EDHEC 2019

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. a) Déterminer $(A - I)^2$.

Démonstration.

$$(A-I)^2 \; = \; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

Démonstration.

- Calculons tout d'abord :

$$(A-I)^2 \; = \; A^2 - 2\,A + I \qquad \textit{(car la matrice } I \textit{ commute avec } A\textit{, matrice de même ordre)}$$

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rrcl} & A^2 - 2\,A + I & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & -A^2 + 2\,A & = & I \\ \text{et} & A\,(-A + 2\,I) & = & I \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -A + 2\,I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

2. On pose $A = N + I$.

Commentaire

Autrement dit, on note $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $N = A - I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

Démonstration.

- On a démontré en question ***1.a)*** : $N^2 = \big(A - I\big)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  (ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = N^2\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

- Les matrices I et N commutent (car I commute avec toutes les matrices du même ordre).
- Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
A^n & = & (N+I)^n \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, (I)^{n-k} \, (N)^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, I \, N^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, N^k & \textit{(car : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \, N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \, N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \, N^k & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} \, N^0 + \binom{n}{1} \, N^1 & \\
& = & I + n\,N &
\end{array}$$

- De plus : $I - 0 \cdot N = I$ et $A^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ A^n = I + n\,N.}$$

Commentaire

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la somme la plus à droite est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ et $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$).

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n \ = \ I + n\,N \ = \ I + n\,(A - I) \ = \ (1-n)\,I + n\,A$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n \ = \ (1-n)\,I + n\,A}$$

□

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^{-1} = 2\,I - A$ d'après la question ***1.b)***.
- D'autre part : $(1-(-1))\,I + (-1)\,A = 2\,I - A$.

$$\boxed{\text{La formule précédente est aussi valable pour } n = -1.}$$

□

3. a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{1\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Sp}(A) \subset \{1\} \text{ et } 1 \text{ est l'unique valeur propre possible de } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\,Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :
  $$(\alpha\,Q)(A) \ = \ \alpha\,Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
  $$R(A) \ = \ (A - 5\,I)\,Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Démontrons que 1 est valeur propre de A.

$$A - I \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_2 = -C_1$).

$$\boxed{\text{On en déduit que } 1 \text{ est l'unique valeur propre de } A.}$$

□

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

Démonstration.
Démontrons que A n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
Supposons que A est diagonalisable.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
Or 1 est la seule valeur propre de A. Ainsi $D = I$ et :

$$A \ = \ P\,I_3\,P^{-1} \ = \ P\,I_3\,P^{-1} \ = \ I_3$$

Absurde !

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) &= \mathrm{rg}(A - I) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \ = \ 1 \end{aligned}$$

La dernière égalité est vérifié car la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre (constituée uniquement d'un vecteur non nul).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = 1.}$$

□

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

Démonstration.
Notons $E_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1)$, $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2)$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big((f - \mathrm{id})(e_1)\Big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f - \mathrm{id}\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) \\ &= \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id})\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\ &= \big(A - I\big)\ E_1 \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((-1, -2, 1)\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation, } u_1 = (-1, -2, 1).}$$

Puis : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big((f-\mathrm{id})(u_1)\Big) = \big(A-I\big)\,U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((0,0,0)\big).$

$$\boxed{\text{Ainsi : } (f-\mathrm{id})(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ c'est-à-dire : } u_1 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}).}$$

Commentaire

On pouvait ici opter pour une présentation plus élégante :

$$\begin{array}{rcll} (f-\mathrm{id})\,(u_1) & = & (f-\mathrm{id})\Big((f-\mathrm{id})(e_1)\Big) & \\ & = & (f-\mathrm{id})^2\,(e_1) \;=\; 0_{\mathbb{R}^3} & \textit{(car } (f-\mathrm{id})^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \\ & & & \textit{puisque } (A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \end{array}$$

La présentation choisie est plus calculatoire. Cela a un intérêt : on obtient la valeur de u_1.

- Ensuite :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((f-\mathrm{id})(u_2)\big) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f-\mathrm{id}\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u_1\big) \\ & = & (A-I)\,(E_1+E_3) \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((0,0,0)\big) \end{array}$$

On en déduit, par isomorphisme de représentation : $(f-\mathrm{id})(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } u_2 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}).}$$

Commentaire

- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
  Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

  Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{array}{rcl} f & \longleftrightarrow & A \\ f-\mathrm{id} & \longleftrightarrow & A-I \\ (f-\mathrm{id})(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3} & \longleftrightarrow & (A-I) \times U_2 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{array}$$

  Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme.

- Enfin, par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\Big(\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{id}\right)\Big) & + & \operatorname{rg}\left(f-\operatorname{id}\right) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 1 \end{array}$$

On en déduit : $\dim\big(\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{id}\right)\big) \ = \ 3-1 \ = \ 2$.

$$\boxed{\dim\big(\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{id}\right)\big) \ = \ 2}$$

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est :
  - × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires $((-1,-2,1)$ et $(1,0,1))$.
  - × de cardinal $\operatorname{Card}\left(\mathcal{F}\right) = 2 = \dim\big(\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{id}\right)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{id}\right).}$$

Commentaire

- On peut aussi déterminer le noyau de $f-\operatorname{id}$ par résolution de systèmes.
Détaillons cette méthode.
- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{id}\right) & \Longleftrightarrow & \left(f-\operatorname{id}\right)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A-I)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \; x \ = \ y \ + \ z \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $\operatorname{Ker}(f)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{id}\right) & = & \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y+z\} \\
& = & \{(y+z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \{y\cdot(1,\, 1,\, 0) + z\cdot(1,\, 0,\, 1) + \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \operatorname{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right)
\end{array}$$

- On remarque que la famille génératrice trouvée n'est pas celle qui est présente dans l'énoncé. Cependant, comme : $(-1,-2,1) = -2\cdot(1,1,0) + (1,0,1)$, on a :

$$\operatorname{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right) \ = \ \operatorname{Vect}\left((-1,-2,1),(1,0,1)\right) \ = \ \operatorname{Vect}\left(u_1,u_2\right)$$

□

5. a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$.
  × Par linéarité de $f - \mathrm{id}$, on obtient, en appliquant $f - \mathrm{id}$ de part et d'autre de l'égalité :

$$\lambda_1 \cdot \cancel{(f-\mathrm{id})(u_1)} + \underbrace{\lambda_2 \cdot \cancel{(f-\mathrm{id})(u_2)} + \lambda_3 \cdot (f-\mathrm{id})(e_1)}_{\lambda_3 \cdot u_1} \ = \ \underbrace{(f-\mathrm{id})\big(0_{\mathbb{R}^3}\big)}_{0_{\mathbb{R}^3}}$$

  En effet, comme u_1 et u_2 sont deux éléments de $\mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{id}\big)$ alors :

$$(f-\mathrm{id})(u_1) \ = \ 0_{\mathbb{R}^3} \ = \ (f-\mathrm{id})(u_2)$$

$$\boxed{\text{Comme } \lambda_3 \cdot u_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \ \text{ et } \ u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ alors : } \lambda_3 = 0.}$$

  × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
  Or, d'après la question précédente, la famille (u_1, u_2) est libre.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ et la famille } (u_1, u_2, e_1) \text{ est bien libre.}}$$

Commentaire

- Il était une nouvelle fois possible de procéder par résolution de système.
  Détaillons ce point.
- Montrons que la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$.

  Les équivalences suivantes sont vérifiées.

$$\begin{array}{cl}
 & \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\iff & \lambda_1 \cdot (-1,-2,1) + \lambda_2 \cdot (1,0,1) + \lambda_3 \cdot (1,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\iff & (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \ -2\,\lambda_1, \ \lambda_1 + \lambda_2) \ = \ (0,0,0) \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\,\lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\
\underset{\iff}{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\underset{\iff}{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\
 & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_1, u_2, e_1) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

- On a alors :
  - × la famille (u_1, u_2, e_1) est une famille libre,
  - × $\text{Card}\big((u_1, u_2, e_1)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_1, u_2, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, e_1) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}((u_1, u_2, e_1)) = 3$).
- $\text{Vect}(u_1, u_2, e_1)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, e_1). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, e_1) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\big(\text{Vect}(u_1, u_2, e_1)\big)}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, e_1))}$ n'ont aucun sens !

