EML 2019

EXERCICE 1

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

PARTIE A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.
On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$.

1. a) Justifier : $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t)\, f_V(t) \leqslant f_V(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, +\infty[$.
Comme la fonction F_U est une fonction de répartition :

$$0 \leqslant F_U(t) \leqslant 1$$

De plus, la fonction f_V est une densité de probabilité, donc : $f_V(t) \geqslant 0$. Ainsi :

$$0 \times f_V(t) \leqslant F_U(t) \times f_V(t) \leqslant 1 \times f_V(t)$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t)\, f_V(t) \leqslant f_V(t).}$$

□

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\, dt$ converge.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto F_U(t)\, f_V(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle. En effet :
  - × la fonction F_U est continue sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[0, +\infty[$) en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.
  - × la fonction f_V est continue sur $[0, +\infty[$ d'après l'énoncé.
- De plus :
  - × $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t)\, f_V(t) \leqslant f_V(t)$
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\, dt$ est convergente. En effet, comme f_V est une densité de probabilité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)\, dt$ est convergente (et vaut 1). Ainsi, en particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\, dt$ converge.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives,}\\ \displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\, dt \text{ est convergente.}\end{array}}$$

□

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\ dt \ = \ \mathbb{P}([U \leqslant V])$$

2. En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) \ = \ \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t) \ = \ f_V(t) - F_U(t)\, f_V(t)$$

Or les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\ dt$ sont convergentes d'après la question précédente. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt$ est convergente.

- De plus :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt \ &= \ \int_0^{+\infty} f_V(t) - F_U(t)\, f_V(t)\ dt \\
&= \ \int_0^{+\infty} f_V(t)\ dt - \int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\ dt \\
&= \ \int_0^{+\infty} f_V(t)\ dt - \mathbb{P}([U \leqslant V]) && \textit{(d'après le résultat admis de l'énoncé)} \\
&= \ \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)\ dt - \mathbb{P}([U \leqslant V]) && \textit{(car } f_V \textit{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\
&= \ 1 - \mathbb{P}([U \leqslant V]) && \textit{(car } f_V \textit{ est une densité de probabilité)} \\
&= \ \mathbb{P}([U > V])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([U > V]) \ = \ \int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt}$$

□

3. **Exemple** : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Comme } U \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } V \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu), \text{ pour tout } t \in [0, +\infty[\ : \\ F_U(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, t} \quad \text{et} \quad f_V(t) = \mu\, \mathrm{e}^{-\mu\, t}. \end{array}}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) \ = \ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on précise que les v.a.r. U et V sont des v.a.r. à densité. On est donc bien dans le cadre d'application de la question ***2.***
- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U > V]) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\cancel{1} - \big(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda t}\big)\Big)\ \mu\,\mathrm{e}^{-\mu t}\ dt & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mu \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{e}^{-\mu t}\ dt & \\ & = & \mu \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\ dt & \end{array}$$

- De plus, soit $A \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\ dt \ = \ \left[-\frac{1}{\lambda+\mu}\ \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \right]_0^A \ = \ -\frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)A} - 1\right) \ = \ -\frac{1}{\lambda+\mu}\ \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)A} + \frac{1}{\lambda+\mu}$$

Or, comme $\lambda > 0$ et $\mu > 0$: $\lim\limits_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)A} = 0$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\ dt = \frac{1}{\lambda+\mu}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([U > V]) \ = \ \mu \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\ dt \ = \ \frac{\mu}{\lambda+\mu}.}$$

□

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}([M_n > t])$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, +\infty[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} [M_n > t] & = & [\min(T_1, \ldots, T_n) > t] \\ & = & \bigcap\limits_{i=1}^{n} [T_i > t] \end{array}$$

- On en déduit :

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([M_n > t]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [T_i > t]\right) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([T_i > t]) & \textit{(car les v.a.r. } T_1, \ldots, T_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - F_{T_i}(t)) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} (\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda t})) & \textit{(car, pour tout } i \in [\![1, n]\!], \\
& & & T_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } t \geqslant 0) \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda t} & \\
& = & \left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n &
\end{array}
$$

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[, \ \mathbb{P}([M_n > t]) = \mathrm{e}^{-n\lambda t}}$$

Commentaire

- On fait ici l'étude de la loi d'un minimum de v.a.r. . Cette étude est classique et commence toujours par l'énoncé de l'égalité entre événements, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$[\min(T_1, \ldots, T_n) > t] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} [T_i > t]$$

- On rappelle que dans le cas de l'étude d'un maximum de v.a.r. , on commence par une égalité similaire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$[\max(T_1, \ldots, T_n) \leqslant t] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} [T_i \leqslant t]$$

□

b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
Reconnaître la loi de M_n et préciser son (ses) paramètre(s).

Démonstration.

- Tout d'abord, comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on a : $T_i(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } M_n(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $t \in]-\infty, 0[$, alors : $[M_n \leqslant t] = \varnothing$ car $M_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :

$$F_{M_n}(t) \ = \ \mathbb{P}([M_n \leqslant t]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $t \in [0, +\infty[$, alors :

$$
\begin{array}{rcll}
F_{M_n}(t) & = & \mathbb{P}([M_n \leqslant t]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([M_n > t]) & \\
& = & 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t} & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{M_n} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(n\lambda)$.
  Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } M_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda).}$$

□

5. a) Montrer : $\mathbb{P}([N=1]) \ = \ \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) \ = \ \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, notons que l'événement $[N=1]$ est réalisé si et seulement si le plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ est 1, autrement dit, si et seulement si l'événement $[T_1 \leqslant T_0]$ est réalisé.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } [N=1] = [T_1 \leqslant T_0]. \text{ D'où :}\\ \mathbb{P}([N=1]) \ = \ \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]).\end{array}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) & = & 1 - \mathbb{P}([T_1 > T_0]) & \\ & = & 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda} & \textit{(d'après \textbf{3.b)} car } T_1 \textit{ et } T_0 \textit{ sont} \\ & & & \textit{indépendantes et suivent la loi } \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & 1 - \dfrac{\cancel{\lambda}}{2\,\cancel{\lambda}} & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) = \dfrac{1}{2}.}$$

Commentaire

On utilise ici le résultat d'une question précédente. On n'omettra donc pas de préciser que toutes les hypothèses nécessaires à son application sont vérifiées.

□

b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[N > n] \cup [N=0] \ = \ [M_n > T_0]$.
En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}([N > n] \cup [N=0])$ en fonction de n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Tout d'abord :

$$[M_n > T_0] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} \ [T_i > T_0]$$

Démontrons donc : $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \ [T_i > T_0] = [N > n] \cup [N=0]$.

Soit $\omega \in \Omega$.

$(\subset)$ Supposons $\omega \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \ [T_i > T_0]$, *i.e.* , pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $T_i(\omega) > T_0(\omega)$.

Deux cas se présentent alors :

- soit il existe un entier $k > n$ tel que $T_k(\omega) \leqslant T_0(\omega)$.
  Alors : $N(\omega) > n$, c'est-à-dire $\omega \in [N > n]$.
- soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $T_k(\omega) > T_0(\omega)$.
  Alors : $N(\omega) = 0$, c'est-à-dire $\omega \in [N=0]$.

Finalement : $\omega \in [N > n]$ `OU` $\omega \in [N=0]$. Donc : $\omega \in [N > n] \cup [N=0]$.

