HEC 2018

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et : $\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$: $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}}$

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le spectre de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{0_{\mathbb{R}}\}}$$

- Raisonnons par l'absurde. On suppose que la matrice M est diagonalisable.
  Alors il existe $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale contenant les valeurs propres de M telles que $M = PDP^{-1}$.
  Or $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$. Donc :

$$M \ = \ PDP^{-1} \ = \ P\, 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}\, P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

  ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation ou d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

× montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,

× montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.

□

b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{rg}(M) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

  La famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée de 2 vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{rg}(M) = 2.}$$

- Ensuite :

$$M^2 \;=\; M \times M \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(M^2) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{rg}(M^2) = 1.}$$

□

c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

Démonstration.
On cherche à déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3$ tel que $P(X) = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d$ est un polynôme annulateur de M.
(insistons sur l'hypothèse $a \neq 0$: elle est nécessaire car on cherche les polynômes annulateurs de degré 3)

- On a déjà calculé M^2. Calculons maintenant M^3.

$$M^3 \;=\; M \times M^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

- Ainsi, P est un polynôme annulateur de M si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& P(M) = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\
\Leftrightarrow \quad & a \cdot M^3 + b \cdot M^2 + c \cdot M + d \cdot I_4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\
\Leftrightarrow \quad & a \cdot 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\
\Leftrightarrow \quad & \{ b = c = d = 0
\end{aligned}$$

- On obtient donc que l'ensemble des polynômes annulateurs de M de degré 3 est :

$$\{\, a \cdot X^3 + b \cdot X^2 + c \cdot X + d \mid a \in \mathbb{R}^* \;\text{ et }\; b = c = d = 0\} \;=\; \{a \cdot X^3 \mid a \in \mathbb{R}^*\}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \{a \cdot X^3 \mid a \in \mathbb{R}^*\} \text{ est l'ensemble des polynômes annulateurs de } M \text{ de degré égal à } 3.}$$

□

2. Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang :

$$F_j = \text{Im}(f^j) \quad \text{et} \quad r_j = \dim(F_j)$$

Pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j, c'est à dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x \in F_j,\ g_j(x) = f(x)$.

a) Calculer r_0 et r_n.

Démonstration.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Tout d'abord : $r_0 = \text{rg}(f^0) = \text{rg}(\text{id}_{\mathbb{R}^n})$.
  Or $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) = I_n$. De plus : $\text{rg}(I_n) = n$.

  $\boxed{\text{On en conclut : } r_0 = n.}$

- Ensuite, d'après l'énoncé : $r_n = \text{rg}(f^n) = \text{rg}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)})$.
  Or $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. De plus : $\text{rg}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}) = 0$.

  $\boxed{\text{On en conclut : } r_n = 0.}$ □

b) Soit $j \in [\![0,n-1]\!]$.

(i) Déterminer le rang de g_j.

Démonstration.
Dans la suite, on note $f_{|F_j}$ la restriction de f à l'ensemble F_j.
Le but de la question est de déterminer : $\text{rg}(g_j) = \dim(\text{Im}(g_j))$.

- Tout d'abord :

$$\text{Im}(g_j) \ = \ \text{Im}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ f(F_j)$$

Commentaire

- Considérons une application f d'un ensemble E vers un ensemble F et notons $A \subset E$. Rappelons que $f(A)$, image de l'ensemble A par l'application f est définie par :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \in F \mid x \in E\} \end{aligned}$$

- Ici, comme f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$$f(F_j) \ = \ \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in F_j, y = f(x)\} \ = \ \{f(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in F_j\}$$

- Ainsi, par définition de F_j : $f(F_j) \ = \ f\big(\text{Im}(f^j)\big)$.
- Démontrons alors : $f\big(\text{Im}(f^j)\big) \ = \ \text{Im}\left(f^{j+1}\right)$.

$$\begin{aligned} f\big(\text{Im}\left(f^j\right)\big) &= \{f(v) \in \mathbb{R}^n \mid v \in \text{Im}\left(f^j\right)\} \\ &= \{f(v) \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}^n,\ v = f^j(u)\} && \textit{(par définition de } \text{Im}\left(f^j\right)\textit{)} \\ &= \{f\big(f^j(u)\big) \in \mathbb{R}^n \mid u \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{f^{j+1}(u) \in \mathbb{R}^n \mid u \in \mathbb{R}^n\} \ = \ \text{Im}\left(f^{j+1}\right) \end{aligned}$$