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

Démonstration.

- $f(u_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot e_1$ car $u_1 \in \text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot e_1$ car $u_2 \in \text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Rappelons que par définition : $u_1 = (f - \text{id})(e_1) = f(e_1) - e_1$.
  On en déduit : $f(e_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que déterminer la matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, e_1) consiste à exprimer l'image par f des vecteurs u_1, u_2, e_1 suivant cette même base (u_1, u_2, e_1).
- Pour résoudre la question, on se sert ici une nouvelle fois de la correspondance entre le monde des espaces vectoriels et le monde matriciel.
  Ou peut ajouter la correspondance suivante à celle déjà évoquée :

$$\text{expression de } f(u_1) \text{ dans } (u_1, u_2, e_1) \quad \longleftrightarrow \quad \text{expression de } AU_1 \text{ dans } (U_1, U_2, E_1)$$

Commentaire

- Comme on l'a vu dans la question ***3.b)***, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A.
- Considérer un espace vectoriel E de dimesnion finie.
  Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cette question. Ici, f n'a qu'une valeur propre. Le sous-espace propre $E_1(f)$ a pour base la famille (u_1, u_2). On complète alors cette famille en ajoutant e_1. La matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, e_1) obtenue est triangulaire supérieure. $\square$

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

Démonstration.

- Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. Rappelons tout d'abord :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1), \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2), \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1)$$

  On en conclut que $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

$$\boxed{\text{Comme } P \text{ est une matrice de passage, } P \text{ est inversible.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi effectuer un calcul de rang plus classique.

- $1^{\text{ère}}$ méthode :

$$\mathrm{rg}(P) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\,(U_1, U_2, E_2) \ = \ 3$$

  En effet, la famille (U_1, U_2, E_2) est libre car la famille (u_1, u_2, e_2) l'est en tant que base de $\mathbb{R}^3$.
- $2^{\text{ème}}$ méthode :

$$\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls.
  Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

- Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ A & = & P & \times & T & \times & P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = P\,T\,P^{-1}.}$$

□

7. On note $(E_{1,1},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,1},\ E_{2,2},\ E_{2,3},\ E_{3,1},\ E_{3,2},\ E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

Commentaire

Le concepteur a décidé ici de décrire les ensembles dont on doit démontrer l'égalité avec des phrases mathématiques plutôt qu'avec des symboles. Il faut savoir lire l'égalité souhaitée si elle est énoncée sous la forme suivante :

$$\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MT = TM\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})$$

Démonstration.

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe donc $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_9) \in \mathbb{R}^9$ tel que : $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$.

- On a alors :

$$\begin{aligned} MT = TM \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1 + a_3 \\ a_4 & a_5 & a_4 + a_6 \\ a_7 & a_8 & a_7 + a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_7 & a_2 + a_8 & a_3 + a_9 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_1 + a_7 \\ a_2 & = & a_2 + a_8 \\ a_1 + a_3 & = & a_3 + a_9 \\ a_4 + a_6 & = & a_6 \\ a_7 + a_9 & = & a_9 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_7 & = & 0 \\ a_8 & = & 0 \\ a_1 & = & a_9 \\ a_4 & = & 0 \\ a_7 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi poser $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que : $T = I + R$. On a alors :

$$MT = TM \ \Leftrightarrow \ M\,(I + R) = (I + R)\,M \ \Leftrightarrow \ \cancel{M} + MR = \cancel{M} + RM \ \Leftrightarrow \ MR = RM$$

Cela permet d'obtenir plus rapidement les équations au-dessus.

On en conclut :

$$\begin{array}{rl} & \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MT = TM\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \mid a_1 = a_9 \quad \text{et} \quad a_4 = a_7 = a_8 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_9 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix} \mid (a_2, a_3, a_5, a_6, a_9) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\ = & \{a_9 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + a_2 \cdot E_{1,2} + a_3 \cdot E_{1,3} + a_5 \cdot E_{2,2} + a_6 \cdot E_{2,3} \mid (a_2, a_3, a_5, a_6, a_9) \in \mathbb{R}^5\} \\ = & \mathrm{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}) \end{array}$$

$$\boxed{E = \mathrm{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})}$$

- Montrons que la famille $\mathcal{F} = \big(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  Ce qui se réécrit :

  $$\lambda_1 \cdot E_{1,1} + \lambda_1 \cdot E_{3,3} + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

  Or, la famille $\big(E_{1,1},\ E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$ est libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (qui est elle-même libre). On en déduit :

  $$\lambda_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

  $$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est :
  × libre.
  × génératrice de E.

  On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de E.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \dim(E) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) = 5.}$$

□

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \big(P^{-1}NP\big)\,T \ = \ T\,\big(P^{-1}NP\big)$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rll} & NA = AN & \\ \Leftrightarrow & N\,\big(PTP^{-1}\big) = \big(PTP^{-1}\big)\,N & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & P^{-1}\,N\,PTP^{-1} = \big(P^{-1}P\big)\,TP^{-1}\,N & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & P^{-1}\,N\,PT\,\big(P^{-1}P\big) = TP^{-1}\,N\,P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big) & \end{array}$$

$$\boxed{NA = AN \ \Leftrightarrow\ \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big)}$$

□

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)$.

Commentaire

Ici aussi, le concepteur a préféré décrire les ensembles plutôt que de les écrire avec des symboles mathématiques. On aurait pu écrire l'égalité souhaitée sous la forme suivante.

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid NA = AN\} \\ & = & \text{Vect}\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big) \end{array}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{ll} & N \in F \\ \Leftrightarrow & NA = AN \qquad \textit{(par définition de } F\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big) \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \\ \Leftrightarrow & P^{-1}NP \in E = \text{Vect}\,(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}) \qquad \textit{(par définition de } E \textit{ et question } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5, \\ & P^{-1}NP = \lambda_1\cdot(E_{1,1}+E_{3,3}) + \lambda_2\cdot E_{1,2} + \lambda_3\cdot E_{1,3} + \lambda_4\cdot E_{2,2} + \lambda_5\cdot E_{2,3} \\ \Leftrightarrow & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5, \\ & N = P\,\Big(\lambda_1\cdot(E_{1,1}+E_{3,3}) + \lambda_2\cdot E_{1,2} + \lambda_3\cdot E_{1,3} + \lambda_4\cdot E_{2,2} + \lambda_5\cdot E_{2,3}\Big)\,P^{-1} \\ \Leftrightarrow & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5, \\ & N = \lambda_1\cdot P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1} + \lambda_2\cdot P\,E_{1,2}\,P^{-1} + \lambda_3\cdot P\,E_{1,3}\,P^{-1} + \lambda_4\cdot P\,E_{2,2}\,P^{-1} + \lambda_5\cdot P\,E_{2,3}\,P^{-1} \\ \Leftrightarrow & N \in \text{Vect}\,\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } F \ = \ \text{Vect}\,\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big).}$$

Commentaire

- Résumons le procédé mis en place lors de la question ***7***. On souhaite déterminer l'ensemble F des matrices qui commutent avec A (cet ensemble s'appelle le **commutant de** A). Pour ce faire, on commence par déterminer E, l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice triangulaire supérieure T (question ***7.a)***.
  Puis, en question ***7.b)***, on établit un lien entre E et F : $N \in F \quad \Leftrightarrow \quad \big(P^{-1}NP\big) \in E$.
  Cela permet enfin de déterminer F en ***7.a)***.
- Cette question ***7*** illustre un procédé fréquent en mathématiques. Déterminer F de manière directe est difficile. Procéder comme en ***7.a)*** n'est pas judicieux. En effet, si l'on essaie de déterminer par équivalence les contraintes que la propriété $AN = NA$ impose sur les coefficients d'une matrice N quelconque, on obtient un système qui est difficile à résoudre. Il faut noter que la complexité de cette résolution provient de l'aspect de la matrice A. Déterminer le commutant d'une matrice diagonale est plutôt simple. On se pose donc la question de savoir si la matrice A admet un représentant sous forme diagonale. Plus formellement, on cherche s'il existe une base dans laquelle l'endomorphisme f est diagonalisable. Ici, on seulement réussi à exhibé une base dans laquelle la matrice représentative T de f est particulièrement simple ($T = I + R$). On peut donc déterminer le commutant de T. Et en déduire, par les étapes décrites dans le point précédent, le commutant de A.
- On retiendra cette idée générale : lorsqu'on cherche des propriétés sur f, il est souvent préférable d'utiliser la représentation de f la plus simple à manipuler. □