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} \ [T_i > T_0] \ \subset \ [N > n] \cup [N=0]}$$

($\supset$) Supposons $\omega \in [N > n] \cup [N = 0]$, *i.e.* $N(\omega) > n$ ou $N(\omega) = 0$.
Alors, dans les deux cas, par définition de la v.a.r. N, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $T_i(\omega) > T_0(\omega)$.
Autrement dit : $\omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} [T_i > T_0]$.

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} [T_i > T_o] \ \supset \ [N > n] \cup [N = 0]}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } [M_n > T_0] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} [T_i > T_0] \ = \ [N > n] \cup [N = 0].}$$

- Les v.a.r. M_n et T_0 sont :
  - × des v.a.r. à densité,
  - × indépendantes par lemme des coalitions.

  On peut donc appliquer le résultat de la question ***2.*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([M_n > T_0]) &= \int_0^{+\infty} \big(1 - F_{M_n}(t)\big)\, f_{T_0}(t)\ dt \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\cancel{1} - \big(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-n\lambda\, t}\big)\Big)\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ dt \quad \textit{(d'après la question } \boldsymbol{4.b)}\textit{)} \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\lambda\, t}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ dt \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda\, t}\ dt
\end{aligned}$$

- De plus, soit $A \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{A} \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda\, t}\ dt &= \left[-\frac{1}{(n+1)\lambda}\ \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda\, t} \right]_0^A \\
&= -\frac{1}{(n+1)\lambda} \left(\mathrm{e}^{-(n+1)\lambda\, A} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{(n+1)\lambda}\ \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda\, A} + \frac{1}{(n+1)\lambda}
\end{aligned}$$

  Or, comme $\lambda > 0$ et $n > 0$: $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda\, A} = 0$. Ainsi :

$$\mathbb{P}([M_n > T_0]) \ = \ \cancel{\lambda}\ \frac{1}{(n+1)\cancel{\lambda}} \ = \ \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}([N > n] \cup [N = 0]) \ = \ \mathbb{P}([M_n > T_0]) \ = \ \frac{1}{n+1}.}$$

Commentaire

L'énoncé original proposait de démontrer l'égalité : $[N > n] = [M_n > T_0]$. Cependant : $[M_n > T_0] \not\subset [N > n]$. En effet, considérons l'événement $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0]$.

× Tout d'abord :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0] \ \subset \ \bigcap_{i=1}^{n} [T_i > T_0] \ = \ [M_n > T_0]$$

× Soit $\omega \in \Omega$.
On sait que $\omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0]$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $T_i(\omega) > T_0(\omega)$.
Par définition de N, cela équivaut à $N(\omega) = 0$, *i.e.* $\omega \in [N = 0]$. Ainsi :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0] \ = \ [N = 0]$$

Or : $[N = 0] \not\subset [N > n]$. Donc : $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0] \not\subset [N > n]$.

× Si $[M_n > T_0] \subset [N > n]$, on obtiendrait par transitivité :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0] \ \subset \ [M_n > T_0] \ \subset \ [N > n]$$

Comme ce n'est pas le cas, on a bien : $[M_n > T_0] \not\subset [N > n]$.

□

c) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}([N = n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Notons tout d'abord l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} [N > n-1] &= [N \geqslant n] && \textit{(car N est à valeurs entières)} \\ &= [N = n] \cup [N > n] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} [N > n-1] \cup [N = 0] &= \big([N = n] \cup [N > n] \big) \cup [N = 0] \\ &= [N = n] \cup \big([N > n] \cup [N = 0] \big) && \textit{(par associativité de $\cup$)} \end{aligned}$$

- De plus, les événements $[N = n]$ et $[N > n] \cup [N = 0]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([N > n-1] \cup [N = 0]) \ = \ \mathbb{P}([N = n]) + \mathbb{P}([N > n] \cup [N = 0])$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([N=n]) & = & \mathbb{P}([N>n-1]\cup[N=0]) - \mathbb{P}([N>n]\cup[N=0]) \\ & = & \dfrac{1}{(n-\cancel{1})+\cancel{1}} - \dfrac{1}{n+1} \qquad \textit{(d'après } \textbf{5.b)} \textit{ car } n\in\mathbb{N}^* \textit{ et } n-1\in\mathbb{N}^*) \\ & = & \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \\ & = & \dfrac{(\cancel{n}+1)-\cancel{n}}{n(n+1)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \mathbb{P}([N=n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}.}$$

□

d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([N=0])$.

Démonstration.

- La famille $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([N=0]) & = & 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n]) \\ & = & 1 - \left(\mathbb{P}([N=1]) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n])\right) \\ & = & 1 - \dfrac{1}{2} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} \qquad \textit{(d'après } \textbf{5.a)} \textit{ et } \textbf{5.c)}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{2} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} \end{array}$$

- Notons d'abord que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(\cancel{n}+1)-\cancel{n}}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ainsi, soit $N\geqslant 2$:

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n(n+1)} & = & \sum\limits_{n=2}^{N} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) \\ & = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N+1} \qquad \textit{(par télescopage)} \\ & \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente et que sa somme vaut $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([N=0]) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0.}$$

Commentaire

Prendre l'initiative de la décomposition :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

pour faire apparaître la somme télescopique, peut paraître ardu. On s'efforcera donc de garder en mémoire cet exemple classique de somme télescopique. □

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} n\,\mathbb{P}([N=n]) &= \cancel{0 \times \mathbb{P}([N=0])} + 1 \times \mathbb{P}([N=1]) + \sum_{n=2}^{N} n\,\mathbb{P}([N=n]) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{N} \cancel{n}\,\frac{1}{\cancel{n}(n+1)} && \textit{(d'après \textbf{5.a)} et \textbf{5.c)})} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} && \textit{(par décalage d'indice)} \end{aligned}$$

- Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 3} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 2$). Elle est donc divergente.

  Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } N \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

□

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$B \;=\; P^{-1} A\, P$$

Commentaire

On peut noter que cette égalité est équivalente à l'égalité : $A \;=\; P\,B\,P^{-1}$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

PARTIE A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
Justifier que A est inversible et diagonalisable.

Démonstration.

- La matrice A est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{\tfrac{1}{2}, 1, 2\}}$$

- Le réel 0 n'est pas valeur propre de A.

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible.}}$$

- On a :
  × $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
  × A possède trois valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est diagonalisable.}}$$

□

2. Déterminer une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que : $A \;=\; P\,D\,P^{-1}$.
Expliciter la matrice D^{-1}.

Démonstration.

