \text{moment d'ordre } n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}\big(X^n\big) = \mathbb{E}\big(Y^n\big)$$

  Cette dernière propriété est aussi vérifiée pour les v.a.r. quelconques mais n'est pas explicitement écrite dans ce cas précis. Toutefois, on peut considérer qu'on y a accès puisque le programme précise : « on admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques ».
- Enfin, on utilise dans cette question la propriété :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \quad \Rightarrow \quad f(X) \text{ et } f(Y) \text{ ont même loi}$$

  où f est une fonction (ici $x \mapsto \mathrm{e}^{t\,x}$).
  Cette propriété est facile à démontrer dans le cas de v.a.r. discrètes ou à densité. On l'admettra pour le cas de v.a.r. quelconques.

□

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y.

a) Monter que pour tout réel t appartenant à la fois à $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$, on a : $K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$.

- Comme $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$, les quantités $K_X(t)$ et $K_Y(t)$ sont bien définies.
  En particulier, $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ sont bien définies et : $M_X(t) > 0$ et $M_Y(t) > 0$.
  Ainsi, les v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X}$ et $\mathrm{e}^{t\,Y}$:
  × admettent une espérance,
  × sont indépendantes par lemme des coalitions, car X et Y sont indépendantes.

  On en déduit que la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X} \times \mathrm{e}^{t\,Y} = \mathrm{e}^{t\,(X+Y)}$ admet une espérance.

$$\boxed{\text{Ainsi, la quantité } M_{X+Y}(t) \text{ est bien définie.}}$$

Commentaire

- On utilise ici le fait que si deux v.a.r. U et V sont indépendantes et admettent une espérance alors, la v.a.r. produit UV admet une espérance donnée par : $\mathbb{E}\big(UV\big) = \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V)$. L'hypothèse d'indépendance est ici cruciale pour démontrer l'existence de l'espérance du produit et pour obtenir sa valeur.

Commentaire

- Dans le cas général, la v.a.r. produit UV admet une espérance si les v.a.r. U et V admettent **un moment d'ordre** 2.
- On peut se demander d'où provient cette hypothèse liée aux moments d'ordre 2.
  Elle est issue d'un théorème de domination. Détaillons ce point.
  Remarquons tout d'abord : $(U-V)^2 \geqslant 0$.
  On en déduit : $U^2 - 2\,UV + V^2 \geqslant 0$.
  Et, en réordonnant : $UV \leqslant \frac{1}{2}\,U^2 + \frac{1}{2}\,V^2$. Ou encore :
  $$0 \ \leqslant\ |UV| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\,U^2 + \frac{1}{2}\,V^2$$
  Comme U et V admettent un moment d'ordre 2, la v.a.r. $\frac{1}{2}\,U^2 + \frac{1}{2}\,V^2$ admet une espérance comme combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
  Ainsi, par théorème de domination (présenté seulement dans le programme ECS), la v.a.r. $|UV|$ admet une espérance. Il en est de même de la v.a.r. UV.

- De plus :

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,(X+Y)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\ \mathrm{e}^{t\,Y}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right)\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,Y}\right) && \textit{(car les v.a.r. } \mathrm{e}^{t\,X} \textit{ et } \mathrm{e}^{t\,Y} \textit{ sont indépendantes)} \\ &= M_X(t)\ M_Y(t) \end{aligned}$$

- Enfin, comme $M_X(t) > 0$ et $M_Y(t) > 0$, alors : $M_{X+Y}(t) > 0$. Donc $K_{X+Y}(t)$ est bien définie.
  On obtient :

$$K_{X+Y}(t) \ = \ \ln\big(M_{X+Y}(t)\big) \ = \ \ln\big(M_X(t)\,M_Y(t)\big) \ = \ \ln\big(M_X(t)\big) + \ln\big(M_Y(t)\big) \ = \ K_X(t) + K_Y(t)$$

$$\boxed{\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y,\ K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)}$$

□

b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X, Y et $X+Y$.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Si K_X est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathcal{D}_X$ et K_Y est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathcal{D}_Y$, alors, d'après la question précédente, K_{X+Y} est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$ et :

$$\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y, \quad K_{X+Y}^{(p)}(t) \ = \ K_X^{(p)}(t) + K_X^{(p)}(t)$$

Or $0 \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$. Donc :

$$Q_p(X+Y) \ = \ K_{X+Y}^{(p)}(0) \ = \ K_X^{(p)}(0) + K_Y^{(p)}(0) \ = \ Q_p(X) + Q_p(Y)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \text{ si } Q_p(X) \text{ et } Q_p(Y) \text{ sont bien définis, alors :} \\ Q_p(X+Y) \ = \ Q_p(X) + Q_p(Y).\end{array}}$$

□

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que la fonction M_U est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_U(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  Le réel $M_U(t)$ existe si et seulement si la v.a.r. e^{tU} admet une espérance.
  Par théorème de transfert, la v.a.r. e^{tU} admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_U(x)\, dx$ est absolument convergente.
  Les fonctions $x \mapsto e^{tx}$ et f_U étant à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ (f_U est une densité de probabilité), cela revient à démonter que cette intégrale est convergente.
- De plus, la fonction f_u est nulle en dehors de $[0,1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_U(x)\, dx = \int_0^1 e^{tx} f_U(x)\, dx$$

- La fonction $x \mapsto e^{tx} f_U(x)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{tx} f_U(x)\, dx$ est bien définie.
  Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la v.a.r. e^{tU} admet une espérance.

$$\boxed{\text{La fonction } M_U \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $t = 0$, alors d'après la question ***5.a)*** : $M_U(0) = 1$.
  × si $t \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} M_U(t) &= \mathbb{E}\left(e^{tU}\right) \\ &= \int_0^1 e^{tx} f_U(x)\, dx && \textit{(après les points précédents)} \\ &= \int_0^1 e^{tx}\, dx \\ &= \left[\frac{1}{t}\, e^{tx}\right]_0^1 && \textit{(car } t \neq 0\textit{)} \\ &= \frac{1}{t}\left(e^t - 1\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } M_U : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.}$$

□

b) Calculer la dérivée de la fonction M_U en tout point $t \neq 0$.