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

Commentaire

- Formellement, l'événement N_n n'est pas défini dans cet énoncé. Il aurait fallu ajouter :

  on note N_n l'événement : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne la boule noire »

- Notons au passage qu'on ne définit pas non plus l'événement B_n : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche ». Ce n'est pas primordial ici puisque $B_n = \varnothing$ (comme l'urne ne contient que $n-1$ boules blanches et qu'on procède sans remise, on ne peut piocher une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage).
- On peut enfin remarquer : $N_n \cancel{=} \overline{B_n}$.
  En effet : $\overline{B_n} = \overline{\varnothing} = \Omega$ est toujours réalisé mais ce n'est pas le cas de N_n.
  Par exemple, la boule noire peut être piochée lors du 1^{er} tirage.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

Démonstration.
L'urne contient n boules dont une seule est noire. Le tirage s'effectuant sans remise, la boule noire apparaît au pire lors du $n^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne. Elle peut aussi apparaître lors de n'importe quel autre tirage précédent.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

□

2. a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$.

Si l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été piochée lors des $i-1$ premiers tirages dans l'urne. À l'issue de ces tirages, l'urne est alors constituée de $(n-\cancel{1})-(i-\cancel{1}) = n-i$ boules blanches et de la boule noire (l'urne contient donc $n-i+1$ boules en tout).

Dans ce cas, l'événement B_i est réalisé si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule blanche. Autrement dit, si l'on obtient l'une des $n-i$ boules non encore piochées. Chaque boule étant piochée de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![2, n-1]\!], \ \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.}$$

□

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $k=1$, alors : $[X=1]=N_1$.
On rappelle que l'urne contient n boules dont 1 noire.

$$\boxed{\text{Chaque boule étant piochée de manière équiprobable : } \mathbb{P}\big([X=k]\big) = \frac{1}{n}.}$$

- Si $k \in [\![2,n]\!]$, alors l'événement $[X=k]$ est réalisé si et seulement si on a pioché successivement $(k-1)$ boules blanches puis une noire. Ainsi :

$$[X=k] \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$$

On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k\big) \\ = & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) \\ = & \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \dfrac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \dfrac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \dfrac{1}{n-k+1} \end{array}$$

Précisons cette dernière égalité :
× $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}\left(\overline{N_1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$.
× $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.
Plus précisément, si l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ est réalisé, c'est que les $k-1$ permiers tirages ont donné une boule blanche.
Dans ce cas, l'événement N_k est réalisé si et seulement si lors du $k^{\text{ème}}$ tirage la boule noire est tirée dans l'urne contenant $n-k+1$ boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([X=k]\big) \ = \ \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) \ = \ \frac{1}{n}.}$$ □

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
× $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
× $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([X=k]\big) \ = \ \dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]).}$$

- On en déduit que X admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}.}$$

Commentaire

Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. En l'occurrence, il s'agit ici simplement de connaître les caractéristiques d'une loi usuelle.

$\square$

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}\big(\,[X=k]\cap[Y=0]\,\big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

- Remarquons tout d'abord :

	L'événément $[X=k]\cap[Y=0]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événément $[X=k]$ est réalisé	et	l'événement $[Y=0]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	On a effectué k tirages (la boule noire a été obtenue lors du $k^{\text{ème}}$ tirage)	et	la boule blanche numérotée 1 n'a pas été piochée lors de l'expérience

On en déduit :

$$[X=k]\cap[Y=0] \;=\; B_1^{(0)}\cap\ldots\cap B_{k-1}^{(0)}\cap N_k$$

Où l'on a noté, pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, $B_i^{(0)}$ l'événement « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche numérotée 0 » (en particulier, $B_{n-1}^{(0)} = \varnothing$).

- On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\,[X=k]\,\big) \\
= \;& \mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\cap\ldots\cap B_{k-1}^{(0)}\cap N_k\big) \\
= \;& \mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\big)\times\mathbb{P}_{B_1^{(0)}}\big(B_2^{(0)}\big)\times\mathbb{P}_{B_1^{(0)}\cap B_2^{(0)}}\big(B_3^{(0)}\big)\times\;\cdots\;\times\mathbb{P}_{B_1^{(0)}\cap\cdots\cap B_{k-2}^{(0)}}\big(B_{k-1}^{(0)}\big)\times\mathbb{P}_{B_1^{(0)}\cap\cdots\cap B_{k-1}^{(0)}}(N_k) \\
= \;& \frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-4}{n-2}\times\;\cdots\;\times\frac{(n-\cancel{2})-(k-\cancel{2})}{n-k+2}\times\frac{1}{n-k+1}
\end{aligned}$$

Précisons cette dernière égalité :

× $\mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\big) = \dfrac{n-2}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée et que l'urne contient initialement n boules dont $(n-2)$ sont blanches et numérotées 0.

× $\forall i \in [\![2,n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_1^{(0)}\cap\cdots\cap B_{i-1}^{(0)}}\big(B_i^{(0)}\big) = \dfrac{n-i-1}{n-i+1}$.

En effet, si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule blanche numérotée 0, il reste $n-(i-1) = n-i+1$ boules dans l'urne dont $(n-2)-(i-1) = n-i-1$ blanches numérotées 0.

× $\mathbb{P}_{B_1^{(0)}\cap\cdots\cap B_{k-1}^{(0)}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$ en procédant comme à la question précédente.

- Dans le produit précédent, les termes apparaissant au numérateur se simplifient avec les termes présents au dénominateur de la fraction présente deux rangs après.

$$\boxed{\text{Après simplification, on obtient : } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big(\,[X=k]\cap[Y=0]\,\big) \;=\; \frac{n-k}{n(n-1)}.}$$

Commentaire

Comme $Y(\Omega)=\{0,1\}$, on obtient à l'aide du système complet d'événements $\big(\,[Y=0]\,,[Y=1]\,\big)$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big(\,[X=k]\cap[Y=1]\,\big) \;=\; 1-\mathbb{P}\big(\,[X=k]\cap[Y=0]\,\big) \;=\; 1-\frac{n-k}{n(n-1)}$$

On obtient ainsi la loi du couple (X,Y), c'est à dire la valeur de $\mathbb{P}\big(\,[X=k]\cap[Y=\ell]\,\big)$ pour $k\in X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et $\ell\in Y(\Omega)=\{0,1\}$. □

b) En déduire $\mathbb{P}\big(\,[Y=0]\,\big)$.