- Déterminons $E_{\frac{1}{2}}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{\frac{1}{2}}(A) & \Longleftrightarrow & (A - \frac{1}{2}\, I_3)\, X = 0 \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \frac{1}{2}\, x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & \frac{3}{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3} L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}\, x & - & y & = & 0 \\ & & \frac{3}{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2\, y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_{\frac{1}{2}}(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_{\frac{1}{2}}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \frac{1}{2}\,X\} \; = \; \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 2y \ \text{ et } \ z = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \; = \; \{y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \; = \; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_{\frac{1}{2}}(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est uniquement constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F} \text{ est une base de } E_{\frac{1}{2}}(A).}$$

- Déterminons $E_1(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_1(A) & \Longleftrightarrow & (A - I_3)\,X = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} - & y & + & z & = 0 \\ - & \frac{1}{2}\,y & & & = 0 \\ & & & z & = 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y & & = 0 \\ & z & = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_1(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \; = \; \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \ \text{ et } \ z = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \; = \; \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \; = \; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

$$\boxed{\text{Par un raisonnement analogue au précédent, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(A).}$$

- Déterminons $E_2(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \iff & (A - 2\,I_3)\,X = 0 \\ & \iff & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ & - & \frac{3}{2}\,y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & z \\ & - & \frac{3}{2}\,y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3} L_2}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_2(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2\,X\} \;=\; \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \text{ et } y = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \;=\; \{z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \;=\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$$\boxed{\text{Par un raisonnement analogue au précédent, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_2(A).}$$

- D'après la question ***1.***, la matrice A est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
  Plus précisément :
  - × la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A,
  - × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

  Comme $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases respectives de $E_{\frac{1}{2}}(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } A = P\,D\,P^{-1}.}$$

- La matrice D est inversible car elle est diagonale et à coefficients diagonaux tous non nuls.

$$\boxed{\text{Enfin : } D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = \frac{1}{2}$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_{\frac{1}{2}}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - \frac{1}{2}\, I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $z = 0$. En effet, si z est non nul, les coefficients en $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ position de la combinaison linéaire sont non nuls. On prend alors $z = 0$.
  La combinaison linéaire restante est nulle si $\frac{1}{2}\, x - y = 0$, c'est-à-dire si $x = 2y$.

  En prenant par exemple $y = 1$, on obtient : $E_{\frac{1}{2}}(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

  Et l'égalité est vérifiée car ces deux espaces vectoriels sont de même dimension.
- Explicitons maintenant la construction de la matrice P.
  Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et introduisons l'endomorphisme f dont la représentation dans la base canonique est $\mathscr{B}$ (cet endomorphisme est unique par bijectivité de l'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)$). Notons aussi : $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, et $v_3 = (1, 0, 1)$.
  La famille $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$:
  × est libre car est la concaténation de familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme f.
  × de cardinal $\text{Card}(\mathscr{B}') = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.

  On en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de vecteurs propres de f.
  Notons alors $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Par la formule du changement de base on a :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ A & = & P & \times & D & \times & P^{-1} \end{array}$$

  On obtient bien la formule annoncée.
- Rappelons que si Δ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux a, b, c tous non nuls

$$\text{alors} \quad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \quad \text{puisque} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

3. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et $Q\,D\,Q$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Q^2 = Q \times Q = I_3. \text{ On en déduit que la matrice } Q \text{ est inversible d'inverse } Q^{-1} = Q.}$$

- Ensuite :

$$Q\,D\,Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Q\,D\,Q = D^{-1}}$$

Commentaire

- Les coefficients de la matrice Q sont tous dans $\{0, 1\}$. De plus, la matrice Q admet un seul 1 par ligne et par colonne. Une telle matrice est appelée **matrice de permutation**.
- Ces matrices permettent de formaliser les opérations élémentaires permettant d'échanger des lignes (resp. des colonnes) lors de l'algorithme du pivot de Gauss. Plus précisément, multiplier une matrice A à gauche (resp. à droite) par une matrice de permutation permet d'échanger des lignes (des colonnes). Dans notre exemple, la matrice Q permet d'échanger les éléments en $1^{\text{ère}}$ et $3^{\text{ème}}$ position. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  (on échange les lignes 1 et 3 de A) *(on échange les colonnes 1 et 3 de A)*

  On peut retenir l'idée développée dans le paragraphe par la forme :

$$L \ A \ C$$

  qui signifie qu'avec une multiplication à gauche, on effectue une opération sur les (L)ignes, tandis qu'avec une multiplication à droite, on effectue une multiplication sur les (C)olonnes.
- L'écriture $Q\,D\,Q^{-1} = D^{-1}$ réfère à un changement de base. Pour bien comprendre ce point, introduisons la famille $\mathscr{B}'' = (w_1, w_2, w_3)$ définie par : $w_1 = u_3$, $w_2 = u_2$, et $w_3 = u_1$.

  La famille (w_1, w_2, w_3) est :

  × génératrice de $\mathbb{R}^3$ puisque : $\mathrm{Vect}\,(w_1, w_2, w_3) = \mathrm{Vect}\,(u_3, u_2, u_1) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$.

  × de cardinal $\mathrm{Card}\,\big((w_1, w_2, w_3)\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.

  Ainsi, la famille $\mathscr{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  Remarquons alors : $Q^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$ (matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}''$). Ainsi :

$$\begin{array}{rcccccccl} D^{-1} & = & Q & \times & D & \times & Q^{-1} & & \\ & = & P_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \end{array}$$

  (par formule de changement de base)

  Ainsi, la matrice D^{-1} apparaît comme matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.

□

4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Démonstration.

- D'après la question *2.* : $A = P\,D\,P^{-1}$. On en déduit :
  - $\times$ $P^{-1}\,A = D\,P^{-1}$ puis $P^{-1}\,A\,P = D$.
  - $\times$ $A^{-1} = \left(P\left(D\,P^{-1}\right)\right)^{-1} = \left(D\,P^{-1}\right)^{-1} P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1}\,P^{-1} = P\,D^{-1}\,P^{-1}$.
- En combinant ce résultat avec ce qui précède :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= P\,D^{-1}\,P^{-1} \\ &= P\left(Q\,D\,Q^{-1}\right)P^{-1} && \textit{(d'après la question précédente, en remarquant } Q = Q^{-1}\textit{)} \\ &= P\,Q\left(P^{-1}\,A\,P\right)Q^{-1}\,P^{-1} \\ &= \left(P\,Q\,P^{-1}\right)A\left(P\,Q^{-1}\,P^{-1}\right) \\ &= \left(P\,Q\,P^{-1}\right)A\left(P\,Q\,P^{-1}\right)^{-1} \end{aligned}$$

  La dernière ligne est obtenue en remarquant :

$$\left(P\,Q\,P^{-1}\right)^{-1} = \left(Q\,P^{-1}\right)^{-1} P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} Q^{-1}\,P^{-1} = P\,Q^{-1}\,P^{-1}$$

En posant $H = P\,Q\,P^{-1}$, on obtient $A^{-1} = H\,A\,H^{-1}$ ou encore $A = H^{-1}\,A^{-1}\,H$.
Les matrices A et A^{-1} sont donc semblables.