Démonstration.

- La fonction M_U est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient $\frac{f_1}{f_2}$ avec :
  - × $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t - 1$ dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$,
  - × $f_2 : t \mapsto t$ dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Soit $t \in\,]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$.

$$M_U'(t) \;=\; \frac{\mathrm{e}^t \times t - (\mathrm{e}^t - 1) \times 1}{t^2}$$

$$\boxed{\forall t \in\,]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[,\ M_U(t) = \frac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2}}$$

□

c) Trouver la limite du quotient $\frac{M_U(t) - 1}{t}$ lorsque t tend vers 0.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{M_U(t) - 1}{t} \;=\; \frac{\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} - 1}{t} \;=\; \frac{\frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t}}{t} \;=\; \frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2}$$

- Déterminons, si elle existe, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2}$.
  - × Tout d'abord : $\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$. Ainsi : $\mathrm{e}^t - 1 - t = \frac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$. D'où :

$$\mathrm{e}^t - 1 - t \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$$

  - × On en déduit :

$$\frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \frac{1}{\cancel{t^2}}\,\frac{\cancel{t^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t \to 0} \frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{1}{2}.}$$

□

d) Montrer que la fonction M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{M_U(t) - M_U(0)}{t - 0} \;=\; \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_U \text{ est dérivable en 0 et } M_U'(0) = \frac{1}{2}.}$$

- De plus, d'après la question ***7.b)***, la fonction M_U est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_U \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la dérivabilité sur ces intervalles (question ***7.b)***).
- On cherche enfin à montrer que la fonction M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, c'est-à-dire que la fonction M_U' est continue en 0. On rappelle :

$$M_U' : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On cherche donc à montrer : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2} = \dfrac{1}{2}$.

× On sait déjà : $\mathrm{e}^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$. Ainsi :

$$t\,\mathrm{e}^t \;=\; t\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)\right) \;=\; t + t^2 + \frac{t^3}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1 &= \cancel{t} + t^2 + \frac{t^3}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^3) - \left(\cancel{1} + \cancel{t} + \frac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)\right) + \cancel{1} \\ &= \frac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2) \qquad \textit{(car } t^3 = \underset{t \to 0}{o}(t^2)\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi : $t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1 \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$.

× On obtient :

$$M_U'(t) \;=\; \frac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2} \;\underset{t \to 0}{\sim}\; \frac{\frac{\cancel{t^2}}{2}}{\cancel{t^2}} \;=\; \frac{1}{2}$$

On en déduit : $\lim\limits_{t \to 0} M_U'(t) \;=\; \dfrac{1}{2} \;=\; M_U'(0)$.
La fonction M_U' est donc continue en 0.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } M_U \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

- On pouvait également déterminer le DL à l'ordre 2 « $t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1 = \dfrac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$ » en appliquant la formule de Taylor-Young à la fonction $t \mapsto t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$).
- L'utilisation de la formule de Taylor-Young serait un peu plus cohérente au regard du programme d'ECE. On ne privilégie cependant pas cette méthode ici puisqu'elle est bien plus chronophage que celle présentée.

□

8. Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

a) Exprimer K_X en fonction de M_U, où la variable aléatoire U a été définie dans la question ***7.***

Démonstration.

- Montrons que la fonction K_U est bien définie, *i.e.* : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_U(t) > 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $t \in]-\infty, 0[$:

$$\begin{aligned} M_u(t) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^t - 1}{t} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^t - 1 < 0 \quad \textit{(car } t < 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad e^t < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad t < 0 \quad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

  La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi.
  × si $t = 0$, alors : $M_U(0) = 1 > 0$.
  × si $t \in]0, +\infty[$, alors, avec un raisonnement similaire au cas $t \in]-\infty, 0[$, on obtient également : $M_U(t) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } K_U \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

- L'esprit du sujet est ici de faire l'étude des fonctions M_X et K_X dans le cas particulier de certaines lois usuelles. C'est pourquoi on exploite l'expression explicite de M_U pour démontrer l'existence de K_U.
- On pourrait en fait démontrer dans un cadre très général que si $M_X(t)$ est bien définie, alors, comme la v.a.r. e^{tX} est à valeurs **strictement** positives : $M_X(t) > 0$.
On démontrera cette implication dans la partie III qui, elle traite du cas général.

- De plus, rappelons :

$$U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = (\beta - \alpha)\, U + \alpha \hookrightarrow \mathcal{U}([\alpha, \beta])$$

Ainsi, en notant $Y = (\beta - \alpha)\, U + \alpha$, on obtient que les v.a.r. Y et X ont même loi.

- Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $(\beta - \alpha)\, t \in \mathbb{R}$. On en déduit, d'après la question ***5.b)***, que $K_Y(t)$ existe et :

$$K_Y(t) \;=\; \alpha\, t + K_U\big((\beta - \alpha)\, t\big) \;=\; \alpha\, t + \ln\Big(M_U\big((\beta - \alpha)\, t\big)\Big)$$

(on rappelle que, comme la fonction K_Y est bien définie sur $\mathbb{R}$, la fonction M_Y aussi et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_Y(t) > 0$)

- Enfin, comme les v.a.r. X et Y ont même loi, alors les v.a.r. e^{tX} et e^{tY} ont même loi.
Or, comme la fonction M_Y est bien définie sur $\mathbb{R}$, la v.a.r. e^{tY} admet une espérance strictement positive. Ainsi, la v.a.r. e^{tX} admet la même espérance strictement positive, *i.e.* la fonction M_X est définie sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X(t) = M_Y(t) > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que la fonction } K_X \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et :} \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad K_X(t) \;=\; \alpha\, t + \ln\Big(M_U\big((\beta - \alpha)\, t\big)\Big).\end{array}}$$