Démonstration.
La famille $\big(\,[X=k]\,\big)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\,[Y=0]\,\big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X=k]\cap[Y=0]\,\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n\,(n-1)}\\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k)\\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} j && \textit{(à l'aide du décalage d'indice } j=n-k\textit{)}\\
&= \frac{1}{n\,(n-1)}\,\frac{n\,(n-1)}{2} \;=\; \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\,[Y=0]\,\big)=\frac{1}{2}}$$

Commentaire

- Le changement d'indice $j=n-k$ est en fait une sommation dans l'autre sens :

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k) &=& (n-1) &+& (n-2) &+& \cdots &+& (n-(n-1)) &+& (n-n)\\
&=& (n-1) &+& (n-2) &+& \cdots &+& 1 &+& 0\\
\sum\limits_{j=0}^{n-1} j &=& 0 &+& 1 &+& \cdots &+& (n-2) &+& (n-1)
\end{array}$$

- Il n'est pas envisageable de ne pas savoir comment traiter cette question : déterminer une loi marginale (la valeur de $\mathbb{P}\big(\,[Y=1]\,\big)$ peut se déduire de $\mathbb{P}\big(\,[Y=0]\,\big)$) à partir d'une loi de couple est une méthode classique qu'il faut parfaitement connaître. □

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Comme $Y(\Omega) = \{0, 1\}$, on obtient à l'aide du système complet d'événements $\big([Y = 0], [Y = 1]\big)$:

$$\mathbb{P}\big([Y = 0]\big) + \mathbb{P}\big([Y = 1]\big) \quad = \quad 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([Y = 1]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([Y = 1]\big) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- Finalement :
  - × $Y(\Omega) = \{0, 1\}$,
  - × $\mathbb{P}\big([Y = 0]\big) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\big([Y = 1]\big) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } Y \text{ admet une espérance et une variance. De plus :}\\ \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}.\end{array}}$$

□

4. Simulation informatique.
On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme $[\![a, b]\!]$.

a) Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB + 1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
5  while u < nB + 1
6      nB = ----
7      u = grand(1, 1, 'uin', 1, ----)
8      X = ----
9  end
10 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro')
```

Démonstration.
Détaillons les différents éléments de ce programme.

- En ligne 1, on récupère la valeur de `n`, variable qui contiendra le nombre de boules, à l'aide d'une dialogue avec l'utilisateur.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
```

- On initialise alors la variable `X` qui contiendra la valeur prise par X pour la succession de tirages simulés et la variable `nB` qui contient le nombre de boules blanches.

```
2  nB = n-1
3  X = 1
```

- On simule ensuite un premier tirage dans l'urne. Pour ce faire, on considère initialement que les boules sont numérotées de 1 à n. Les boules blanches sont numérotées 1 à $n-1$ sont les boules blanches et la boule noire est numérotée n.

```
4  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
```

  Plus précisément, on stocke dans la variable `u` le résultat de la simulation d'une v.a.r. U qui suit la loi $\mathcal{U}([\![1, \texttt{nB + 1}]\!])$. On obtient ainsi un entier choisi aléatoirement entre 1 et `nB+1`, variable contenant le nombre de boules en tout dans l'urne.

- S'ensuit une structure itérative permettant de simuler la succession de tirages tant que la boule noire n'a pas été tirée.
  - × La ligne 4 permet de réaliser l'itération tant que la valeur de `u` est différente de celle de `nB+1` (on peut le faire grâce à l'inégalité de la ligne 5 car `u` prend sa valeur dans $[\![1, \texttt{nB+1}]\!]$). Il faut donc comprendre que la boule noire est numérotée `nB+1` tout au long du programme.

```
5  while u < nB + 1
```

  - × En ligne 5, on met à jour le nombre de boules dans l'urne après avoir procédé au tirage.

```
6      nB = nB - 1
```

  - × Puis on procède à un nouveau tirage.

```
7      u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
```

    Il faut comprendre que l'on renumérote à chaque tirage les boules dans l'urne. Si initialement l'urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5, on considère que les boules dont le numéro est dans $[\![1, 4]\!]$ sont blanches et que la boule 5 est noire. Si on tire la boule 2, alors il ne reste plus que 4 boules dans l'urne dont 3 blanches qu'on peut alors renuméroter 1, 2 et 3. La boule noire est alors numérotée 4.

  - × Enfin, on met à jour la variable `X` qui compte le nombre de tirages faits jusqu'à présent.

```
8      X = X + 1
9  end
```

  Finalement, on obtient le programme complet suivant.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
5  while u < nB + 1
6      nB = nB - 1
7      u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
8      X = X + 1
9  end
10 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro')
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

b) Compléter les lignes 4 et 9 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
1  n = input('Entrez une valeur pour n : ')
2  nB = n-1
3  X = 1
4  Y = ----
5  u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB+1)
6  while u < nB + 1
7      nB = ----
8      if u == 1 then
9          Y = ----
10     end
11     u = grand(1, 1, 'uin', 1, ----)
12     X = ----
13 end
14 disp(X, 'La boule noire est apparue au tirage numéro ')
15 disp(Y, 'La valeur de Y est ')
```

Démonstration.

- Il s'agit de simuler la v.a.r. Y. On crée la variable Y, destinée à contenir la valeur prise par Y lors de la simulation. On initialise Y à 0 puisqu'avant les tirages, la boule 1 n'a pas encore été piochée.

```
4  Y = 0
```

- Il faut alors tester, pour chaque tirage simulé (à chaque tour de boucle) si l'on a obtenu la boule numérotée 1. La structure conditionnelle du programme permet justement de tester si la variable u, qui contient le numéro de la boule tirée, vaut 1. Si c'est le cas, c'est qu'on a tiré la boule 1. Il faut alors mettre à jour la variable Y en conséquence.