En combinant tous ces résultats, on obtient :

$$\text{Im}(g_j) \ = \ \text{Im}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ f(F_j) \ = \ f\big(\text{Im}(f^j)\big) \ = \ \text{Im}\left(f^{j+1}\right) \ = \ F_{j+1}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \text{rg}(g_j) = \dim(\text{Im}(g_j)) = \dim(F_{j+1}) = r_{j+1}.}$$

Commentaire

- Au vu de l'énoncé, il est difficile de comprendre le niveau de connaissance attendu sur la notion de restriction. La restriction d'une application f à un ensemble A est généralement introduite en première année lors du chapitre *Ensembles et applications*. Cependant, lorsque l'on se réfère au programme officiel ECE, on ne voit pas apparaître le terme *restriction* dans ce chapitre. Il convient donc de détailler certains points de la démonstration précédente.
- Commençons par définir la notion de restriction.
  On considère une application f d'un ensemble E vers un ensemble F.
  La **restriction** de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :
  $$f_{|A} \; : \; \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$
  Autrement dit, $f_{|A}$ est l'application définie par : $\forall x \in A, \ f_{|A}(x) \ = \ f(x)$.
- On a alors : $\boxed{\mathrm{Im}\,(f_{|A}) = f(A)}$ où $f(A)$ est l'image de l'ensemble A par l'application f :
  $$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}\,(f_{|A}) & = & \{y \in F \mid \exists x \in A, \ y = f_{|A}(x)\} & \\ & = & \{y \in F \mid \exists x \in A, \ y = f(x)\} & \textit{(par définition de } f_{|A}\textit{)} \\ & = & f(A) & \end{array}$$

$\square$

(ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

Démonstration.

- On applique le théorème du rang à l'application linéaire g_j (on rappelle : $g_j \in \mathscr{L}(F_j, \mathbb{R}^n)$).
  $$\begin{array}{ccccc} \dim(F_j) & = & \dim(\mathrm{Ker}(g_j)) & + & \mathrm{rg}(g_j) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ r_j & & & & r_{j+1} \end{array}$$
  On en déduit : $r_j - r_{j+1} \ = \ \dim(\mathrm{Ker}(g_j))$.
- Rappelons : $g_j \ = \ f_{|F_j}$. Montrons alors : $\mathrm{Ker}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$.
  Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
  $$\begin{array}{rcl} x \in \mathrm{Ker}\left(f_{|F_j}\right) & \Leftrightarrow & x \in F_j \ \texttt{ET} \ f_{|F_j}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in F_j \ \texttt{ET} \ f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in F_j \ \texttt{ET} \ x \in \mathrm{Ker}(f) \\ & \Leftrightarrow & x \in F_j \cap \mathrm{Ker}(f) \end{array}$$
  On a bien : $\mathrm{Ker}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j).}$$

Commentaire

Cette question illustre une autre propriété classique sur les restrictions d'une application à un ensemble. Si on considère, comme dans la remarque précédente, une application linéaire f d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F et $A \subset E$, on pourra retenir :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f_{|A}) = f(A)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Ker}\,(f_{|A}) = \mathrm{Ker}(f) \cap A}$$

$\square$

c) Établir les inégalités : $n \geqslant r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} - r_n \geqslant 0$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

- On veut montrer : $r_j - r_{j+1} \geqslant r_{j+1} - r_{j+2}$.
  - Or, d'après la question précédente :
  $$r_j - r_{j+1} \geqslant r_{j+1} - r_{j+2} \;\Leftrightarrow\; \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1})$$
  - L'inégalité des dimensions peut être obtenue en démontrant :
  $$\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$$
  Cette inclusion peut elle-même être obtenue en démontrant :
  $$F_{j+1} \subset F_j$$
  car il suffit alors de réaliser l'intersection, de part et d'autre, par $\mathrm{Ker}(f)$.
  - Démontrons : $F_{j+1} \subset F_j$.
  Par définition de F_j et F_{j+1}, il s'agit de démontrer : $\mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right) \subset \mathrm{Im}\left(f^j\right)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :
  $$y \;=\; f^{j+1}(x) \;=\; f^j(f(x))$$
  En notant $z = f(x)$, on obtient $y = f^j(z) \in \mathrm{Im}(f^j)$.
  $$\boxed{\text{Finalement : } F_{j+1} \subset F_j.}$$
  - On obtient donc : $\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1} \;\subset\; \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$.
  Puis : $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1}) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } j \in [\![0, n-1]\!],\ r_{j+1} - r_{j+2} \leqslant r_j - r_{j+1}\text{. Autrement dit :}\\ r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_{n-1} - r_n\end{array}}$$