□

b) Justifier que la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et établir l'égalité : $Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction $\widetilde{M_U} : t \mapsto M_u\big((\beta-\alpha)\,t\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (on rappelle que M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après ***7.d)***).
De plus, comme $M_U(]-\infty,+\infty[) \subset]0,+\infty[$ (démontré dans la question précédente), pour tout $t \in \mathbb{R}$: :
$$\widetilde{M_U}(t) = M_U\big((\beta-\alpha)\,t\big) > 0$$

- Ensuite, la fonction $t \mapsto \ln\Big(M_u\big((\beta-\alpha)\,t\big)\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car la composée $\ln \circ \tilde{M_U}$ de :
  × $\tilde{M_U} : t \mapsto M_U\big((\beta-\alpha)\,t\big)$ qui :
    - est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
    - vérifie : $\tilde{M_U}(]-\infty,+\infty[) \subset]0,+\infty[$

  × $\ln$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

On en déduit que la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Par définition de $Q_1(X)$, on a : $Q_1(X) = K_X'(0)$.
Or, d'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$K_X'(t) \;=\; \alpha + \frac{(\beta-\alpha)\,M_U'\big((\beta-\alpha)\,t\big)}{M_U\big((\beta-\alpha)\,t\big)}$$
On en déduit :
$$\begin{aligned} Q_1(X) \;&=\; K_X'(0) \;=\; \alpha + \frac{(\beta-\alpha)\,M_U'(0)}{M_U(0)} \\ &=\; \alpha + \frac{(\beta-\alpha)\;\frac{1}{2}}{1} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{7.d)}}\textit{)} \\ &=\; \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} \\ &=\; \frac{\alpha+\beta}{2} \end{aligned}$$

Finalement, comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\alpha,\beta])$: $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = Q_1(X)$.

□

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

a) Déterminer les fonctions M_T et K_T.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, la quantité $M_T(t)$ est bien définie si la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,T}$ admet une espérance.
Or, par théorème de transfert, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,T}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{t\,n}\, \mathbb{P}([T=n])$ est absolument convergente.
Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{k\,t}\ \mathbb{P}([T=k]) & = & \sum\limits_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{k\,t}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-\lambda} & \textit{(car } T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\left(\mathrm{e}^t\right)^k \lambda^k}{k!} & \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\left(\lambda\,\mathrm{e}^t\right)^k}{k!} & \end{array}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série exponentielle $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ en $x = \lambda\,\mathrm{e}^t$. Cette série est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\left(\lambda\,\mathrm{e}^t\right)^k}{k!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda\,\mathrm{e}^t\right)^k}{k!} = \exp\left(\lambda\,\mathrm{e}^t\right)$$

On en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{t\,n}\ \mathbb{P}([T=n])$ converge. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,T}$ admet une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_T \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

- De plus, soit $t \in \mathbb{R}$:

$$M_T(t) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,T}\right) \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda}\ \exp\left(\lambda\,\mathrm{e}^t\right) \ = \ \exp\left(-\lambda + \lambda\,\mathrm{e}^t\right) \ = \ \exp\left(\lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)\right)$$

$$\boxed{M_T : t \mapsto \exp\left(\lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)\right)}$$

- On a bien, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $M_T(t) = \exp\left(\lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)\right) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } K_T \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$K_T(t) \ = \ \ln\left(M_T(t)\right) \ = \ \ln\left(\exp\left(\lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)\right)\right) \ = \ \lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)$$

$$\boxed{K_T : t \mapsto \lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)}$$

□

b) En déduire les cumulants de T.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction K_T est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que transformée affine de la fonction exp de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } T \text{ admet des cumulants à tout ordre.}}$$

- Ensuite, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $K_T'(t) = \lambda\,\mathrm{e}^t$.
On en déduit, par récurrence immédiate, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $K_T^{(n)}(t) = \lambda\,\mathrm{e}^t$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : Q_n(X) = K_T^{(n)}(0) = \lambda.}$$

□

10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

a) Justifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$ est convergente si et seulement si :
  - l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$ est convergente.
  - et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$ est convergente.
- Démontrons tout d'abord la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$.
  La fonction $h_t : x \mapsto \exp\left(t\,x - \dfrac{x^2}{2}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} h_t(x)\,dx$ est impropre seulement en $+\infty$.
  - Tout d'abord, la fonction h_t est continue sur le **segment** $[0, 1]$.
    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} h_t(x)\,dx$ est bien définie.
  - Par ailleurs :
    × $\forall x \in [1, +\infty[$, $\exp\left(t\,x - \dfrac{x^2}{2}\right) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.
    × $\exp\left(t\,x - \dfrac{x^2}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
    × $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 (> 1).
    Elle est donc convergente.

    Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} h_t(x)\,dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale impropre } \int_{0}^{+\infty} h_t(x)\,dx \text{ est convergente.}}$$

- Il reste à démontrer la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$.
  La fonction h_t est continue sur $]-\infty, 0]$ donc cette intégrale est impropre seulement en $-\infty$.
  En effectuant le changement de variable affine $\boxed{u = -x}$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} \exp\left(-t\,u - \frac{(-u)^2}{2}\right)(-\,du)$$

$$=\; -\int_{0}^{+\infty} \exp\left(-t\,u - \frac{u^2}{2}\right)\,du \;=\; -\int_{0}^{+\infty} f_{-t}(u)\,du$$

En appliquant le résultat précédent en $-t \in \mathbb{R}$, on conclut que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{-t}(u)\, du$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale impropre } \displaystyle\int_{-\infty}^{0} h_t(x)\, dx \text{ est convergente.}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale impropre } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_t(x)\, dx \text{ est bien convergente.}}$$

Commentaire

- Le programme officiel précise que « les changements de variables **non affines** ne seront pratiqués qu'avec des intégrales sur un segment ». Il est donc autorisé, sous réserve de convergence, d'effectuer un changement de variable affine sur une intégrale généralisée (ce qui est fait dans cette question).
- Ici, on pose le changement de variable affine $\boxed{u = -x}$. Il faut s'habituer à effectuer ce changement de variable classique à la volée. Rappelons comment le présenter formellement.

  $$\left|\begin{array}{l} u = -x \text{ (et donc } x = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dx \quad \text{ et } \quad dx = -\ du \\ \bullet\ x = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
- La fonction intégrande $h_t : x \mapsto \mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{2}}$:
  × n'admet pas d'équivalent plus simple en $+\infty$,
  × tend très rapidement vers 0 en $+\infty$.