```
8      if u == 1 then
9          Y = 1
10     end
```

Commentaire

- Il faut bien comprendre qu'à chaque simulation de tirage on procède à une renumérotation des boules. Reprenons l'exemple détaillé précédemment. Initialement l'urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. La boule 5 est noire et les autres blanches. La boule 1 porte l'inscription 1 et les boules 2, 3 et 4 portent l'inscription 0. Imaginons les tirages suivants :
  - × si on tire la boule 2, alors les 4 boules restantes dans l'urne sont renumérotées de 1 à 4. La 4 est la noire, les boules 1, 2, 3 sont blanches et c'est la 1 qui portent l'inscription 1.
  - × si on tire enstuie la boule 1, alors on renumérote les boules : la 3 est la noire, les boules 1 et 2 sont blanches portent toutes deux l'inscription 0.
  - × si on tire ensuite la boule 1, alors on renumérote les boules : la 2 est la noire, la 1 est blanche et porte l'inscription 0.

  Cette série de tirages, permet de comprendre que la renumérotation peut provoquer plusieurs tirages successifs de boules boules 1. Mais celles-ci ne sont pas considérées comme portant l'inscription 1 tout au long du programme.
- Il est à noter que seule la première mise à jour de Y a un effet : si la variable Y contient 1, les mises à jour suivantes écrasent cette valeur pour la remplacer par 1. □

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$. On a donc, en particulier : $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur le segment $[0,1]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est bien définie.}}$$

- Ensuite :

$$u_1 = \int_0^1 (1-t^2)^1 \, dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(0 - \frac{0}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{3}}$$

- Enfin :

$$u_2 = \int_0^1 (1-t^2)^2 \, dt = \int_0^1 (1-2\,t^2+t^4) \, dt = \left[t - 2\,\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{5+3}{15}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{8}{15}}$$

□

2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \, dt - \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n \, dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n \left((\cancel{1} - t^2) - \cancel{1}\right) \, dt \\ &= -\int_0^1 t^2\,(1-t^2)^n \, dt \end{aligned}$$

- Or, soit $t \in [0,1]$.

	$0 \leqslant t \leqslant 1$	
donc	$0 \leqslant t^2 \leqslant 1$	*(par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0,+\infty[$)*
d'où	$0 \geqslant -t^2 \geqslant -1$	
ainsi	$1 \geqslant 1-t^2 \geqslant 0$	
alors	$1 \geqslant (1-t^2)^n \geqslant 0$	*(par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0,+\infty[$)*
donc	$t^2 \geqslant t^2\,(1-t^2)^n \geqslant 0$	*(car $t^2 \geqslant 0$)*

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\int_0^1 t^2\,(1-t^2)^n\,dt \;\geqslant\; 0$$

On en déduit : $u_{n+1} - u_n \;=\; -\displaystyle\int_0^1 t^2\,(1-t^2)^n\,dt \;\leqslant\; 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

□

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Démonstration.

- On a déjà démontré en question précédente : $\forall t \in [0,1]$, $(1-t^2)^n \geqslant 0$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\underset{u_n}{\underset{\shortparallel}{\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt}} \;\geqslant\; 0$$

- On en déduit que la suite (u_n) est :
  - × décroissante (d'après la question précédente),
  - × minorée par 0.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc convergente.}}$$

□

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt$.

Démonstration.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ est une densité d'une v.a.r. X de loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1.}$$

□

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt$, puis celle de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}}\, dt$ est convergente et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}}\, dt \ = \ \sigma\,\sqrt{2\pi}$$
- Choisissons alors σ tel que : $\dfrac{1}{2\,\sigma^2} = n$, c'est-à-dire, comme $n > 0$:
$$2\,\sigma^2 = \frac{1}{n} \ \Leftrightarrow \ \sigma^2 = \frac{1}{2\,n} \ \Leftrightarrow \ \sigma = \sqrt{\frac{1}{2\,n}} = \frac{1}{\sqrt{2\,n}}$$
où la dernière équivalence est vérifiée car $\sigma > 0$.
- Alors, d'après la question précédente l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt$ est convergente et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\,n}}\,\sqrt{2\pi} \ = \ \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\,\sqrt{n}}\,\cancel{\sqrt{2}}\,\sqrt{\pi} \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

- Tout d'abord, comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt$ est convergente, alors les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-n\,t^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt$ sont également convergentes.
- On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow \ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
On obtient alors :
$$\int_{-\infty}^{0} e^{-n\,t^2}\, dt \ = \ \int_{+\infty}^{0} e^{-n\,(-u)^2}\big(-\,du\big) \ = \ \int_{0}^{+\infty} e^{-n\,u^2}\, du$$
- On en déduit :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt \ = \ \int_{-\infty}^{0} e^{-n\,t^2}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt \ = \ 2\int_{0}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt$$
Ainsi :
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt \ = \ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \int_{0}^{+\infty} e^{-n\,t^2}\, dt \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variable affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a bien fait en premier lieu).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.
- L'énoncé n'introduit pas la variable n dans cette question. Cependant, on remarque la nécessité de son appartenance à $\mathbb{N}^*$ (et non $\mathbb{N}$). En effet, si $n = 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-0\,t^2}\, dt$ est divergente (car l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} 1\, dt$ l'est).

$\square$

c) Montrer que, pour tout réel t, on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$.

Démonstration.

- La fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
  On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ se situe au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0. Or cette tangente est la droite d'équation :
  $$\begin{array}{rcl} y & = & g(0) + g'(0)\,(x-0) \\ & = & \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\, x \ = \ 1 + x \end{array}$$
  On en déduit donc :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$$
- Soit $t \in \mathbb{R}$. En appliquant la propriété ci-dessus à $x = -t^2 \in \mathbb{R}$, on obtient :
  $$\mathrm{e}^{-t^2} \ \geqslant\ 1 + (-t^2)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 1 - t^2.}$$

Commentaire

- Notons tout d'abord que la variable t étant sous la portée d'un quantificateur, elle est muette. Ainsi, le résultat démontré est bien celui souhaité.
- Il est possible de procéder différemment.
  On peut considérer la fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} - 1 - t^2$, procéder à son étude et conclure quant à son signe :
  $$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) \geqslant 0$$
  ce qui correspond à l'inégalité souhaitée.

$\square$

d) En déduire : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$. Puis donner la limite de la suite (u_n).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [0,1]$. On rappelle qu'on a démontré dans la question ***2.a)*** : $1-t^2 \geqslant 0$. Ainsi :

$$0 \ \leqslant\ 1-t^2 \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-t^2} \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

donc $$0 \ \leqslant\ (1-t^2)^n \ \leqslant\ \left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^n \qquad \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^n \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)}$$

d'où $$0 \ \leqslant\ (1-t^2)^n \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-n\,t^2}$$

- On sait de plus :
  × que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$ est bien définie d'après ***1.***,
  × que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$ est bien définie également car la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-n\,t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$.
- Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$0 \ \leqslant\ \underbrace{\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt}_{=\, u_n} \ \leqslant\ \int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$$

- Enfin, par relation de Chasles (toutes les intégrales en présence sont convergentes d'après la question ***3.b)***) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt \ = \ \int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$$

Or : $\forall t \in [1,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-n\,t^2} \geqslant 0$.
Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt \ \geqslant\ 0$$

On en déduit :

$$\underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt}_{=\, \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt} \ \geqslant\ \int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$$

Alors, par transitivité :

$$0 \ \leqslant\ u_n \ \leqslant\ \int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt \ \leqslant\ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{3.b)}} : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}.}$$

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$. Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutÃ´t classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$,
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à-dire montrer :
  $$\forall t \in [a,b],\ h_1(t) \leqslant f(t) \leqslant h_2(t)$$
  où h_1 et h_2 sont deux fonctions définies sur $[a,b]$, déterminées grâce aux questions précédentes ou grâce à l'étude de f,
  2) **si les intégrales** $\displaystyle\int_a^b h_1(t)\, dt$ **et** $\displaystyle\int_a^b h_2(t)\, dt$ **sont convergentes**, on utilise ensuite la croissance de l'intégrale (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$\int_a^b h_1(t)\, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b h_2(t)\, dt$$
  On peut résumer ce schéma par la phrase suivante : pour encadrer une intégrale, on commence toujours par encadrer son intégrande.
- On peut faire ici la même remarque qu'en question ***3.b)*** : la variable n n'est pas introduite ici, mais elle appartient nécessairement à $\mathbb{N}^*$ pour que la quantité $\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$ soit bien définie.

□

4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, dt$ puis montrer : $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $t \mapsto (1-t)^n$ est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, dt$ est donc bien définie.
- On effectue le changement de variable $\boxed{u = 1-t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = 1-t \quad \text{(et donc } t = 1-u\text{)} \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = 0 \Rightarrow u = 1 \\ \bullet\ t = 1 \Rightarrow u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

On obtient alors :

$$\int_0^1 (1-t)^n \, dt \;=\; \int_1^0 u^n(-\,du) \;=\; \int_0^1 u^n \, du \;=\; \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \;=\; \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}}$$

- Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{array}{lrcccl} \text{Comme} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & 1 \\ \text{alors} & 0 & \leqslant & t^2 & \leqslant & t \\ \text{donc} & 0 & \geqslant & -t^2 & \geqslant & -t \\ \text{d'où} & 1 & \geqslant & 1-t^2 & \geqslant & 1-t \\ \text{ainsi} & 1 & \geqslant & (1-t^2)^n & \geqslant & (1-t)^n \end{array}$$

(par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0,+\infty[$)

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\underbrace{\int_0^1 1 \, dt}_{=1} \;\geqslant\; \underbrace{\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt}_{=u_n} \;\geqslant\; \underbrace{\int_0^1 (1-t)^n \, dt}_{=\frac{1}{n+1}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geqslant \frac{1}{n+1}.}$$

- On obtient :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n$
  - × la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente.}}$$

Commentaire

Revenons sur l'assertion « la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ».

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décalage d'indice :

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \;=\; \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \;=\; T_{n+1}$$

Les suites (S_n) et (T_n) sont donc bien identiques, à décalage d'indice près.

□

5. ***a)*** Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} \;=\; (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} \;=\; \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\, dt$$

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & (1-t^2)^{n+1} & & u'(t) & = & -2\,(n+1)\,t\,(1-t^2)^n \\ v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
On obtient alors :

$$\begin{array}{cll} & \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\, dt & \\ = & \cancel{\Big[\, t\,(1-t^2)^{n+1}\,\Big]_0^1} - \displaystyle\int_0^1 -2\,(n+1)\,t\,(1-t^2)^n\, t\; dt & \\ = & 2\,(n+1) \displaystyle\int_0^1 t^2\,(1-t^2)^n\; dt & \\ = & 2\,(n+1) \displaystyle\int_0^1 (t^2-1+1)\,(1-t^2)^n\; dt & \\ = & 2\,(n+1) \displaystyle\int_0^1 \big((t^2-1)\,(1-t^2)^n + (1-t^2)^n\big)\; dt & \\ = & 2\,(n+1) \left(-\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\,(1-t^2)^{n+1}\; dt + \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\; dt\right) & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ = & 2\,(n+1) \left(-\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\; dt + u_n\right) & \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \\ = & 2\,(n+1)(-u_{n+1}+u_n) & \textit{(par définition de } u_{n+1}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1}).}$$

□

b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}$.

- **Initialisation** :
  D'une part, d'après l'énoncé : $u_0 = 1$.
  D'autre part : $\dfrac{4^0\,(0!)^2}{(2\times 0+1)!} \;=\; \dfrac{1\times 1^2}{1!} \;=\; 1.$
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($i.e.$ $u_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}{\big(2(n+1)+1\big)!} = \dfrac{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}{(2n+3)!}$).

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = (2n+2)\,(u_n - u_{n+1}) \quad &\Leftrightarrow \quad u_{n+1} = (2n+2)\,u_n - (2n+2)\,u_{n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \big(1+(2n+2)\big)\,u_{n+1} = 2\,(n+1)\,u_n \\ &\Leftrightarrow \quad u_{n+1} = \frac{2\,(n+1)}{2n+3}\,u_n \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2\,(n+1)}{2n+3}\,u_n \\ &= \frac{2\,(n+1)}{2n+3}\,\frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{2\,(n+1)}{2n+3}\,\frac{2n+2}{2n+2}\,\frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2\,(n+1)\times 2\,(n+1)\times 4^n\,(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{4\,(n+1)^2\times 4^n\,(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{4^{n+1}\,\big((n+1)\,n!\big)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{4^{n+1}\,\big((n+1)!\big)^2}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

□

c) On admet l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}$. En écrivant $u_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)\,(2n)!}$, montrer :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Démonstration.

- En utilisant l'indication de l'énoncé :

$$4^n\,(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n\,\big(\sqrt{2\pi n}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}\big)^2$$
$$= 4^n \times 2\pi n\,n^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n} = 2\pi\,4^n\,n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n}$$

- De même, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$:

$$(2n+1)\,(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n \times \left(\sqrt{2\pi(2n)}\,(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}\right)$$
$$\shortparallel$$
$$2n \times 2\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}\,2^{2n}\,n^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n} = 4\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}\,4^{n}\,n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n}$$

- On en déduit :

$$u_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)\,(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi\,\cancel{4^n\,n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n}}}{4\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}\,\cancel{4^n\,n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n}}}$$
$$\shortparallel$$
$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

□

6. Informatique.
On admet que, si `t` est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur pour n :')
x = 1:n
m = 2 ⋆ n + 1
y = 1:m
v = ..........
w = ..........
u = .......... ⋆ v^2 / w
disp(u)
```