- D'après la question ***2.a)*** : $r_0 = n$.
  Or $r_1 = \dim(F_1) \geqslant 0$ car une dimension est un entier positif.
  $$\boxed{\text{On en déduit : } r_0 - r_1 \leqslant n.}$$
- Toujours d'après la question ***2.a)***, $r_n = 0$: $r_{n-1} - r_n = r_{n-1} - 0 \geqslant 0$.
  $$\boxed{r_{n-1} - r_n \geqslant 0}$$

□

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini H, noté $\mathrm{Card}(H)$, est le nombre de ses éléments.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des k-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'entiers naturels tels que :
$$\sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k$$
c'est à dire : $P(k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = k\}$.
On pose $p(k) = \mathrm{Card}\left(P(k)\right)$.

Commentaire

On ne peut noter $\mathrm{Card}\left(P(k)\right)$ que si l'ensemble $P(k)$ est fini. C'est le cas : si l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k$ est vérifiée, alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x_i \in [\![0, k]\!]$ (s'il existe i_0 tel que $x_{i_0} > k$ alors $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i \geqslant i_0\ x_{i_0} > k$). Ainsi, $P(k) \subset [\![0, k]\!]^k$ et comme $[\![0, k]\!]^k$ est un ensemble fini (de cardinal $(k+1)^k$), $P(k)$ est aussi fini (de cardinal inférieur ou égal à $(k+1)^k$).

3. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose : $x_i = \text{Card}\left(\{j \in [\![0,n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}\right) \quad (*)$.

a) Montrer que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un élément de $P(n)$.

Démonstration.
Tout d'abord, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in \mathbb{N}$ car x_i est le cardinal d'un ensemble.
Par définition de $P(n)$, il reste à démontrer l'égalité : $\sum\limits_{i=1}^{n} i\ x_i \ = \ n$.
Considérons alors la quantité $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1})$. Il y a deux manières de procéder à son calcul.

- Par télescopage :

$$\sum_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \ = \ r_0 - r_n \ = \ n - 0 \ = \ n \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

- Par sommation par paquets :
  D'après la question précédente : $\forall j \in [\![0,n-1]\!]$, $r_j - r_{j+1} \in [\![0,n]\!]$.
  L'idée est alors de regrouper les écarts $r_j - r_{j+1}$ suivant leurs valeurs.
  On note alors, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$: $I_i = \{j \in [\![0,n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}$.

$$\begin{array}{rlcccccl}
 & \sum\limits_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) & & & & & & \\
= & \sum\limits_{\substack{j=0 \\ j \in I_0}}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) & + & \sum\limits_{\substack{j=0 \\ j \in I_1}}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) & + & \dots & + & \sum\limits_{\substack{j=0 \\ j \in I_n}}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \\
= & \sum\limits_{\substack{j=0 \\ j \in I_0}}^{n-1} 0 & + & \sum\limits_{\substack{j=0 \\ j \in I_1}}^{n-1} 1 & + & \dots & + & \sum\limits_{\substack{j=0 \\ j \in I_n}}^{n-1} n \qquad \textit{(par définition des ensembles } I_i\textit{)} \\
= & 0 \times \text{Card}(I_0) & + & 1 \times \text{Card}(I_1) & + & \dots & + & n \times \text{Card}(I_n) \\
= & 0 & + & 1 \times x_1 & + & \dots & + & n \times x_n \qquad \textit{(par définition des nombres } x_i\textit{)} \\
= & \sum\limits_{i=0}^{n} i\ x_i & & & & & &
\end{array}$$

Les deux méthodes de calcul aboutissant évidemment au même résultat, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} i\ x_i \ = \ n$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (x_1, \dots, x_n) \text{ est bien un élément de } P(n).}$$