Commentaire

- D'après le cours :

Deux matrices $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables	$\Leftrightarrow$	Les matrices A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes

  Cela revient à démontrer que toute matrice inversible peut être considérée comme une matrice de changement de base.
- On peut illustrer ce point à l'aide de la question. On démontre : $A^{-1} = H\,A\,H^{-1}$, ce qui signifie que A et A^{-1} sont semblables. On peut aussi faire apparaître H et H^{-1} comme des matrices de changement de base ce qui permettra d'interpréter cette égalité comme une formule de changement de base. Pour ce faire, introduisons la famille $\mathscr{B}''' = (z_1, z_2, z_3)$ définie par : $z_1 = e_1$, $z_2 = -e_1 + e_3$, et $z_3 = e_1 + e_2$.
  Cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ (car génératrice de $\mathbb{R}^3$ et de cardinal 3).
  Remarquons alors : $H^{-1} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'''}$ (matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'''$). Ainsi :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= H \times A \times H^{-1} \\ &= P_{\mathscr{B}''',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'''} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'''}(f) && \textit{(par formule de changement de base)} \end{aligned}$$

  Ainsi, les matrices A et A^{-1} représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes.
- Notons que si A est une représentation matricielle d'un endomorphisme f alors A^{-1} représente naturellement l'endomorphisme f^{-1}. En effet :

$$\text{si } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)$$

  On a ainsi trouvé une base $\mathscr{B}'''$ dans laquelle A^{-1} est une représentation de f et une base $\mathscr{B}$ dans laquelle A^{-1} est une représentation de f^{-1}. On ne peut conclure pour autant : $f \cancel{=} f^{-1}$.
  (cela sera vrai si les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'''$ étaient égales)

□

PARTIE B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) \ = \ (x,-z,y+2z)$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

Démonstration.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,0) = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(e_2) = f(0,1,0) = (0,0,1) = e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $f(e_3) = f(0,0,1) = (0,-1,2) = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

- D'autre part :

$$\mathrm{rg}(M) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \ \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux non nuls.
  Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale M.

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est inversible.}}$$

□

6. a. Vérifier que 1 est valeur propre de f et (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associée.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(M - I_3) \ &= \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{rg}\left(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(M - I_3\right) \ = \ 1.}$$

- Or, par théorème du rang :

$$\begin{array}{lccccc} & \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\Big(\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)\Big) & + & \mathrm{rg}\left(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right) \\ \text{donc} & \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\left(E_1(f)\right) & + & \mathrm{rg}\left(M - I_3\right) \\ & \shortparallel & & & & \shortparallel \\ & 3 & & & & 1 \end{array}$$

On en déduit : $\dim\left(E_1(f)\right) \ = \ 3 - 1 \ = \ 2$.

$$\boxed{\dim\left(E_1(f)\right) \ = \ 2}$$

- D'autre part :
  - × $f(u_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = u_1 = 1 \cdot u_1$.
  - × $f(u_2) = f(0, 1, -1) = (0, 1, 1 - 2) = u_2 = 1 \cdot u_2$.

$$\boxed{\text{Ainsi } u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont deux vecteurs propres de } f \text{ associés à la valeur propre } 1.}$$

- Ainsi, $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est une famille d'éléments de $E_1(f)$ qui est :
  - × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.
  - × de cardinal $\mathrm{Card}\left(\mathcal{F}\right) = 2 = \dim\left(E_1(f)\right)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } E_1(f)\text{, sous-espace propre de } f \text{ associé à} \\ \text{la valeur propre } 1.\end{array}}$$

Commentaire

- La formulation de l'énoncé, à savoir « **Vérifier** que 1 est valeur propre » oriente vers une méthode directe consistant généralement en un calcul simple. Il ne s'agit donc pas de mettre en place une démonstration théorique. Ici, il serait malvenu de chercher toutes les valeurs propres en effectuant le calcul de $\mathrm{rg}(M - \lambda\, I_3)$.
- L'énoncé demande de démontrer que la famille (u_1, u_2) est une base de $E_1(f)$.
En démontrant que u_1 et u_2 sont deux vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1, on démontre :
$$E_1(f) \ \supset \ \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$$
On conclut à l'égalité de ces deux espaces vectoriels à l'aide d'un argument de dimension fournit par le théorème du rang.
- On peut aussi rédiger tout autrement. On ne démontre pas que 1 est valeur propre mais on détermine directement, par la méthode usuelle $E_1(f)$. Détaillons cette méthode.
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} u \in E_1(f) & \Longleftrightarrow & U \in E_1(M) \\ & \Longleftrightarrow & (M - I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ -\ y \ - \ z & = & 0 \\ y \ + \ z & = & 0 \end{array} \right. \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ -\ y \ - \ z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Commentaire

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_1(f) & = & \{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ y=-z\ \} \\ & = & \{\ (x,-z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\ \} \\ & = & \{\ x\cdot(1,0,0)+y\cdot(0,-1,1) \mid\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\ \} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(\ (1,0,0),\ (0,-1,1)\ ) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(\ (1,0,0),\ (0,1,-1)\ ) \ = \ \mathrm{Vect}\,(u_1,u_2) \end{array}$$

Comme : $E_1(f)\neq\{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, le réel 1 est bien valeur propre de f et $E_1(f)$ est le sous-espace propre associé à cette valeur propre. □

b. Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3)-u_3=u_2$.

Démonstration.

Soit $u_3=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Notons $U_3=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $U_2=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} f(u_3)-u_3=u_2 & \iff & \big(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)(u_3)=u_2 \\ & \iff & (M-I_3)\,U_3=U_2 \\ & \iff & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 0 & = & 0 \\ - & y & - & z & & = & 1 \\ & y & + & z & & = & -1 \end{array}\right. \\ & \underset{}{\overset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 0 & = & 0 \\ - & y & - & z & & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\boxed{\text{En prenant } x=0 \text{ et } y=0 \text{ (par exemple), on obtient } u_3=(0,0,-1).}$$

Commentaire

On démontre ici que tous les vecteurs (x,y,z) vérifiant $y+z=-1$ sont solutions de l'équation énoncée. Autrement dit, tous les vecteurs s'écrivant sous la forme $(x,-1-z,z)$, où x et y sont des réels quelconques, sont solutions. On a choisi $x=0$ et $z=-1$ (ou $y=0$) par simplicité. Mais on aurait très bien pu faire d'autres choix comme :

$$(1,0,-1),\ (1,-2,1),\ (1,-3,2),\ (0,-2,1),\ (0,-1,0)\ldots$$

□

c. Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$.

  Les équivalences suivantes sont vérifiées.

$$\begin{array}{cl} & \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \iff & (\lambda_1,\ \lambda_2,\ -\lambda_2 - \lambda_3) \ = \ (0,0,0) \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & & = & 0 \\ & & - \ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ \iff & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

- On a alors :
  × la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre,
  × $\mathrm{Card}\big((u_1, u_2, u_3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, u_3) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3$).
- $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, u_3). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, u_3) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\mathrm{Card}\big(\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)\big)}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, u_3))}$ n'ont aucun sens !

□

On admet que $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

Commentaire

Ce résultat se démontre sans pein. En effet, la famille $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est :
× génératrice de $\mathbb{R}^3$ puisque : $\mathrm{Vect}\,(u_1, -u_2, u_3) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$.
× de cardinal $\mathrm{Card}\,\big((u_1, -u_2, u_3)\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.
Ainsi, la famille $\mathscr{B}_2$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

7. a. Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathscr{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathscr{B}_2$.

Démonstration.
Déterminons tout d'abord $M_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$.