  Du fait de ces deux points, on opte dans la démonstration pour un critère de négligeabilité. De manière informelle, la présence du terme $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ produit une convergence extrêmement rapide de h_t vers 0 en $+\infty$. L'intégrande h_t apparaît donc suffisamment petite en $+\infty$ pour que l'intégrale sur $[1, +\infty[$ associée soit convergente. Formellement, cette idée est concrétisée en comparant h_t à l'intégrande $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, positive et dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ associée est convergente.
- La démonstration de la propriété $\exp\left(t\,x - \dfrac{x^2}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ n'est pas forcément un attendu de la question. Prendre l'initiative de la comparaion à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ démontre la bonne compréhension des mécanismes en jeu. Il faut évidemment savoir comment faire cette démonstration dont on donne ci-dessous les détails :

  $$\frac{\mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = x^2\ \mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}}\ \mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{4}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  En effet :
  × en posant $u = \frac{x^2}{4}$, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}} = \lim_{u\to+\infty} 4\,\frac{u}{\mathrm{e}^u} = 0$ *(par croissances comparées).*
  × $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{4}} = 0$. □

b) Montrer que la fonction M_Z est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_Z(t) = \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Le réel $M_Z(t)$ existe si et seulement si la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,Z}$ admet une espérance.
  Or, par théorème de transfert, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,Z}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t\,x}\ f_Z(x)\ dx$ est absolument convergente.
  Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{t\,x}$ et f_Z étant à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ (f_Z est une densité de probabilité), cela revient à démonter que cette intégrale est convergente.

  D'après la question précédente, cette intégrale est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$.
  Ainsi, M_Z est définie sur $\mathbb{R}$.

- Remarquons que pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$:

$$\mathrm{e}^{t\,x}\ f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{t\,x}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(x^2-2\,t\,x)} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(x-t)^2+\frac{1}{2}\,t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(x-t)^2}$$

- On effectue alors le changement de variable affine $\boxed{u = x - t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = x - t \text{ (et donc } x = u - t) \\ \hookrightarrow du = \ dx \quad \text{et} \quad dx = \ du \\ \bullet\ x = -\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \\ \bullet\ x = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array}\right.$$

  On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t\,x}\ f_Z(x)\ dx &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(x-t)^2}\ dx \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,u^2}\ du \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u)\ du \ = \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \qquad \textit{(car } f_Z \textit{ est une densité de probabilité)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}$$

□

c) En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- On note Y la v.a.r. définie par : $Y = \sigma\,Z + \mu$ (où Z est toujours une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$).
  Alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  De plus, d'après la question ***5.b)***, pour tout t tel que $\sigma\,t \in \mathcal{D}_Z$:

$$K_Y(t) \ = \ \mu\,t + K_Z(\sigma\,t)$$

- Déterminons donc d'abord K_Z.
  - × Tout d'abord, remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $M_Z(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} > 0$.
    Ainsi, K_Z est définie sur $\mathbb{R}$, *i.e.* : $\mathcal{D}_Z = \mathbb{R}$.
  - × De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$K_Z(t) \ = \ \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2}\right) \ = \ \frac{1}{2}\,t^2$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\sigma\, t \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_Z$. Ainsi, d'après la question ***5.b)*** :

$$K_Y(t) \;=\; \mu\, t + K_Z(\sigma\, t) \;=\; \mu\, t + \frac{1}{2}\,(\sigma\, t)^2$$

$$\boxed{\text{Finalement : } K_Y : t \mapsto \mu\, t + \frac{\sigma^2}{2}\, t^2.}$$

- La fonction K_Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } Y \text{ admet des cumulants à tout ordre.}}$$

- On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
  × $K_Y'(t) = \mu + \sigma^2\, t$ et ainsi : $Q_1(Y) = K_Y'(0) = \mu$.
  × $K_Y''(t) = \sigma^2$ et ainsi : $Q_2(Y) = K_Y''(0) = \sigma^2$.
  × pour tout $p \in [\![3, +\infty[\![$, $K_Y^{(p)}(t) = 0$ et ainsi : $Q_p(Y) = K_Y^{(p)}(0) = 0$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } Q_1(Y) = \mu,\ Q_2(Y) = \sigma^2 \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\},\ Q_p(Y) = 0.}$$

□

11. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.

a) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une variable aléatoire W.

Démonstration.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons X_i une v.a.r. de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On suppose de plus que les v.a.r. X_i sont indépendantes.
  Alors, par stabilité des lois de Poisson, la v.a.r. $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.
  On en déduit que S_n et T_n suivent la même loi. Ainsi, les v.a.r. $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}} = W_n$ ont même loi.
- La suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est constituée de v.a.r. :
  × indépendantes,
  × de même loi,
  × admettant la même espérance 1,
  × admettant la même variance $1 \neq 0$.
  Ainsi, comme $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, la v.a.r. centrée réduite associée à S_n est :

$$S_n^* \;=\; \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \;=\; \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

- Alors, d'après le théorème central limite :

$$S_n^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} W \quad \text{où} \quad W \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

  On a donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{S_n^*}(t) = \Phi(t)$.
  (la fonction Φ est la fonction de répartition de W)
- Or les v.a.r. $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ et $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$ ont même loi, donc même fonction de répartition.
  On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{W_n}(t) = \Phi(t)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite de v.a.r. } (W_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } W \text{ où } W \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