Démonstration.

- Commentons tout d'abord le début du programme proposé.
  - × On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier `n`.

```
n = input('entrez une valeur pour n :')
```

  - × On stocke ensuite dans la variable `x` la matrice ligne contenant les entiers de 1 à `n`.

```
x = 1:n
```

  - × On stocke de plus dans la variable `m` la quantité $2\mathtt{n}+1$.

```
m = 1 ⋆ n + 1
```

  - × On stocke enfin dans la variable `y` la matrice ligne contenant les entiers de 1 à `m`, c'est-à-dire les entiers de 1 à $2\mathtt{n}+1$.

```
y = 1:m
```

- On cherche maintenant à stocker dans la variable `u` la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.
  D'après la question ***5.b)***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \;=\; \frac{4^n \, (n!)^2}{(2n+1)!}$$

× L'énoncé propose de compléter la commande suivante :

```
7   u = .......... ⋆ v ^ 2 / w
```

Par analogie avec la formule de la question ***5.b)***, on souhaite donc stocker dans la variable `v` la valeur `n`! et dans la variable `w` la valeur $(2\mathtt{n}+1)!$.

× On cherche alors une commande permettant d'obtenir $\mathtt{n}! = 1 \times \cdots \times \mathtt{n}$.
D'après l'énoncé, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
La variable `x` contient les entiers de 1 à `n`. Ainsi, pour obtenir `n`!, on peut utiliser la commande : `prod(x)`. On obtient donc :

```
5   v = prod(x)
```

× De même, comme la variable `y` contient les entiers de 1 à $2\mathtt{n}+1$, pour obtenir $(2\mathtt{n}+1)!$, on peut utiliser la commande : `prod(y)`. On obtient :

```
6   w = prod(y)
```

× Pour finir, on complète la ligne 7 de la façon suivante (toujours d'après la formule de ***5.b)***) :

```
7   u = (4 ^ n) ⋆ v ^ 2 / w
```

Commentaire

- On pouvait aussi stocker la valeur `n`! dans la variable `v` à l'aide d'une boucle for :

```
v = 1
for i = 1:n
  v = v ⋆ i
end
```

- Comme dit précédemment, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la mécanismes en jeu et est suffisant pour obtenir les points alloués à cette question.

□

Problème

Partie I : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (theta) désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par : $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\theta\, x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - × sur $]-\infty, 1[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]1, +\infty[$ en tant qu'inverse de la fonction $t \mapsto \theta\, x^{1+\frac{1}{\theta}}$:
    - continue sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction puissance,
    - qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 1.}}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, 1[$, alors : $f(x) = 0$. Ainsi : $f(x) \geqslant 0$.
  - × si $x \in [1, +\infty[$, alors, comme $\theta > 0$: $\theta\, x^{1+\frac{1}{\theta}} > 0$. Ainsi : $f(x) = \dfrac{1}{\theta\, x^{1+\frac{1}{\theta}}} > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ converge et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx$$

  - × Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^A f(x)\, dx &= \int_1^A \frac{1}{\theta\, x^{1+\frac{1}{\theta}}}\, dx = \frac{1}{\theta} \int_1^A x^{-1-\frac{1}{\theta}}\, dx \\ &= \frac{1}{\cancel{\theta}} \left[\frac{1}{-\frac{1}{\cancel{\theta}}}\, x^{-\frac{1}{\theta}} \right]_1^A = -\left(\frac{1}{A^{\frac{1}{\theta}}} - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{A^{\frac{1}{\theta}}} \end{aligned}$$

Or, comme $\frac{1}{\theta} > 0$: $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{1}{A^{\frac{1}{\theta}}} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x)\ dx$.
- Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\ dx \ = \ \int_{1}^{+\infty} x\, f(x)\ dx$$

- De plus, la fonction $x \mapsto x\, f(x)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^A x\, f(x)\ dx &= \frac{1}{\theta} \int_1^A x^{-\frac{1}{\theta}}\ dx \\ &= \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{1-\frac{1}{\theta}}\ x^{1-\frac{1}{\theta}} \right]_1^A \\ &= \frac{1}{\cancel{\theta}}\ \frac{1}{\frac{\theta-1}{\cancel{\theta}}} \left(\frac{1}{A^{\frac{1}{\theta}-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\theta-1}\ \frac{1}{A^{\frac{1}{\theta}-1}} - \frac{1}{\theta-1} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} - 1 > 0 \ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{\theta} > 1 \\ &\Leftrightarrow\ \theta < 1 \quad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vérifiée, donc, par équivalence, la première aussi.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A^{\frac{1}{\theta}-1}} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une espérance et : } \quad \mathbb{E}(X) \ = \ -\frac{1}{\theta-1} \ = \ \frac{1}{1-\theta}.}$$

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x)\ dx$.
- Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\ dx \ = \ \int_{1}^{+\infty} x^2\, f(x)\ dx$$

- De plus, la fonction $x \mapsto x^2\, f(x)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_1^A x^2 f(x)\, dx &= \frac{1}{\theta} \int_1^A x^{1-\frac{1}{\theta}}\, dx \\
&= \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2-\frac{1}{\theta}}\, x^{2-\frac{1}{\theta}} \right]_1^A \\
&= \frac{1}{\cancel{\theta}}\, \frac{1}{\frac{2\,\theta-1}{\cancel{\theta}}} \left(\frac{1}{A^{\frac{1}{\theta}-2}} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2\,\theta-1}\, \frac{1}{A^{\frac{1}{\theta}-2}} - \frac{1}{2\,\theta-1}
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta} - 2 > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\theta} > 2 \\
&\Leftrightarrow \theta < \frac{1}{2} \qquad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vérifiée, donc, par équivalence, la première aussi.

Ainsi : $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{A^{\frac{1}{\theta}-2}} = 0$.

On en déduit que X admet une variance et :
$\mathbb{E}(X^2) = -\dfrac{1}{2\,\theta-1} = \dfrac{1}{1-2\,\theta}$.