- $f(u_1) = u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(u_2) = u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(u_3) = u_2 + u_3 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } M_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Cette écriture permet de démontrer que 1 est l'unique valeur propre de l'endomorphisme f. En effet, comme M_1 est une matrice triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi :

  $$\text{Sp}(f) \;=\; \text{Sp}(M_1) \;=\; \{1\}$$

  Ainsi, l'endomorphisme f possède une unique valeur propre. On en déduit, en procédant par l'absurde, que f n'est pas diagonalisable. En effet, si on suppose f diagonalisable, $M_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ l'est aussi. Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M_1 (ainsi $D = I_3$) telles que $M_1 = P\,D\,P^{-1} = P\,I_3\,P^{-1} = I_3$. Ce qui est absurde.
- L'endomorphisme f n'étant pas diagonalisable, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f est triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) l'endomorphisme f.
- Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre E_{λ_i} et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cet énoncé. Ici, f n'a qu'une valeur propre. Le sous-espace propre $E_1(f)$ a pour base la famille $\big(u_1, u_2\big)$. On complète alors cette famille en ajoutant u_3. La matrice représentant f dans la base $\mathscr{B}_1$ ainsi formée est bien triangulaire supérieure.

Déterminons maintenant $M_2 = \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$.

- $f(u_1) = u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot (-u_2) + 0 \cdot u_3$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(-u_2) = -u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot (-u_2) + 0 \cdot u_3$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(-u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(u_3) = u_2 + u_3 = 0 \cdot u_1 - 1 \cdot (-u_2) + 1 \cdot u_3$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } M_2 = \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

b. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

Démonstration.

- Les matrices M_1 et M_2 sont semblables car elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes.
- Par ailleurs :

$$M_1\, M_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi : } M_1\, M_2 = I_3. \text{ On en déduit que les matrices } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont inversibles} \\ \text{et inverses l'une de l'autre.}\end{array}}$$

□

8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Démonstration.

Notons $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}$ et $Q = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_2}$.

- D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1} & \times & \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) & \times & P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ M & = & P & \times & M_1 & \times & P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } M^{-1} = P\, M_1^{-1}\, P^{-1}.}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} M^{-1} & = & P\, M_1^{-1}\, P^{-1} & \\ & = & P\, M_2\, P^{-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\ & = & P\left(Q\, M\, Q^{-1}\right) P^{-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\ & = & \left(P\, Q\right) M \left(P\, Q\right)^{-1} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ et } M^{-1} \text{ sont semblables.}}$$

□

PARTIE C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice T est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T) = \{1\}}$$

- Le réel 0 n'est pas valeur propre de T.

$$\boxed{\text{On en déduit que } T \text{ est inversible.}}$$

- Démontrons que T n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que T est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de T telles que $T = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de T. Ainsi $D = I_3$ et :

$$T \ = \ P\,I_3\,P^{-1} \ = \ P\,I_3\,P^{-1} \ = \ I_3$$

Absurde !

$$\boxed{\text{La matrice } T \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

10. a. Calculer N^3 puis $(I_3 + N)\,(I_3 - N + N^2)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} N^3 &= (T - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } N^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} (I_3 + N)\,(I_3 - N + N^2) &= (I_3 - \cancel{N} + \cancel{N^2}) + (\cancel{N} - \cancel{N^2} + N^3) \\ &= I_3 - N^3 \ = \ I_3 \qquad \textit{(car } N^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{(I_3 + N)\,(I_3 - N + N^2) = I_3}$$

□

b. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

Démonstration.
Par définition : $T = I_3 + N$. Ainsi, d'après ce qui précède :

$$T\,(I_3 - N + N^2) = I_3$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T \text{ est inversible d'inverse } T^{-1} = I_3 - N + N^2.}$$

□

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

a. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g \circ g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g \circ g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***10.a)*** : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
- Or :

$$\begin{array}{rcll} N^2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \Leftrightarrow & g^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} & \textit{(par isomorphisme de représentation)} \\ & \Leftrightarrow & \exists u \in \mathbb{R}^3,\ g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3} & \\ & \Leftrightarrow & \exists u \in \mathbb{R}^3,\ g \circ g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.}$$

- Enfin, comme $N^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$, on a : $g^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ (toujours par isomorphisme de représentation).

$$\boxed{\text{On en déduit : } g \circ g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.}$$

□

b. Montrer que la famille $\mathscr{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille $(g \circ g(u), g(u), u)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot g \circ g(u) + \lambda_2 \cdot g(u) + \lambda_3 \cdot u \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$.
  - × Par linéarité de g^2, on obtient, en appliquant g^2 de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 \cdot \cancel{g^4(u)} + \lambda_2 \cdot \cancel{g^3(u)} + \lambda_3 \cdot g^2(u) & = & g^2\left(0_{\mathbb{R}^3}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \lambda_3 \cdot g^2(u) & & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

    En effet, comme $g^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ alors $g^4 = g \circ 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
    Et en particulier : $g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g^4(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{Comme } \lambda_1 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et } g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ alors : } \lambda_3 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_1 \cdot g^2(u) + \lambda_2 \cdot g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
    En appliquant g de part et d'autre, on obtient alors :

$$\lambda_1 \cdot \cancel{g^3(u)} + \lambda_2 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, comme ci-dessus : } \lambda_2 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_1 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{On en conclut une nouvelle fois : } \lambda_3 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (g^2(u), g(u), u) \text{ est bien libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F} = (g^2(u), g(u), u)$ est :
  $\times$ libre.
  $\times$ de cardinal : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$ □

c. Écrire la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_3$.

Démonstration.

- $g\big(g^2(u)\big) = g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3} = 0 \cdot g^2(u) + 0 \cdot g(u) + 0 \cdot u$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}_3}\Big(g\big(g^2(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $g\big(g(u)\big) = g^2(u) = 1 \cdot g^2(u) + 0 \cdot g(u) + 0 \cdot u$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}_3}\Big(g\big(g(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $g\big(u\big) = g(u) = 0 \cdot g^2(u) + 1 \cdot g(u) + 0 \cdot u$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}_3}\big(g(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Mat}_{\mathscr{B}_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$ □

d. Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$N^2 - N \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } N^2 - N = \text{Mat}_{\mathscr{B}_3}(g).}$$

- Or, d'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(g) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_3} & \times & \text{Mat}_{\mathscr{B}_3}(g) & \times & P_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ N & = & R & \times & (N^2 - N) & \times & R^{-1} \end{array} \quad \textit{(en notant } R = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_3}\textit{)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les matrices } N \text{ et } N^2 - N \text{ sont semblables.}}$$ □

12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} R\,T^{-1}\,R^{-1} &= R\,\big(I_3 - N + N^2\big)\,R^{-1} && \textit{(d'après la question \textbf{10.a}))} \\ &= R\,I_3\,R^{-1} + R\,\big(N^2 - N\big)\,R^{-1} \ = \ I_3 + N \ = \ T \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } T = R\,T^{-1}\,R^{-1} \text{ et les matrices } T \text{ et } T^{-1} \text{ sont semblables.}}$$ □

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in \,]0,+\infty[, \ f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme $f_1 + f_2$ avec :
  - × $f_1 : t \mapsto t$ dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $f_2 : t \mapsto \frac{1}{t}$ dérivable sur $]0,+\infty$ en tant qu'inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Soit $t \in \,]0,+\infty[$.

$$f'(t) \ = \ 1 - \frac{1}{t^2}$$

De plus :

$$\begin{array}{rcll} f'(t) \geqslant 0 & \Leftrightarrow & 1 - \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0 & \\ & \Leftrightarrow & 1 \geqslant \dfrac{1}{t^2} & \\ & \Leftrightarrow & 1 \leqslant t^2 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction } t \mapsto \dfrac{1}{t} \textit{ sur }]0,+\infty[) \\ & \Leftrightarrow & 1 \leqslant t & \textit{(par stricte croissance de la fonction } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ sur } [0,+\infty[) \end{array}$$

- On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  - × $f(1) \ = \ 1 + \frac{1}{1} \ = \ 2$.
  - × comme $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$, alors : $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$.
  - × comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0$, alors : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

□

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

Démonstration.
D'après la question précédent, la fonction f est :
- × continue (car dérivable) sur $[1, +\infty[$,
- × strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f\big([1, +\infty[\big)$ avec :

$$f\big([1, +\infty[\big) \ = \ \left[f(1), \lim_{t \to +\infty} f(t)\right[\ = \ [2, +\infty[$$

$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ réalise une bijection de } [1, +\infty[\text{ sur } [2, +\infty[.}$ □

On note $g : [2, +\infty[\to [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.