Commentaire

- La forme de la v.a.r. $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$ dans le contexte de convergence de v.a.r. doit faire penser **systématiquement** au théorème central limite (TCL).
- De manière générale, si les X_i ont pour espérance m et variance σ^2, alors :

$$S_n^* \ = \ \frac{S_n - n\,m}{\sigma\,\sqrt{n}}$$

  On voit bien apparaître la division par $\sqrt{n}$ qui est très caractéristique de l'utilisation du TCL.
- Rappelons aussi que si on pose : $V_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, alors :

$$V_n^* \ = \ \sqrt{n}\ \frac{V_n - m}{\sigma}$$

  (on notera : $V_n^* = S_n^*$)
  On voit alors apparaître le produit par $\sqrt{n}$ qui est aussi caractéristique du TCL.
- Pour pouvoir justifier de l'application de ce théorème dans cette question, on introduit la v.a.r. S_n qui suit la même loi que T_n et satisfait bien aux hypothèses du TCL.
  On rappelle, comme remarqué en question ***3.c)***, que deux v.a.r. qui suivent la même loi ne sont pas forcément égales (on n'a d'ailleurs pas du tout besoin dans cette question de l'égalité $S_n = T_n$). Cependant on peut raisonnablement penser qu'un candidat précisant « $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ » (et non : $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$) ne serait pas sanctionné.

□

b) Déterminer la fonction K_{W_n}.

Démonstration.

- Comme $T_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, d'après la question ***9.a)*** :

$$K_{T_n} : t \mapsto n(\mathrm{e}^t - 1)$$

- De plus : $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}} \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ T_n - \dfrac{n}{\sqrt{n}} \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ T_n - \sqrt{n}$.
  Ainsi, soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ t \in \mathbb{R}$ et, d'après la question ***5.b)*** :

$$K_{W_n}(t) \ = \ -\sqrt{n}\,t + K_{T_n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\ t\right) \ = \ -\sqrt{n}\,t + n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}\ t} - 1\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } K_{W_n} : t \mapsto -\sqrt{n}\,t + n\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{\sqrt{n}}} - 1\right).}$$

□

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = K_W(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
  Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{t}{\sqrt{n}} = 0$. On peut donc appliquer le développement limité précédent en choisissant $x = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$. On obtient :

$$\mathrm{e}^{\frac{t}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right) = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

- On en déduit, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} K_{W_n}(t) &= -\sqrt{n}\,t + n\left(\cancel{1} + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1}\right) \\ &= -\sqrt{n}\,t + n\,\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &= -\cancel{\sqrt{n}\,t} + \cancel{\sqrt{n}\,t} + \frac{t^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &= \frac{t^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \end{aligned}$$

  On en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2}$.

- Or, comme $W \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, d'après la question ***10.c)*** : $K_W(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } t \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} = K_W(t).}$$

Commentaire

- Soit f une fonction et $(a, x_0) \in \mathbb{R}^2$.
  On rappelle la propriété utilisée dans le deuxième point :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = a + \underset{x\to x_0}{o}(1)$$

- On peut remarquer que cette question ***11.*** nous fait démontrer, **dans le cas particulier d'une loi de Poisson**, l'implication suivante :

$$W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} W \quad \Rightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K_{W_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} K_W(t)$$

  On peut se poser la question de la généralisation de cette propriété. En effet, il existe un lien entre M_X et F_X, mais cela serait hors de portée du programme ECE.

□

Partie III. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.
On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, on a : $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$.
De plus, on pose : $\mu_4(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^4\right)$.

Commentaire

Dans la définition de μ_4, on sous-entend que la v.a.r. $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^4$ admet une espérance.
Dans le cours, on démontre les propriétés suivantes :
- si X admet une espérance, il en est de même de $X - \mathbb{E}(X)$ (c'est la v.a.r. centrée associée à X).
  Dans ce cas, on a : $\mu_1(X) = \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = 0$.
- si X admet un moment d'ordre 2, il en est de même de $X - \mathbb{E}(X)$.
  Dans ce cas, on a : $\mu_2(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big) = \mathbb{V}(X)$.
  (la variance est le moment centré d'ordre 2)

De manière générale si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$, il en est de même de $X - \mathbb{E}(X)$.
En effet :

$$\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(-\mathbb{E}(X)\big)^{n-k} X^k$$

Ainsi, la v.a.r. $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^n$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire des v.a.r. X^0, X_1, ..., X^n, qui admettent toutes une espérance.

12. Justifier les égalités : $Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$ et $Q_2(X) = \mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- La fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I car elle est la composée $K_X = \ln \circ M_X$ où :
  - la fonction M_X est :
    - est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I,
    - telle que $M_X(I) \subset \,]0, +\infty[$.
      En effet, comme : $\forall t \in I$, $e^{tX} > 0$, on a : $\forall t \in I$, $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) > 0$.
  - la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]0, +\infty[$.
- Déterminons les dérivées successives de K_X. Soit $t \in I$.
  - Tout d'abord : $K'_X(t) = \dfrac{1}{M_X(t)} \times M'_X(t)$.

$$\begin{array}{rcll} Q_1(X) & = & K'_X(0) & \textit{(par définition)} \\ & = & \dfrac{1}{M_X(0)} \times M'_X(0) & \textit{(d'après le résultat précédent en } t = 0 \in I\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{M_X(0)} \times \mathbb{E}(X) & \textit{(d'après le résultat admis dans l'énoncé)} \\ & = & \dfrac{1}{\mathbb{E}(e^0)}\ \mathbb{E}(X) \ = \ \mathbb{E}(X) & \end{array}$$

$$\boxed{Q_1(X) = \mathbb{E}(X)}$$

× Ensuite : $K_X''(t) = \left(-\dfrac{1}{\big(M_X(t)\big)^2} \times M_X'(t)\right)\ M_X'(t) + \dfrac{1}{M_X(t)} \times M_X''(t)$.