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\
&= \frac{1}{1-2\,\theta} - \left(\frac{1}{1-\theta} \right)^2 \\
&= \frac{1}{1-2\,\theta} - \frac{1}{(1-\theta)^2} \\
&= \frac{(1-\theta)^2 - (1-2\,\theta)}{(1-2\,\theta)(1-\theta)^2} \\
&= \frac{\cancel{1} - \cancel{2\theta} + \theta^2 - \cancel{1} + \cancel{2\theta}}{(1-2\,\theta)(1-\theta)^2} \\
&= \frac{\theta^2}{(1-2\,\theta)(1-\theta)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{\theta^2}{(1-2\,\theta)(1-\theta)^2}}$$

Commentaire

On peut en fait déterminer théoriquement jusqu'à quel ordre la v.a.r. X admet des moments. On procéderait de la manière suivante.

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$. La v.a.r. X admet un moment d'ordre r si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, f(x)\, dx$.
- Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f(x)\, dx \;=\; \int_{1}^{+\infty} x^r\, f(x)\, dx$$

- De plus, la fonction $x \mapsto x^r\, f(x)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
- Ensuite, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$x^r\, f(x) \;=\; x^r\, \frac{1}{x^{1+\frac{1}{\theta}}} \;=\; \frac{1}{x^{1-r+\frac{1}{\theta}}}$$

- Or, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{1-r+\frac{1}{\theta}}}\, dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$.
  Elle est donc convergente si et seulement si $1 - r + \dfrac{1}{\theta} > 1$. De plus :

$$\cancel{1} - r + \frac{1}{\theta} > \cancel{1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\theta} > r$$

  Ainsi la v.a.r. X admet des moments d'ordre r pour tout $r \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \dfrac{1}{\theta} \right\rfloor - 1 \right]\!\right]$.
- Par exemple, si $\theta = \dfrac{1}{4}$, alors la v.a.r. X admet des moments d'ordre k, pour tout $k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \dfrac{1}{\frac{1}{4}} \right\rfloor - 1 \right]\!\right] = [\![0, 3]\!]$.

$\square$

3. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

- si $x \in \,]-\infty, 1[$, alors, comme f est nulle sur en dehors de $[1, +\infty[$:

$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \;=\; 0$$

- si $x \in [1, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F(x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_{1}^{x} f(t)\ dt & \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [1,+\infty[\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_{1}^{x} \dfrac{1}{\theta\, x^{1+\frac{1}{\theta}}}\ dx & \\ & = & \dfrac{1}{\cancel{\theta}} \left[\dfrac{1}{-\frac{1}{\cancel{\theta}}} x^{-\frac{1}{\theta}} \right]_1^x & \\ & = & -\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} - 1 \right) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\,]-\infty, 1[\\ 1 - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.}$$

$\square$

4. a) Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in\,]-\infty, 1[$, alors, d'après la question précédente : $F(x) = 0 \neq \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{L'équation } F(x) = \dfrac{1}{2} \text{ n'admet pas de solution sur }]-\infty, 1[.}$$

- Si $x \in [1, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcl} F(x) = \dfrac{1}{2} & \Leftrightarrow & 1 - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = \dfrac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow & -\dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = -\dfrac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow & x^{\frac{1}{\theta}} = 2 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\theta}\ \ln(x) = \ln(2) \\ & \Leftrightarrow & \ln(x) = \theta\ \ln(2) = \ln\left(2^\theta\right) \\ & \Leftrightarrow & x = 2^\theta \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'équation } F(x) = \dfrac{1}{2} \text{ admet } 2^\theta \text{ comme unique solution sur } [1, +\infty[.}$$

$$\boxed{\text{L'équation } F(x) = \dfrac{1}{2} \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R} : M_e = 2^\theta.}$$

$\square$

b) Montrer : $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $2^x\,(1-x) \leqslant 1$.

Démonstration.

Soit $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} 2^x\,(1-x) \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(2^x\,(1-x)\right) \leqslant 0 && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad x\,\ln(2) + \ln(1-x) \leqslant 0 \end{aligned}$$

- Étudions alors la fonction $h : x \mapsto x\,\ln(2) + \ln(1-x)$ sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

  × La fonction h est dérivable sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

  × Soit $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

$$h'(x) \; = \; \ln(2) - \frac{1}{1-x}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned} h'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(2) - \frac{1}{1-x} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(2) \geqslant \frac{1}{1-x} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln(2)} \leqslant 1 - x && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad x \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(2)} \end{aligned}$$

  De plus : $\ln(2) < 1$. Donc : $\dfrac{1}{\ln(2)} > 1$. D'où : $-\dfrac{1}{\ln(2)} < -1$. Ainsi : $1 - \dfrac{1}{\ln(2)} < 0$.

  × On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}$
Signe de $h'(x)$	$-$
Variations de h	0 ↘

  × Comme la fonction h est décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, on en déduit, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$:

$$\begin{array}{ccc} h(x) & \leqslant & h(0) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ x\,\ln(2) + \ln(1-x) & & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right],\ 2^x\,(1-x) \leqslant 1.}$$

□

c) Comparer $\mathbb{E}(X)$ et M_e.

Démonstration.
D'après les questions ***2.*** et ***4.a)*** :

$$\begin{aligned} M_e \leqslant \mathbb{E}(X) \quad &\Leftrightarrow \quad 2^\theta \leqslant \frac{1}{1-\theta} \\ &\Leftrightarrow \quad 2^\theta\,(1-\theta) \leqslant 1 \qquad \textit{(car } 1-\theta > 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or, comme $\theta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, la dernière inégalité est vérifiée, d'après la question précédente. Par équivalence, la première est donc également vérifiée.

$$\boxed{\text{On en déduit : } M_e \leqslant \mathbb{E}(X).}$$

□

5. Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.

a) Montrer : $\mathbb{P}_{[X>a]}([X > a+b]) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{\theta}}$.

Démonstration.
Comme $a > 1$, alors : $\mathbb{P}([X > a)]) \ = \ 1 - \dfrac{1}{a^{\frac{1}{\theta}}} \neq 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X>a]}([X > a+b]) \ &= \ \frac{\mathbb{P}([X > a] \cap [X > a+b])}{\mathbb{P}([X > a])} \\ &= \ \frac{\mathbb{P}([X > a+b])}{\mathbb{P}([X > a])} && \textit{(car, comme } b > 0 \textit{ :} \\ & && [X > a+b] \subset [X > a]\textit{)} \\ &= \ \frac{1 - \mathbb{P}([X \leqslant a+b])}{1 - \mathbb{P}([X \leqslant a])} \\ &= \ \frac{1 - F(a+b)}{1 - F(a)} \\ &= \ \frac{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{\theta}}}\right)}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{a^{\frac{1}{\theta}}}\right)} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.}}\textit{, car } a \geqslant 1 \textit{ et,} \\ & && \textit{comme } b > 0,\ a+b \geqslant 1\textit{)} \\ &= \ \frac{\frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{\theta}}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{\theta}}}} \ = \ \frac{a^{\frac{1}{\theta}}}{(a+b)^{\frac{1}{\theta}}} \\ &= \ \left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X>a]}([X > a+b]) \ = \ \left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{\theta}}}$$

□

b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Démonstration.
Soit $a \in]1, +\infty[$. Soit $b \in]0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}_{[X>a]}([X > a+b]) \ = \ \left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ = \ \exp\left(\frac{1}{\theta}\ \ln\left(\frac{a}{a+b}\right)\right)$$

Or : $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{a}{a+b} = 1$.
Comme de plus la fonction ln est continue en 1, on obtient :

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\theta}\ \ln\left(\frac{a}{a+b}\right) \ = \ \frac{1}{\theta} \times \ln(1) \ = \ 0$$

Comme enfin la fonction exp est continue en 0, on a :

$$\lim_{a\to+\infty} \ \exp\left(\frac{1}{\theta}\ \ln\left(\frac{a}{a+b}\right)\right) \ = \ \exp(0) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Pour tout } b > 0 : \lim_{a\to+\infty} \mathbb{P}_{[X>a]}([X > a+b]) = 1.}$$

Si on considère que X modélise la durée de vie d'un phénomène, la propriété précédente signifie que plus le phénomène a duré longtemps (plus a est grand), plus la probabilité que le phénomène dure encore est grande. On parle alors de rajeunissement. □

Partie 2 : simulation de X

6. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

Démonstration.