Commentaire

Cette démonstration semble un peu sortie du chapeau. Pour comprendre sa provenance, il faut analyser de plus près la quantité $\sum\limits_{i=1}^{n} i\ x_i$. Par définition, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \text{Card}\big(\{j \in [\![0,n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}\big)$. Ainsi, x_i est le nombre d'indices $j \in [\![0,n-1]\!]$ pour lesquels l'écart $r_j - r_{j+1}$ vaut i. En calculant $i\ x_i$, on multiplie l'écart i par le nombre de fois pour lequel il est réalisé. Ainsi, en calculant la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} i\ x_i$, on obtient la mesure de tous les écarts $r_j - r_{j+1}$ pour j variant dans $[\![0,n-1]\!]$.
Ce qui revient à calculer : $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1})$.

□

b) Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

(i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Démonstration.

- Soit $j \in [\![0, 4]\!]$. Comme M est la matrice représentative de f dans la base canonique :

$$r_j \;=\; \text{rg}\left(f^j\right) \;=\; \text{rg}\left(M^j\right)$$

- D'après la question ***2.a)*** : $r_0 = 4$ et $r_4 = 0$.
  D'après les calculs en ***1.b)*** et ***1.c)*** :

$$r_1 = \text{rg}(M) = 2, \qquad r_2 = \text{rg}\left(M^2\right) = 1, \qquad r_3 = \text{rg}\left(M^3\right) = \text{rg}\left(0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}\right) = 0$$

Ainsi : $r_0 - r_1 = 2$, $r_1 - r_2 = 1$, $r_2 - r_3 = 1$ et $r_3 - r_4 = 0$.
Et $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

□

(ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

Démonstration.
Par définition : $P(4) \;=\; \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 \mid x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 = 4\}$.
Il s'agit donc de trouver les 4-uplets d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que :

$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 = 4$$

Deux cas se présentent.

- Si $x_4 = 1$ alors $x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 0$.
  Cette somme nulle étant constituée de nombres positifs, on en déduit :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

  Et ainsi, le seul 4-uplet (x_1, x_2, x_3, x_4) élément de $P(4)$ tel que $x_4 = 0$ est : $(0, 0, 0, 1)$.
- Si $x_4 \neq 1$ alors on a forcément $x_4 = 0$. Sinon, comme $x_4 \in \mathbb{N}$ on aurait $x_4 \geqslant 2$ et ainsi :

$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 \geqslant 4\,x_4 \geqslant 8 > 6$$

  ce qui est impossible.
  Deux nouveaux cas se présentent.
  × Si $x_3 = 1$ alors $x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 = x_1 + 2\,x_2 + 3 = 4$ donc $x_1 + 2\,x_2 = 1$.
  On a alors forcément $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$ (sinon cette somme dépasserait 2).
  Et ainsi, le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(1, 0, 1, 0)$.
  × Si $x_3 \neq 1$ alors $x_3 = 0$ sinon on aurait $x_3 \geqslant 2$ et $x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 \geqslant 3\,x_3 \geqslant 6 > 4$.
  Trois nouveaux cas se présentent :
    - Si $x_2 = 2$ alors $x_1 = 0$.
      Et le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(0, 2, 0, 0)$.
    - Si $x_2 = 1$ alors $x_1 = 2$.
      Et le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(2, 1, 0, 0)$.
    - Si $x_2 \notin \{1, 2\}$ alors $x_2 = 0$ sinon $x_2 \geqslant 3$ et $x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 \geqslant 2\,x_2 \geqslant 6 > 4$.
      Et le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(4, 0, 0, 0)$.

Finalement, $P(4) = \{(0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (4, 0, 0, 0)\}$ et
$p(4) = \text{Card}(P(4)) = 5$.

□

(iii) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $(*)$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$:

$$r_0 = \text{rg}(f^0) = \text{rg}(\text{id}_{\mathbb{R}^4}) = 4$$

Il s'agit alors, pour chaque 4-uplet (x_1, x_2, x_3, x_4) de $P(4)$, d'exhiber un endomorphisme f ayant les caractéristiques de ce 4-uplet. Étudions tous les cas qui se présentent.

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \rightarrow & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^1) = 0 \\ r_2 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^2) = 0 \\ r_3 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

  Comme $\text{rg}(f) = 0$ alors f est l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$. Cet endomorphisme réalise bien les conditions précisées.