$$\begin{array}{rcll} Q_1(X) & = & K_X''(0) & \textit{(par définition)} \\ & = & \left(-\dfrac{1}{\big(M_X(0)\big)^2} \times M_X'(0)\right)\ M_X'(0) + \dfrac{1}{M_X(0)} \times M_X''(0) & \textit{(d'après le résultat précédent en } t = 0 \in I\textit{)} \\ & = & -\dfrac{1}{(1)^2} \times \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X) + \dfrac{1}{1} \times \mathbb{E}\big(X^2\big) & \textit{(d'après le résultat admis dans l'énoncé)} \\ & = & \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ \mathbb{V}(X) & \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \end{array}$$

$$\boxed{Q_2(X) = \mathbb{V}(X)}$$

Commentaire

- On se sert ici du résultat stipulant que toute v.a.r. X qui admet une espérance vérifie :

$$\boxed{X > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X) > 0}\ (*)$$

Ce résultat n'est pas officiellement au programme des classes préparatoires commerciales. Seul le résultat plus faible suivant (nommé parfois positivité de l'espérance) figure :

$$\boxed{X \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X) \geqslant 0}\ (**)$$

On notera au passage que l'on obtient le même résultat en supposant l'hypothèse plus faible : $\mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big) = 1$.

- Pour démontrer le résultat $(*)$, on peut procéder par l'absurde.
Supposons $X > 0$ et `NON`$(\mathbb{E}(X) > 0)$ (autrement dit $\mathbb{E}(X) \leqslant 0$).
  × Comme $X > 0 \geqslant 0$, alors, d'après $(**)$: $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
  Comme $\mathbb{E}(X) \leqslant 0$, on en déduit $\mathbb{E}(X) = 0$.
  × D'après l'inégalité de Markov : $\forall a > 0,\ \mathbb{P}\big([X > a]\big) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a} = 0$.
  Une probabilité étant toujours positive, on démontre ainsi : $\forall a > 0,\ \mathbb{P}\big([X > a]\big) = 0$.
  × Démontrons, à l'aide de cette dernière égalité : $\mathbb{P}\big([X > 0]\big) = 0$.
  Pour ce faire, on remarque tout d'abord : $[X > 0] = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left[X > \frac{1}{n}\right]$ *(démonstration par double inclusion)*
  On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X > 0]\big) & = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left[X > \frac{1}{n}\right]\Big) & \\ & = & \lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{N} \left[X > \frac{1}{n}\right]\Big) & \textit{(d'après la propriété de la limite monotone)} \\ & = & \lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\left[X > \frac{1}{N}\right]\Big) & \textit{(car } \Big(\left[X > \frac{1}{N}\right]\Big)_{N \in \mathbb{N}^*} \textit{ est une suite croissante d'événements)} \\ & = & \lim\limits_{N \to +\infty} 0 \ = \ 0 & \textit{(car } \mathbb{P}\Big(\left[X > \frac{1}{N}\right]\Big) = 0\textit{)} \end{array}$$

  Absurde ! □

13. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose : $S = X_1 - X_2$.

a) Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :

$$\mathbb{E}(S^4) \;=\; 2\,\mu_4(X) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, les v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi que X, v.a.r. qui admet une espérance. Ainsi $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_2)$ et :

$$\begin{aligned} S &= X_1 - X_2 \\ &= X_1 - X_2 - \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) \\ &= \big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big) - \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big) \end{aligned}$$

- On en déduit, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} S^4 &= \Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big) - \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k} \Big(-\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{k}\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k \big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k} \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{k} \end{aligned}$$

  Remarquons alors que :
  - × les v.a.r. $X_1 - \mathbb{E}(X_1)$ et $X_2 - \mathbb{E}(X_2)$ admettent des moments à tout ordre $r \in [\![0,4]\!]$ car suivent la même loi que $X - \mathbb{E}(X)$ qui admet un moment d'ordre 4.
  - × d'après le lemme des coalitions, pour tout entier $k \in [\![0,4]\!]$, les v.a.r. $\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k}$ et $\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{k}$ sont indépendantes car X_1 et X_2 le sont.

  On en déduit que pour tout $k \in [\![0,4]\!]$, la v.a.r. $\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k} \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{k}$ admet une espérance. Et par propriété de l'espérance :

$$\mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k} \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{k}\Big) \;=\; \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k}\Big)\, \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{k}\Big)$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } S^4 \text{ admet une espérance comme combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance.}}$$

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S^4) &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k\, \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k}\Big)\, \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{k}\Big) \\ &= \quad 1 \;\; \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4}\Big) \\ &\quad -4 \;\; \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{3}\Big)\, \cancel{\mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{1}\Big)} && \textit{(car } X_2 - \mathbb{E}(X_2) \textit{ est la v.a.r. centrée associée à } X_2\textit{)} \\ &\quad +6 \;\; \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{2}\Big)\, \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{2}\Big) \\ &\quad -4 \;\; \cancel{\mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{1}\Big)}\, \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{3}\Big) && \textit{(car } X_1 - \mathbb{E}(X_1) \textit{ est la v.a.r. centrée associée à } X_1\textit{)} \\ &\quad +1 \;\; \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^{4}\Big) \\ &= \mu_4(X_1) \;+\; 6\,\mathbb{V}(X_1)\;\mathbb{V}(X_2) \;+\; \mu_4(X_2) \end{aligned}$$

Enfin, comme X_1 et X_2 ont même loi que X :

$$\mathbb{V}(X_1) \; = \; \mathbb{V}(X) \; = \; \mathbb{V}(X_2) \quad \text{et} \quad \mu_4(X_1) \; = \; \mu_4(X) \; = \; \mu_4(X_2)$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \mathbb{E}\big(S^4\big) \; = \; 2\,\mu_4(X_1) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2.}$$

□

b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe $\mathcal{C}^4$ sur I et que pour tout $t \in I$, on a :

$$M_S^{(4)}(t) \; = \; K_S^{(4)}(t)\,M_S(t) + 3\,K_S^{(3)}(t)\,M_S'(t) + 3\,K_S''(t)\,M_S''(t) + K_S'(t)\,M_S^{(3)}(t)$$

Démonstration.
Soit $t \in I$ tel que $-t \in I$.