- Sans perte de généralité, on considère pour la suite : $X(\Omega) = [1, +\infty[$.
  Ainsi la v.a.r. $\ln(X)$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Y \text{ est bien définie.}}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} G(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(X) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant \mathrm{e}^x]) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & F\left(\mathrm{e}^x\right) & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = F\left(\mathrm{e}^x\right)}$$

□

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$G(x) \ = \ F\left(\mathrm{e}^{x}\right)$$

Deux cas se présentent alors :

× Si $\mathrm{e}^x < 1$, *i.e.* $x < 0$, alors, d'après la question ***3.*** :

$$G(x) \ = \ F\left(\mathrm{e}^{x}\right) \ = \ 0$$

× Si $\mathrm{e}^x \geqslant 1$, *i.e.* $x \geqslant 0$, alors, toujours d'après la question ***3.*** :

$$G(x) \ = \ F\left(\mathrm{e}^{x}\right) \ = \ 1 - \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{\frac{1}{\theta}}} \ = \ 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\theta}\,x}} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\,x}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, 0\right[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\,x} & \text{si } x \in \left[0, +\infty\right[\end{array} \right. .}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$.
Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right).}$$

□

7. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire des commandes **Scilab** utilisant `grand` et permettant de simuler X.

Démonstration.
D'après la question précédente, si une v.a.r. Y suit une loi $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$, alors la v.a.r. $\exp(Y)$ suit la même loi que la v.a.r. X. On propose donc le programme suivant :

```
1  theta = input('Entrez un paramètre theta :')
2  Y = grand(1, 1, 'exp', theta)
3  X = exp(Y)
```

Commentaire

- Il n'est pas précisé par l'énoncé si le paramètre θ a déjà été fixé par l'utilisateur. C'est pourquoi on ajoute la ligne 1. Il n'est cependant pas certain que son oubli soit sanctionné.
- On prendra garde à syntaxe particulière de la fonction `grand` dans le cas d'une loi exponentielle (syntaxe précisée par l'énoncé). En effet, pour obtenir une simulation d'une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on entrera la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` (et non `grand(1, 1, 'exp', lambda)`).
- Ainsi, dans notre cas, pour simuler une loi $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$, on utilisera bien la commande `grand(1, 1, 'exp', theta)` (et non `grand(1, 1, 'exp', 1/theta)`).

□

Partie 3 : estimation d'un paramètre

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.
On considère pour cela n variables aléatoires Y_1, ..., Y_n toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

8. On pose $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} Y_k$.

a) Justifier que T_n est un estimateur de θ.

Démonstration.
La v.a.r. $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ s'exprime :

× À l'aide d'un n-échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la v.a.r. Y,

× sans mention du paramètre θ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ est donc un estimateur de } \theta.}$$

□

b) T_n est-il un estimateur sans biais de θ ?

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T_n) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\frac{1}{\theta}} & \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n]\!], \\ & & & Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{\cancel{n}} \cancel{n}\, \theta \ = \ \theta & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Avec la question précédente, on en déduit que } T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$$

Commentaire

On aura reconnu que la v.a.r. T_n est l'estimateur de la moyenne empirique de Y_1, ..., Y_n.

□

c) Calculer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de θ. T_n est-il un estimateur convergent de θ ?

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une variance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ admet un risque quadratique.}}$$

- Par décomposition biais-variance :

$$
\begin{aligned}
r_\theta(T_n) &= \mathbb{V}(T_n) + (b_\theta(T_n))^2 \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) + 0 && \textit{(car } T_n \textit{ est un estimateur sans biais de } \theta \textit{ d'après } \textbf{8.b)}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^2}\, \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) && \textit{(car les v.a.r. } Y_1, \ldots, Y_n \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2} && \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\, \cancel{n}\, \theta^2 \\
&= \frac{\theta^2}{n}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{r_\theta(T_n) = \frac{\theta^2}{n}}$$

- On remarque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\theta^2}{n} = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n \text{ est un estimateur convergent de } \theta.}$$

□

9. a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n.

Démonstration.
D'après la question précédente, la v.a.r. T_n admet une variance.
Ainsi, par inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}([|T_n - \mathbb{E}(T_n)| > \varepsilon]) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T_n)}{\varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{D'après les questions } \textbf{\textit{8.b)}} \text{ et } \textbf{\textit{8.c)}} : \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}([|T_n - \theta| > \varepsilon]) \leqslant \frac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2}.}$$

□

b) Établir l'inégalité :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}([\theta \in [T_n - \varepsilon,\ T_n + \varepsilon]]) \ \geqslant\ 1 - \frac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- D'après la question précédente :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}([|T_n - \theta| > \varepsilon]) & \leqslant & \dfrac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2} \\
\shortparallel & & \\
1 - \mathbb{P}([|T_n - \theta| \leqslant \varepsilon]) & &
\end{array}
$$

D'où :

$$-\mathbb{P}([|T_n - \theta| \leqslant \varepsilon]) \ \leqslant\ -1 + \frac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}([|T_n - \theta| \leqslant \varepsilon]) \ \geqslant\ 1 - \frac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([|T_n - \theta| \leqslant \varepsilon]) &= \mathbb{P}([-\varepsilon \leqslant T_n - \theta \leqslant \varepsilon]) \\ &= \mathbb{P}([-T_n - \varepsilon \leqslant -\theta \leqslant -T_n + \varepsilon]) \\ &= \mathbb{P}([T_n + \varepsilon \geqslant \theta \geqslant T_n - \varepsilon])\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}([\theta \in [T_n - \varepsilon,\ T_n + \varepsilon]]) \geqslant 1 - \frac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2}.}$$

□

c) En utilisant le fait que $\theta \leqslant \dfrac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsque l'on choisit $n = 1000$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}([\theta \in [T_n - \varepsilon,\ T_n + \varepsilon]]) \geqslant 1 - \frac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2}$$

- Pour que $[T_n - \varepsilon,\ T_n + \varepsilon]$ soit un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance 90%, il suffit de choisir ε tel que :

$$1 - \frac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2} \geqslant 0,9$$

- Or :

comme	$\theta \ \leqslant\ \dfrac{1}{2}$	
alors	$\theta^2 \ \leqslant\ \dfrac{1}{4}$	*(par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, car $\theta > 0$)*
donc	$-\dfrac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2} \ \geqslant\ -\dfrac{1}{4\,n\,\varepsilon^2}$	
d'où	$1 - \dfrac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2} \ \geqslant\ 1 - \dfrac{1}{4\,n\,\varepsilon^2}$	

Ainsi, pour trouver un réel ε qui convient, il suffit de trouver un réel ε tel que :

$$1 - \frac{1}{4\,n\,\varepsilon^2} \ \geqslant\ 0,9$$

Si c'est le cas, on obtient par transitivité :

$$1 - \frac{\theta^2}{n\,\varepsilon^2} \ \geqslant\ 1 - \frac{1}{4\,n\,\varepsilon^2} \ \geqslant\ 0,9$$

- Raisonnons par équivalence pour trouver ε :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{4\,n\,\varepsilon^2} \geqslant 0,9 \quad & \Leftrightarrow \quad 0,1 \geqslant \frac{1}{4\,n\,\varepsilon^2} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10} \geqslant \frac{1}{4\,n\,\varepsilon^2} \\
& \Leftrightarrow \quad 10 \leqslant 4\,n\,\varepsilon^2 && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{10}{4\,n} \leqslant \varepsilon^2 && \textit{(car } 4\,n > 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{5}{2\,n}} \leqslant \varepsilon && \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)}
\end{aligned}$$

On choisit donc : $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{5}{2\,n}}$.

- De plus, comme $n = 1000$:

$$\varepsilon \;=\; \sqrt{\frac{5}{2 \times 1000}} \;=\; \sqrt{\frac{1}{2 \times 200}} \;=\; \sqrt{\frac{1}{400}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{400}} \;=\; \frac{1}{20}$$

On en déduit que $\left[T_n - \dfrac{1}{20}, T_n + \dfrac{1}{20}\right]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance 90%.

□