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \rightarrow & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 1 & \rightarrow & \text{rg}(f^1) = 1 \\ r_2 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^2) = 0 \\ r_3 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

  On cherche donc un endomorphisme f de rang 1 tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$. On peut (par exemple) proposer l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\text{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \rightarrow & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 2 & \rightarrow & \text{rg}(f^1) = 2 \\ r_2 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^2) = 0 \\ r_3 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \rightarrow & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

  On cherche donc un endomorphisme f de rang 2 tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$. On peut alors proposer l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\text{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \to & \mathrm{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 2 & \to & \mathrm{rg}(f^1) = 2 \\ r_2 = 1 & \to & \mathrm{rg}(f^2) = 1 \\ r_3 = 0 & \to & \mathrm{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \to & \mathrm{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

On cherche donc un endomorphisme f de rang 2 tel que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$ et $\mathrm{rg}(f^2) = 1$. D'après la question ***1.***, on peut alors proposer l'endomorphisme fourni par l'énoncé, dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 0, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \to & \mathrm{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 3 & \to & \mathrm{rg}(f^1) = 3 \\ r_2 = 2 & \to & \mathrm{rg}(f^2) = 2 \\ r_3 = 1 & \to & \mathrm{rg}(f^3) = 1 \\ r_4 = 0 & \to & \mathrm{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

On cherche donc un endomorphisme f dont le rang décroît de 1 à chaque fois nouvelle composition avec lui-même.

$$M = \mathrm{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, dans ce cas on a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4), \text{ il existe bien } f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4) \text{ vérifiant } (*).}$$

Commentaire

Cette dernière matrice (dont tous les coefficients sont nuls hormis sur la « surdiagonale » dont les coefficients sont tous des 1) est plutôt classique. Les puissances successives ont pour effet de décaler cette « surdiagonale » vers le haut.

□

4. Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose : $Q(\ell, k) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k) \mid x_1+x_2+\dots+x_k \leqslant \ell\}$ et $q(\ell, k) = \text{Card}(Q(\ell, k))$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{array}{rcl} Q(1,k) & = & \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_k \leqslant 1\} \\ & = & \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k \ \texttt{ ET } \ x_1 + x_2 + \dots + x_k \leqslant 1\} \end{array}$$

- Comme les éléments x_i sont des entiers naturels, l'inégalité $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leqslant 1$ n'est vérifiée que si au plus un élément x_{i_0} est non nul (égal alors à 1).
- Dans ce cas, on obtient $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = i_0$.
  L'égalité $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k$ est alors vérifiée si et seulement si $i_0 = k$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} Q(1,k) & = & \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k) \mid x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = 0 \ \texttt{ ET } \ x_k = 1\} \\ & = & \{(0, \dots, 0, 1)\} \end{array}$$

$$\boxed{Q(1,k) = \{(0, \dots, 0, 1)\}}$$ □

(ii) Pour tout entier $\ell \geqslant k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

Démonstration.
Soit $\ell \geqslant k$. On procède par double inclusion.

($\subset$) $Q(\ell, k) \subset P(k)$ par définition.

($\supset$) Soit $(x_1, \dots, x_k) \in P(k)$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k$.
Or, comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $x_i \ \leqslant \ i\ x_i$ on a, par sommation :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \ \leqslant \ \sum_{i=1}^{k} i\ x_i \ = \ k$$

Et comme $k \leqslant \ell$, on obtient par transitivité : $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \ \leqslant \ \ell$.
On en déduit que $(x_1, \dots, x_k)$ est un élément de $Q(\ell, k)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } Q(\ell, k) = P(k).}$$ □

b) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geqslant 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k - \ell) = \text{Card}\big(\{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_k = \ell\}\big)$$

Démonstration.
Soit $(\ell, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k > \ell \geqslant 2$.