3. a) Dresser le tableau de variations de g.

Démonstration.
D'après le théorème de la bijection, la fonction g est continue sur $[2, +\infty[$ et strictement monotone sur $[2, +\infty[$, de même sens de variation que f sur $[1, +\infty[$.
On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	2	$+\infty$
Variations de g	1 ↗	$+\infty$

□

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.

Démonstration.
La fonction f :
- × réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]2, +\infty[$,
- × est dérivable sur $]1, +\infty[$ (d'après ***1.***),
- × est telle que : $\forall t \in]1, +\infty[, \ f(t) \neq 0$. En effet : $\forall t \in]1, +\infty[, \ f(t) \geqslant 2 > 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } g \text{ est dérivable sur }]2, +\infty[.}$

Commentaire

- On connaît même l'expression de g' : $g' = \dfrac{1}{f' \circ g}$.
- On peut retrouver cette formule via l'égalité $f \circ g = \text{id}$.
  En effet, en dérivant formellement cette égalité, on obtient :

$$(f' \circ g) \times g' \ = \ 1$$

□

c) Soit $y \in [2, +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Démonstration.
Soit $y \in [2, +\infty[$. Soit $t \in]0, +\infty[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} f(t) = y \quad &\Leftrightarrow \quad t + \frac{1}{t} = y \\ &\Leftrightarrow \quad t^2 + 1 = y\,t \qquad \textit{(car } t \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad t^2 - y\,t + 1 = 0 \end{aligned}$$

- On note $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par : $P(X) = X^2 - y\,X + 1$.
  - Calculons le discriminant du polynôme P :

$$\Delta \ = \ (-y)^2 - 4 \times 1 \times 1 \ = \ y^2 - 4$$

  Comme $y \geqslant 2$, alors, par croissance de la foncion $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$: $y^2 \geqslant 4$. Ainsi : $\Delta \geqslant 0$.
  - Distinguons les cas suivant le nombre de racines de P. Deux cas se présentent alors :

    × si $\Delta > 0$ (*i.e.* si $y > 2$), alors P admet exactement deux racines notées r_1 et r_2 :

$$r_1 = \frac{-(-y) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-y) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

$$\boxed{\text{Si } y > 2, \text{ l'équation } f(t) = y \text{ admet exactement deux solutions : } r_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.}$$

    × si $\Delta = 0$ (*i.e.* si $y = 2$), alors P admet exactement une racine notée r_0 :

$$r_0 \ = \ \frac{-(-y)}{2 \times 1} \ = \ \frac{y}{2} \ = \ \frac{2}{2} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Si } y = 2, \text{ l'équation } f(t) = y \text{ admet une unique solution : } r_0 = 1.}$$

Commentaire

Remarquons que, pour $y = 2$, r_1 et r_2 prennent la valeur 1. Les expressions de r_0, r_1 et r_2 coïncident donc en $y = 2$.

- Comme g est la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$, pour tout $y \in [2, +\infty[$ et tout $t \in [1, +\infty[$:
$$g(y) = t \quad \Leftrightarrow \quad f\big(g(y)\big) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(t)$$
On en déduit que, pour tout $y \in [2, +\infty[$, $g(y)$ est la solution de l'équation $f(t) = y$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
Soit $y \in [2, +\infty[$. Deux cas se présentent donc :
  - × si $y > 2$, alors on cherche à déterminer quelle solution de r_1 ou de r_2 appartient à $[1, +\infty[$.
    - Tout d'abord :
$$\begin{aligned} r_1 \geqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y - \sqrt{y^2 - 4} \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \quad y - 2 \geqslant \sqrt{y^2 - 4} \\ &\Leftrightarrow \quad (y-2)^2 \geqslant y^2 - 4 \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{, et } y \geqslant 2\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \cancel{y^2} - 4y + 4 \geqslant \cancel{y^2} - 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 8 \geqslant 4y \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geqslant y \end{aligned}$$
Or cette dernière inégalité est fausse (on a supposé $y > 2$), donc, par équivalence : $r_1 < 1$.
    - Ensuite : $\sqrt{y^2 - 4} \geqslant 0$. Donc, comme $y \geqslant 2$: $y + \sqrt{y^2 - 4} \geqslant 2$.
Ainsi : $r_2 = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } y \in\,]2, +\infty[,\ g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.}$$

  - × si $y = 2$, alors $g(y) = r_0 = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } g(2) = 1.}$$

.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme les expressions de } r_0 \text{ et de } r_2 \text{ coïncident en 2, on obtient finalement :} \\ g : y \mapsto \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.\end{array}}$$

□

PARTIE B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout (x,y) de U.

Démonstration.

- La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ (car de classe $\mathcal{C}^2$) sur $]0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[$.
  Elle admet donc des dérivées partielles premières sur cet ensemble.
- Soit $(x,y) \in\ ]0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[$. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \partial_1(h)(x,y) &= (1+y)\left(-\frac{1}{x^2}(1+x)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right) \\ &= (1+y)\left(-\frac{1}{x^2}-\cancel{\frac{1}{x}}+\left(\cancel{\frac{1}{x}}+\frac{1}{y}\right)\right) = (1+y)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\partial_2(h)(x,y) = (1+x)\left(-\frac{1}{y^2}(1+y)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right) = (1+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$\boxed{\partial_1(h)(x,y) = (1+y)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad \partial_2(h)(x,y) = (1+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\right)}$$

Commentaire

- Il faut noter que l'expression $(1+y)$ est une constante par rapport à x. Ainsi, lorsque l'on dérive h par rapport à la première variable, on met en facteur cette constante $(1+y)$ et on dérive le produit $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x)$.
- Dans l'expression de h, les variables x et y jouent des rôles symétriques.
  Plus précisément : $\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = h(y,x)$. On peut alors en déduire :

$$\forall (x,y) \in U,\ \partial_2(h)(x,y) = \partial_1(h)(y,x)$$

  (ce qu'on a retrouvé par le calcul)
  On peut démontrer ce résultat en remarquant :

$$\partial_2(h)(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(y+h,x)-f(y,x)}{h} = \partial_1(h)(y,x)$$

- Ce cas est relativement fréquent lors de l'étude de fonction de deux variables et le résultat qui en découle est plutôt naturel. Même si ce résultat ne figure pas explicitement dans le programme, il est conseillé de le connaître. On peut alors concevoir ce résultat comme un procédé de vérification permettant de vérifier que le deuxième calcul effectué est juste. □

5. Soit $(x,y) \in U$. Montrer :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } h \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ x & = & y^2 \end{array}\right.$$