- Comme $-t \in I$, la quantité $M_X(-t)$ est bien définie. On a alors :

$$\begin{array}{ccccccc} M_X(-t) & = & \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{-t\,X}\big) & = & \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{t\,(-X)}\big) & = & M_{-X}(t) \\ \shortparallel & & & & & & \shortparallel \\ M_{X_2}(-t) & & & & & & M_{-X_2}(t) \end{array}$$

(car X et X_2 ont même loi)

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in I \text{ tel que } -t \in I, \text{ on a : } M_{-X_2}(t) = M_{X_2}(-t).}$$

- D'autre part :

$$\mathrm{e}^{t\,S} \; = \; \mathrm{e}^{t\,(X_1 - X_2)} \; = \; \mathrm{e}^{t\,X_1} \times \mathrm{e}^{-t\,X_2}$$

  Les v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X_1}$ et $\mathrm{e}^{-t\,X_2}$:

  × admettent toutes les deux une espérance car M_{X_1} est définie en t et M_{X_2} est définie en $-t$ (car on a supposé $-t \in I$).

  × sont indépendantes d'après le lemme des coalitions puisque X_1 et X_2 le sont.

  On en déduit que la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X_1} \times \mathrm{e}^{-t\,X_2}$ admet une espérance, donnée par :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{t\,S}\big) & = & \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{t\,X_1} \times \mathrm{e}^{-t\,X_2}\big) & = & \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{t\,X_1}\big) \times \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{-t\,X_2}\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ M_S(t) & & & & M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(-t) \\ & & & & \shortparallel \\ & & & & M_X(t) \times M_X(-t) \end{array}$$

(d'après le point précédent)

(car les v.a.r. X_2 et X_1 ont même loi que X)

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ainsi, pour tout intervalle } J \subset I \text{ symétrique par rapport à l'origine, on a :} \\ \forall t \in J,\ M_S(t) \; = \; M_X(t) \times M_X(-t). \end{array}}$$

> En particulier, la fonction M_S est de classe $\mathcal{C}^4$ sur tout intervalle $J \subset I$ symétrique par rapport à l'origine, comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^4$ sur cet intervalle. On en déduit, comme en question ***12***, que la fonction K_S est elle aussi de classe $\mathcal{C}^4$ sur J.

Dans la suite, on note $J \subset I$ un intervalle symétrique par rapport à l'origine. Soit $t \in J$.

- Tout d'abord : $K_S'(t) \; = \; \dfrac{1}{M_S(t)} \times M_S'(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in J,\ M_S'(t) \; = \; K_S'(t) \times M_S(t).}$$

- En remarquant : $\big(M_S\big)^{(4)}(t) = \big(M_S'\big)^{(3)}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \big(M_S\big)^{(4)}(t) \\
= \ & \big(K_S' \times M_S\big)^{(3)}(t) \\
= \ & \Big(\big(K_S' \times M_S\big)'\Big)^{(2)}(t) \\
= \ & \Big(K_S'' \times M_S + K_S' \times M_S'\Big)^{(2)}(t) \\
= \ & \Big(\big(K_S'' \times M_S + K_S' \times M_S'\big)'\Big)^{(1)}(t) \\
= \ & \Big(\big(K_S''' \times M_S + K_S'' \times M_S'\big) + \big(K_S'' \times M_S' + K_S' \times M_S''\big)\Big)^{(1)}(t) \\
= \ & \Big(K_S''' \times M_S + 2\, K_S'' \times M_S' + K_S' \times M_S''\Big)^{(1)}(t) \\
= \ & \Big(\big(K_S'''' \times M_S + K_S''' \times M_S'\big) + 2\,\big(K_S''' \times M_S' + K_S'' \times M_S''\big) + \big(K_S'' \times M_S'' + K_S' \times M_S'''\big)\Big)(t) \\
= \ & \Big(K_S'''' \times M_S + 3\, K_S''' \times M_S' + 3\, K_S'' \times M_S'' + K_S' \times M_S'''\Big)(t) \\
= \ & K_S^{(4)}(t)\, M_S(t) + 3\, K_S^{(3)}(t)\, M_S'(t) + 3\, K_S''(t)\, M_S''(t) + K_S'(t)\, M_S^{(3)}(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in J,\ M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)\, M_S(t) + 3\, K_S^{(3)}(t)\, M_S'(t) + 3\, K_S''(t)\, M_S''(t) + K_S'(t)\, M_S^{(3)}(t)}$$

Commentaire

- Lors de l'étude de $M_S(t)$ (pour $t \in I$) la quantité $M_{X_2}(-t)$ apparaît naturellement. Or, cette quantité existe seulement si $-t \in I$. C'est pourquoi on a décidé dans cette question de restreindre à la démonstration à un intervalle $J \subset I$ symétrique par rapport à l'origine.
- Dans la correction, on a déterminé la dérivée quatrième de M_S en dérivant successivement trois fois la fonction M_S'. On aurait pu utiliser directement la formule de Leibniz qui stipule que si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I, on a :

$$\boxed{\big(f \times g\big)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ f^{(n-k)} \times g^{(k)}}$$

Cette formule n'apparaît pas explicitement dans le programme ECE (mais est bien présente dans le programme ECS de première année). Il est toutefois très classique de la présenter lors de la première année ECE. On pouvait l'utiliser directement ici et écrire :

$$\begin{aligned}
\big(M_S\big)^{(4)}(t) \ &= \ \big(M_S'\big)^{(3)}(t) \ = \ \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}\ {K_S'}^{(3-k)} \times \big(M_S\big)^{(k)} \\
&= \ \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}\ K_S^{(4-k)} \times \big(M_S\big)^{(k)} \\
&= \ K_S^{(4)}(t)\, M_S(t) + 3\, K_S^{(3)}(t)\, M_S'(t) + 3\, K_S''(t)\, M_S''(t) + K_S'(t)\, M_S^{(3)}(t)
\end{aligned}$$