- Dans la suite, nous notons :

$$\begin{array}{rcl} R(\ell,k) & = & \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_k = \ell\} \\ & = & \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k \ \texttt{ ET } \ x_1 + \dots + x_k = \ell\} \end{array}$$

- Par définition :

$$\begin{array}{rcl} Q(\ell, k-\ell) & = & \{(x_1, \ldots, x_{k-\ell}) \in P(k-\ell) \mid x_1 + \ldots + x_{k-\ell} \leqslant \ell\} \\ & = & \{(x_1, \ldots, x_{k-\ell}) \in \mathbb{N}^{k-\ell} \mid \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} i\ x_i = k-\ell \ \texttt{ ET } \ x_1 + \ldots + x_{k-\ell} \leqslant \ell\} \end{array}$$

Le but de la question est de démontrer : $\text{Card}\big(R(\ell,k)\big) = \text{Card}\big(Q(\ell,k-\ell)\big)$.
Visiblement, ces ensembles ne sont pas égaux ($R(\ell,k) \subset \mathbb{N}^k$ et $Q(\ell,k-\ell) \subset N^{k-\ell}$).
Ainsi, pour démontrer qu'ils ont même cardinal, il faut démontrer qu'il existe une bijection de $Q(\ell,k-\ell)$ sur $R(\ell,k)$. Exhibons cette bijection.

- Considérons tout d'abord un élément $(x_1, \ldots, x_{k-\ell}) \in Q(\ell, k-\ell)$. Alors :

$$x_1 + \ldots + x_{k-\ell} \leqslant \ell$$

En ajoutant à cette somme son écart à ℓ, on obtient :

$$\left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + x_1 + \ldots + x_{k-\ell} \ = \ \ell$$

Notons alors :

$$\left|\begin{array}{rcl} y_1 & = & \ell - \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_i \\ y_2 & = & x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k-\ell+1} & = & x_{k-\ell} \\ \forall i \in [\![k-\ell+2, k]\!],\ y_i & = & 0 \end{array}\right.$$

Par définition des éléments y_i, on a les propriétés suivantes.

(1) Tout d'abord :

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \ = \ \left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + x_1 + \ldots + x_{k-\ell} + 0 \ = \ \ell$$

(2) Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=1}^{k} i\ y_i & = & y_1 + \left(\sum\limits_{i=2}^{k-\ell+1} i\ y_i\right) + \cancel{\sum\limits_{k-\ell+2}^{k} i\ y_i} & \textit{(rappelons que pour } i \geqslant k-\ell+2,\ y_i = 0\textit{)} \\ & = & \left(\ell - \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + \sum\limits_{i=2}^{k-\ell+1} i\ x_{i-1} & \textit{(par définition des } y_i\textit{)} \\ & = & \left(\ell - \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} (i+1)\ x_i & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \ell + \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} \big((i+\cancel{1}) - \cancel{1}\big)\ x_i & \\ & = & \ell + \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} i\ x_i \ = \ \cancel{\ell} + (k - \cancel{\ell}) \ = \ k & \end{array}$$

Ainsi, $(y_1, \ldots, y_k) \in R(\ell, k)$. On a donc construit une application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi \ : & Q(\ell, k-\ell) & \to & R(\ell, k) \\ & (x_1, \ldots, x_{k-\ell}) & \mapsto & (y_1, \ldots, y_k) = \left(\ell - \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_i, x_1, \ldots, x_{k-\ell}, 0, \ldots, 0\right) \end{array}$$

- Inversement, considérons $(x_1, \ldots, x_k) \in R(\ell, k)$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \ell \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k$$

On obtient, par différence : $\sum\limits_{i=2}^{k} (i-1)\ x_i = k - \ell$.
(cette somme commence à 2 car $(i-1)\ x_i = 0$ si $i = 1$)
Ainsi, par décalage d'indice : $\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\ x_{i+1} = k - \ell$, ce qu'on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_{i+1} \ + \sum_{i=k-\ell+1}^{k-1} i\ x_{i+1} \ = \ k - \ell$$

On déduit de cette égalité : $\forall i \in [\![k-\ell+1, k]\!],\ x_{i+1} = 0 \qquad (*)$
(s'il existe $i_0 \in [\![k-\ell+1, k]\!]$ tel que $x_{i_0+1} \neq 0$ alors $\sum\limits_{i=k-\ell+1}^{k-1} i\ x_{i+1} \geqslant i_0\ x_{i_0+1} \geqslant i_0 > k-\ell+1$)
Notons alors :

$$\left| \begin{array}{rcl} y_1 & = & x_2 \\ y_2 & = & x_3 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k-\ell} & = & x_{k-\ell+1} \\ \forall i \in [\![k-\ell+2, k]\!],\ y_i & = & 0 \end{array} \right.$$