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } h \;\Leftrightarrow\; \nabla(h)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(h)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(h)(x,y) & = & 0 \end{array}\right.$$

- Ainsi : (x,y) est un point critique de h

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (1+y)\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2}\right) & = & 0 \\ (1+x)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2}\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2}\right) & = & 0 \\ \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2}\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

(en divisant la $1^{\text{ère}}$ équation par $(1+y) \neq 0$ et la $2^{\text{ème}}$ par $(1+x) \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{y} & = & \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{1}{y^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & y \\ y^2 & = & x \end{array}\right.$$

(en multipliant la $1^{\text{ère}}$ équation par $x^2\,y \neq 0$ et la $2^{\text{ème}}$ par $x\,y^2 \neq 0$)

$$\boxed{\text{On a bien : } (x,y) \text{ est un point critique de } h \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ x & = & y^2 \end{array}\right. .}$$

Commentaire

- On a démontré ci-dessus, à l'aide d'un calcul : $\dfrac{1}{y} \;=\; \dfrac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; y \;=\; x^2$.
  On peut aussi démontrer cette équivalence en argumentant par le caractère bijectif de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.
- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(h)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on fait apparaître une équation du type :
$$y = \psi(x)$$
  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
  C'est la stratégie qu'on adopte ci-dessous.

□

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a, b).

Démonstration.
D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{cccl}
\begin{array}{c}(x,y) \in U \text{ est un} \\ \text{point critique de } h\end{array} & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & y \\ y^2 & = & x \end{array}\right. & \\[1em]
 & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & y \\ x^4 & = & x \end{array}\right. & \\[1em]
 & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & y \\ x^3 & = & 1 \end{array}\right. & \begin{array}{l}\textit{(en divisant la } 2^{\text{ème}} \\ \textit{équation par } x \neq 0\textit{)}\end{array} \\[1em]
 & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & y \\ x^3 & = & 1^3 \end{array}\right. & \\[1em]
 & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & y \\ x & = & 1 \end{array}\right. & \begin{array}{l}\textit{(par bijectivité de la} \\ \textit{fonction } x \mapsto x^3\textit{)}\end{array} \\[1em]
 & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & y \\ x & = & 1 \end{array}\right. & \begin{array}{l}\textit{(en remplaçant } x \textit{ par } 1 \\ \textit{dans la } 1^{\text{ère}} \textit{ équation)}\end{array}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } h \text{ admet pour unique point critique } (1,1).}$$

□

7. a) Vérifier : $\forall (x, y) \in U,\ h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in U$.

$$\begin{array}{rcll}
h(x,y) & = & \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(1+x)(1+y) & \\[1em]
 & = & \left(\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) + 1 + \dfrac{x}{y}\right)(1+y) & \\[1em]
 & = & \left(\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) + 1 + \dfrac{x}{y}\right) + \left(\left(\dfrac{y}{x} + 1\right) + y + x\right) & \\[1em]
 & = & 2 + \left(x + \dfrac{1}{x}\right) + \left(y + \dfrac{1}{y}\right) + \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) & \textit{(en réordonnant)} \\[1em]
 & = & 2 + f(x) + f(y) + f\left(\dfrac{x}{y}\right) &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\dfrac{x}{y}\right)}$$

□

b) En déduire que h admet en (a, b) un minimum global sur U.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$h(1,1) \;=\; \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)(1+1)(1+1) \;=\; 2\times 2\times 2 \;=\; 8$$

$$\boxed{h(1,1) = 8}$$

- Rappelons, d'après la question ***1.***, que la fonction f :
  - $\times$ est décroissante sur $]0,1[$.
  - $\times$ croissante sur $[1,+\infty[$.

  On en déduit que f admet pour minimum $f(1) = 2$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \forall t \in\,]0,+\infty[,\ f(t) \geqslant 2.}$$

- Soit $(x, y) \in U$. D'après la question précédente :

$$h(x,y) \;=\; 2+f(x)+f(y)+f\left(\frac{x}{y}\right) \;\geqslant\; 2+2+2+2 \;=\; 8 \;=\; h(1,1)$$

  Cette minoration est obtenue en appliquant le résultat précédent successivement en $t = x > 0$, $t = y > 0$ et $t = \frac{x}{y} > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut : } \forall (x,y) \in U,\ h(1,1) \;\leqslant\; h(x,y).\\ \text{Ainsi, } h \text{ admet un minimum global sur } U \text{ au point } (1,1).\end{array}}$$

□

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2\, u_n} = \frac{1}{n}\, f(n\, u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ existe} \\ u_n \geqslant 1 \end{array}\right.$.

▸ **Initialisation** :
D'après l'énoncé : $u_1 = 1$. Donc : $u_1 \geqslant 1$.
D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ existe} \\ u_{n+1} \geqslant 1 \end{array}\right.$)
Par hypothèse de récurrence, le réel u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

- Comme $u_n \geqslant 1 > 0$ et $n > 0$, alors : $n\, u_n > 0$.
  Or f est définie sur $]0,+\infty[$, donc le réel $f(n\, u_n)$ existe.
  On en déduit que u_{n+1} existe.

- Ensuite :

$$\begin{array}{llll} & u_n & \geqslant & 1 & \\ \text{donc} & n\,u_n & \geqslant & n & \textit{(car } n > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & f(n\,u_n) & \geqslant & f(n) & \textit{(par croissance de } f \textit{ sur } [1,+\infty[\textit{,} \\ & & & & \textit{et } n\,u_n \geqslant n \geqslant 1\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{n}\,f(n\,u_n) & \geqslant & \dfrac{1}{n}\,f(n) & \textit{(car } \dfrac{1}{n} > 0\textit{)} \end{array}$$

On en déduit : $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n}\,f(n)$. Or :

$$\frac{1}{n}\,f(n) \;=\; \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n}\right) \;=\; 1 + \frac{1}{n^2} \;\geqslant\; 1$$

Ainsi, par transitivité : $u_{n+1} \;\geqslant\; \dfrac{1}{n}\,f(n) \;\geqslant\; 1$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on en déduit que, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 1.}$

Commentaire

Cette question est un classique des suites récurrentes. Elle se traite presque toujours par récurrence.

□

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1  function u=suite(n)
2    u = 1
3    for k = ..................
4      u = ..................
5    end
6  endfunction
```

Démonstration.

```
1  function u=suite(n)
2    u = 1
3    for k = 1:(n-1)
4      u = (1/n) * (n*u + 1/(n*u))
5    end
6  endfunction
```

Détaillons l'obtention de ce programme.
La variable u est crée pour contenir successivement les valeurs u_1, ..., u_n.

- On initialise donc cette variable à $u_1 = 1$ avec la ligne 2.

```
2    u = 1
```

- On met ensuite à jour `u` à l'aide d'une structure itérative (boucle `for`) avec les lignes 3 à 5.