La présence des coefficients 1, 3, 3, 1 dans la formule à démontrer doit mettre sur la piste de l'utilisation d'une formule utilisant les coefficients binomiaux. □

c) En déduire l'égalité : $\mathbb{E}(S^4) \ = \ Q_4(S) + 3\,\big(\mathbb{V}(S)\big)^2$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que la fonction M_S est de classe $\mathcal{C}^4$ sur l'intervalle J (qu'on peut choisir ouvert) qui contient l'origine. On admet donc, comme dans l'énoncé :
$$\forall k \in [\![1,4]\!],\ M_S^{(k)}(0) = \mathbb{E}\big(S^k\big)$$
- La v.a.r. S vérifiant les mêmes hypothèses que la v.a.r. X de début de la **Partie III**, on en déduit, que le résultat de la question ***12*** est vérifié pour la v.a.r. S. Plus précisément :
$$Q_1(S) = \mathbb{E}(S) \quad \text{et} \quad Q_2(S) = \mathbb{V}(S)$$
Remarquons au passage :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S) & = & \mathbb{E}(X_1 - X_2) & \\ & = & \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \ = \ 0 & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \end{array}$$
Et ainsi :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S) & = & \mathbb{E}\big(S^2\big) - \cancel{\big(\mathbb{E}(S)\big)^2} & \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \\ & = & \mathbb{E}\big(S^2\big) & \end{array}$$
- On applique alors l'égalité précédente à $t = 0 \in J$:
$$\begin{array}{cccccccc} & M_S^{(4)}(0) & & & & & & \\ = & K_S^{(4)}(0) \times M_S(0) & + & 3\,K_S^{(3)}(0) \times M_S'(0) & + & 3\,K_S''(0) \times M_S''(0) & + & K_S'(0) \times M_S^{(3)}(0) \\ = & Q_4(S) \times M_S(0) & + & 3\,Q_3(S) \times M_S'(0) & + & 3\,Q_2(S) \times M_S''(0) & + & Q_1(S) \times M_S^{(3)}(0) \\ = & Q_4(S) \times \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^0\big) & + & 3\,Q_3(S) \times \mathbb{E}(S) & + & 3\,Q_2(S) \times \mathbb{E}\big(S^2\big) & + & Q_1(S) \times \mathbb{E}\big(S^3\big) \\ = & Q_4(S) & + & 3\,Q_3(S) \times \cancel{\mathbb{E}(S)} & + & 3\,\mathbb{V}(S) \times \mathbb{E}\big(S^2\big) & + & \cancel{\mathbb{E}(S)} \times \mathbb{E}\big(S^3\big) \\ = & Q_4(S) & + & 3\,\mathbb{V}(S) \times \mathbb{V}(S) & & & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{E}(S^4) \ = \ M_S^{(4)}(0) \ = \ Q_4(S) + 3\,\big(\mathbb{V}(S)\big)^2.}$$

□

14. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation : $Q_4(X) \ = \ \mu_4(X) - 3\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$\begin{array}{rcll} Q_4(S) & = & \mathbb{E}(S^4) - 3\,\big(\mathbb{V}(S)\big)^2 & \textit{(d'après la question } \textbf{13.c)}\textit{)} \\ & = & \Big(2\,\mu_4(X) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2\Big) - 3\,\big(\mathbb{V}(S)\big)^2 & \textit{(d'après la question } \textbf{13.a)}\textit{)} \\ & = & \Big(2\,\mu_4(X) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2\Big) - 3\,\big(\mathbb{V}(X_1 - X_2)\big)^2 & \\ & = & \Big(2\,\mu_4(X) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2\Big) - 3\,\big(\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2)\big)^2 & \textit{(car } X_1 \textit{ et } -X_2 \textit{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\ & = & \Big(2\,\mu_4(X) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2\Big) - 3\,\big(\mathbb{V}(X_1) + (-1)^2\,\mathbb{V}(X_2)\big)^2 & \\ & = & \Big(2\,\mu_4(X) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2\Big) - 3\,\big(\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)\big)^2 & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \\ & = & 2\,\mu_4(X) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2 - 12\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2 \ = \ 2\,\mu_4(X) - 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2 & \end{array}$$

- Il reste alors à exprimer $Q_4(S)$ en fonction de $Q_4(X)$.
  Rappelons tout d'abord qu'on a démontré en question ***13.b)*** que pour tout $t \in J$:

$$M_S(t) \ = \ M_X(t)\ M_X(-t)$$

On en conclut :

$$\begin{array}{rcl} K_S(t) & = & \ln\big(M_S(t)\big) \\[6pt] & = & \ln\big(M_X(t) \times M_X(-t)\big) \\[6pt] & = & \ln\big(M_X(t)\big) + \ln\big(M_X(-t)\big) \\[6pt] & = & K_X(t) + K_X(-t) \end{array}$$

Ainsi, par dérivations successives des deux membres de cette égalité :

$$\begin{array}{lrcl} & K'_S(t) & = & K'_X(t) - K'_X(-t) \\[6pt] \text{donc} & K''_S(t) & = & K''_X(t) - \big(- K''_X(-t)\big) \\ & & = & K'_X(t) + K'_X(-t) \\[6pt] \text{et} & K_S^{(3)}(t) & = & K_X^{(3)}(t) - K_X^{(3)}(-t) \\[6pt] \text{enfin} & K_S^{(4)}(t) & = & K_X^{(4)}(t) + K_X^{(4)}(-t) \end{array}$$

En particulier, pour $t = 0 \in J$:

$$\begin{array}{ccccc} K_S^{(4)}(0) & = & K_X^{(4)}(0) + K_X^{(4)}(0) & = & 2\,K_X^{(4)}(0) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ Q_4(S) & & & & 2\,Q_4(X) \end{array}$$

- On en conclut, d'après ce qui précède :

$$2\,Q_4(X) \ = \ 2\,\mu_4(X) - 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2$$

$$\boxed{\text{Finalement : } Q_4(X) \ = \ \mu_4(X) - 3\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2.}$$

□