Par définition des y_i, on a les propriétés suivantes.
(1) Tout d'abord :

$$\sum_{i=1}^{k-\ell} i\ y_i \ = \ \sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_{i+1} \ = \ k - \ell$$

(2) Ensuite, comme $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \ell$ alors :

$$\begin{array}{rlcll} & x_1 + \left(\sum\limits_{i=2}^{k-\ell+1} x_i \right) + \left(\sum\limits_{i=k-\ell+2}^{k} x_i \right) & = & \ell & \\ \text{donc} & x_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_{i+1} \right) + \left(\sum\limits_{i=k-\ell+1}^{k-1} x_{i+1} \right) & = & \ell & \textit{(par décalage d'indice)} \\ \text{enfin} & x_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k-\ell} y_i \right) + \left(\cancel{\sum\limits_{i=k-\ell+1}^{k-1} x_{i+1}} \right) & = & \ell & \textit{(d'après la proposition } (*)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{k-\ell} y_i \ = \ \ell - x_1 \ \leqslant \ \ell$.

Ainsi, $(y_1, \ldots, y_{k-\ell}) \in Q(\ell, k-\ell)$. On a donc construit une application :

$$\psi \ : \ \begin{array}{ccl} R(\ell, k) & \to & Q(\ell, k-\ell) \\ (x_1, \ldots, x_k) & \mapsto & (y_1, \ldots, y_{k-\ell}) = (x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}) \end{array}$$

- On peut alors démontrer : $\boxed{\varphi \circ \psi \ = \ \mathrm{id}_{R(\ell,k)}}$

  En effet, si $(x_1, \ldots, x_k) \in R(\ell, k)$ alors :

$$\begin{array}{rcll}
\varphi(\psi(x_1,\ldots,x_k)) & = & \varphi(x_2,\ldots,x_{k-\ell+1}) & \\
& = & (\ell - (x_2 + \ldots + x_{k-\ell+1}), x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}, 0, \ldots, 0) & \\
& = & \left(\cancel{\ell} - \left(\cancel{\sum\limits_{i=1}^{k-\ell+1}} x_i - x_1\right), x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}, 0, \ldots, 0\right) & \textit{(car } \sum\limits_{i=1}^{k-\ell+1} x_i = \ell\textit{)} \\
& = & (x_1, x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}, 0, \ldots, 0) & \\
& = & (x_1, x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}, x_{k-\ell+2}, \ldots, x_k) & \textit{(pour } i \in [\![k-\ell+2, k]\!], \\
& & & \textit{on a : } x_i = 0\textit{)} \\
& = & (x_1, \ldots, x_k) &
\end{array}$$

- On démontre de même : $\boxed{\psi \circ \varphi \ = \ \mathrm{id}_{Q(\ell,k-\ell)}}$

On en déduit que φ et ψ sont des applications bijectives, réciproques l'une de l'autre.
Ainsi, on a bien : $\mathrm{Card}\big(Q(\ell, k-\ell)\big) = \mathrm{Card}\big(R(\ell,k)\big)$, ce qui était l'objectif de la question.

Commentaire

- Dans la démonstration, on a explicité φ, bijection entre $Q(\ell, k-\ell)$ et $R(\ell, k)$ ainsi que sa bijection réciproque ψ. Expliciter ses deux applications permet de bien comprendre les mécanismes en jeu. Cependant, on pouvait présenter les choses différemment en exhibant seulement l'une des ces deux applications et en démontrant qu'elle réalise une bijection (de $Q(\ell, k-\ell)$ sur $R(\ell, k)$ ou inversement).

Par ailleurs, on est en droit de s'interroger sur la pertinence d'une telle question.

- Notons tout d'abord que la notion de dénombrement est souvent abordée lors du chapitre de première année *Probabilités sur un univers fini* et particulièrement lors de l'étude des coefficients binomiaux. Cependant, le terme « dénombrement » n'apparaît pas dans le programme officiel. La notion de cardinal (et la notation associée Card) d'un ensemble fini est elle aussi absente du programme officiel.
- Si chaque étape de la démonstration est à portée d'un bon élève de classe ECE, la prise d'initiative est beaucoup trop importante pour espérer qu'un élève en vienne à bout. Un découpage en sous-questions aurait permis de rendre cette question accessible, au moins en partie. Ce n'est cependant pas le choix fait dans l'énoncé. Cette question n'a donc pas le rôle discriminant qu'ont généralement les questions de concours : classer les élèves selon s'ils ont traité de manière satisfaisante ou non la question.