```
3    for k = 1:(n-1)
4      u = (1/n) ⋆ (n⋆u + 1/(n⋆u))
5    end
```

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**. Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- On pouvait également coder la fonction f dans un script à part. On aurait alors obtenu les deux programmes suivants :

```
function y=f(t)
  y = t + 1/t
endfunction
```

```
function u=suite(n)
  u = 1
  for k = 1:(n-1)
    u = (1/n) ⋆ f(n⋆u)
  end
endfunction
```

□

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$v_n \;=\; u_{n+1} - u_n \;=\; \cancel{u_n} + \frac{1}{n^2\, u_n} - \cancel{u_n} \;=\; \frac{1}{n^2\, u_n}$$

- D'après la question précédente : $u_n \geqslant 1 > 0$. Donc : $v_n = \dfrac{1}{n^2\, u_n} \geqslant 0$.
- Toujours d'après la question précédente :

$$\begin{array}{lrcll} & u_n & \geqslant & 1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{u_n} & \leqslant & 1 & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{n^2\, u_n} & \leqslant & \dfrac{1}{n^2} & \textit{(car } \dfrac{1}{n^2} > 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & v_n & \leqslant & \dfrac{1}{n^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}.}$$

□

b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

× la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série } \sum_{n \geqslant 1} v_n \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

La seule difficulté de cette démonstration réside dans la rédaction du critère des séries à termes positifs (les arguments à utiliser ont tous été démontrés dans les questions précédentes). C'est donc une question d'application directe du cours qu'il convient de savoir traiter.

□

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 2$. Par sommation télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k \ = \ \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \ = \ u_{(n-1)+1} - u_1 \ = \ u_n - 1$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ \sum_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - 1}$$

- Soit $n \geqslant 2$. D'après ce qui précède :

$$u_n \ = \ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

Or, d'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est convergente.
On déduit de l'écriture précédente de u_n que la suite (u_n) est convergente, de limite :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \ = \ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ converge vers un réel noté } \ell.}$$

□

11. a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t^2}\, dt$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$.

- Soit $t \in [k-1, k]$.

$$\begin{array}{lccccccl} \text{Comme} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k & & \\ \text{alors} & \dfrac{1}{(k-1)^2} & \geqslant & \dfrac{1}{t^2} & \geqslant & \dfrac{1}{k^2} & & \textit{(par décroissance de la fonction } t \mapsto \dfrac{1}{t^2} \textit{ sur }]0,+\infty[) \end{array}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur le segment $[k-1, k]$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leqslant k$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{(k-1)^2}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2}\, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big(k-(k-1)\big)\dfrac{1}{(k-1)^2} & & & & \big(k-(k-1)\big)\dfrac{1}{k^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En particulier, pour tout } k \geqslant 2 : \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt.}$$

□

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt$$

Démonstration.
Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $2 \leqslant p < n$.

- Tout d'abord, par sommation télescopique :

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_{(n-1)+1} - u_p = u_n - u_p$$

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n-1} v_k = u_n - u_p}$$

- Soit $k \geqslant 2$.
  - D'après la question ***10.a)*** : $0 \leqslant v_k \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.
  - D'après la question précédente, on obtient par transitivité :

$$0 \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ 0 \leqslant v_k \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt}$$

- On obtient, par sommation :

$$0 \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt = \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt \quad \textit{(par relation de Chasles)}$$

> Ainsi, d'après ce qui précède, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2 \leqslant p < n$:
>
> $$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt.$$

Commentaire

Les questions ***11.a)*** et ***11.b)*** sont en fait une comparaison série-intégrale dont on rappelle le résultat ci-dessous.

- On considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[0, +\infty[$.
- On suppose de plus que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leqslant f(k-1)$$

On en déduit par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_{0}^{n} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$$

□

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 3$. On applique le résultat de la question précédente avec $p = 2$ (on a bien : $2 \leqslant p < n$) :

$$0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt$$

Or :

$$\int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{1}^{n-1} = -\left(\frac{1}{n-1} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{n-1} \leqslant 1$$

- On en déduit, par transitivité :

$$0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt \leqslant 1$$

> Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$: $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.

- Par définition de la suite (u_n) :

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{1^2\, u_1} = 1 + \frac{1}{1 \times 1} = 2$$

On en déduit, avec l'encadrement précédent, pour tout $n \geqslant 3$:

$$2 \leqslant u_n \leqslant 3$$

> En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, on obtient : $\ell \in [2, 3]$.

□

d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

Démonstration.
Soit $p \geqslant 2$.

- Soit $n > p$. D'après la question ***11.b)*** :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt$$

- Or :

$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{n-1} = -\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$$

Ainsi :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$$

$$\boxed{\text{En passant à la limite quand } n \text{ tend vers } +\infty \text{ dans l'encadrement précédent, on obtient : } 0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}.}$$

□

e) En déduire une fonction **Scilab** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que u_N est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|\ell - u_N| \leqslant 10^{-4}$$

- Or, d'après la question précédente : $\forall p \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$.
- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{N-1} \leqslant 10^{-4}$.
  Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$0 \leqslant \ell - u_N \leqslant 10^{-4}$$

- On propose alors le programme suivant :

```
function l = valeur_approchee()
  n = 2
  while 1 / (n-1) > 10 ^ (-4)
    n = n + 1
  end
  l = suite(n)
endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du script**

  La variable `n` est initialisée à 2. En effet, on souhaite pouvoir effectuer le calcul : $\dfrac{1}{\texttt{n}-1}$.

```
2   n = 2
```

- **Structure itérative**

  Les lignes 3 à 5 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $\dfrac{1}{n-1} \leqslant 10^{-4}$. On doit donc comparer les valeurs successives de la suite $\left(\dfrac{1}{n-1}\right)_{n\geqslant 2}$ au réel 10^{-4} jusqu'à ce que $\dfrac{1}{n-1} \leqslant 10^{-4}$. Autrement dit, on doit comparer ces valeurs successives à 10^{-4} tant que $\dfrac{1}{n-1} > 10^{-4}$. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
3   while 1 / (n-1) > 10 ^ (-4)
```

  On met alors à jour en conséquence la variable `n` : on ajoute 1 pour signaler qu'on va comparer le terme suivant de la suite $\left(\dfrac{1}{n-1}\right)_{n\geqslant 2}$ à 10^{-4}.

```
4   n = n + 1
```

- **Fin du script**

  À la fin de cette boucle, on est assuré que : $\dfrac{1}{n-1} \leqslant 10^{-4}$ (on itère tant que ce n'est pas le cas).

  Il reste alors à calculer la valeur approchée de ℓ : on l'obtient par le calcul de u_n où n est la valeur obtenue à l'issue de cette boucle.

```
6   l = suite(n)
```

Commentaire

- Lorsqu'on écrit une boucle `while`, il est préférable de s'assurer en amont de sa terminaison. C'est bien le cas ici. En effet, la suite $\left(\dfrac{1}{n-1}\right)_{n\geqslant 2}$ est convergente de limite 0. Ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ \left| \frac{1}{n-1} - 0 \right| < \varepsilon$$

  Ainsi, quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie au départ (ici 10^{-4}), on est toujours en mesure de trouver un rang n_0 à partir duquel on aura : $\dfrac{1}{n-1} < 10^{-4}$.

- On pouvait déterminer, sans utiliser de boucle, un entier N tel que u_N est une valeur approchée à 10^{-4} près de ℓ. Pour ce faire, on remarque :

$$\frac{1}{n-1} \leqslant 10^{-4} \ \Leftrightarrow \ n-1 \geqslant 10^4 \ \Leftrightarrow \ n \geqslant 10^4 + 1$$

  L'entier $N = \lceil 10^4 + 1 \rceil$ convient.

$\square$