La présence d'une telle question permet de comprendre la stratégie à adopter lors des concours :

- il est essentiel de savoir repérer les questions les plus difficiles. Elles permettent de discriminer les candidats puisqu'il faut avoir du recul pour juger du niveau d'une question.
- il faut aborder ces questions en ayant en tête que le correcteur sera plus indulgent pour les candidats qui s'y aventurent. Cependant, il ne faut pas perdre du temps à essayer de les traiter jusqu'au bout : le nombre de points alloués ne sera certainement pas à hauteur du temps investi pour traiter une telle question.

Il ne faut donc pas hésiter à passer les questions les plus difficiles et aller chercher les points où ils sont, à savoir sur les questions plus abordables du sujet. □

c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

(i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.

Démonstration.
Soit k entier tel que $k > \ell$.

- Rappelons tout d'abord :

$$Q(\ell, k) \; = \; \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \ldots + x_k \leqslant \ell\}$$

- Si u est un entier naturel, alors :

$$\begin{aligned} u \leqslant \ell \; & \Leftrightarrow \; u = \ell \quad \texttt{OU} \quad u < \ell \\ & \Leftrightarrow \; u = \ell \quad \texttt{OU} \quad u \leqslant \ell - 1 \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Q(\ell, k) \; = & \quad \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \ldots + x_k = \ell\} \\ & \cup \; \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \ldots + x_k \leqslant \ell - 1\} \\ = & \; R(\ell, k) \quad \cup \quad Q(\ell - 1, k) \end{aligned}$$

Ces deux ensembles étant disjoints, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Card}\big(Q(\ell, k)\big) \; & = \; \text{Card}\big(R(\ell, k)\big) \; + \; \text{Card}\big(Q(\ell - 1, k)\big) \\ & = \; q(\ell, k - \ell) \; + \; q(\ell - 1, k) \qquad \textit{(d'après la question précédente avec } k > \ell \geqslant 2\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k > \ell, \; q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell).}$$

□

(ii) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell)$?

Démonstration.

- On reprend la démonstration précédente :

$$\begin{aligned} Q(\ell, \ell) \; = & \quad \{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \ldots + x_\ell = \ell\} \\ & \cup \; \{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \ldots + x_\ell \leqslant \ell - 1\} \end{aligned}$$

Le deuxième ensemble n'est autre que $Q(\ell - 1, \ell)$.

- Intéressons-nous au premier ensemble.
Soit $(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell$ et $x_1 + \ldots + x_\ell = \ell$. Alors, par différence :

$$\sum_{i=2}^{\ell} (i - 1)\ x_i = 0 \qquad \textit{(la somme commence à 2 car } i - 1 = 0 \textit{ lorsque } i = 1\textit{)}$$

Cette somme nulle étant constituée de nombres positifs, on en déduit :

$$x_2 = \ldots = x_\ell = 0$$

Comme $\sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell$, on obtient $x_1 = \ell$. On en déduit :

$$\{(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \ldots + x_\ell = \ell\} \ = \ \{(\ell, 0, \ldots, 0)\}$$

Comme $(\ell, 0, \ldots, 0)$ n'est pas un élément de $Q(\ell-1, \ell)$ (car $\ell + 0 + \ldots + 0 = \ell > \ell - 1$), on a écrit $Q(\ell, \ell)$ comme réunion de deux ensembles disjoints.

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcccc} \text{Card}\big(Q(\ell,\ell)\big) & = & \text{Card}\big(Q(\ell-1,\ell)\big) & + & \text{Card}\big(\{(\ell,0,\ldots,0)\}\big) \\ & = & q(\ell-1,\ell) & + & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } q(\ell,\ell) - q(\ell-1,\ell) = 1.}$$

□

5. La fonction **Scilab** suivante dont le script est incomplet (lignes 5 et 6), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(\ell, k)$.

```
1  function q = qmatrix(n)
2      q = ones(n, n)
3      for L = 2:n
4          for K = 2:n
5              if (K<L) then
6                  q(L,K) = ................
7              elseif (K==L) then
8                  q(L,K) = ..............
9              else
10                 q(L,K) = q(L-1,K) + q(L,K-L)
11             end
12         end
13     end
14 endfunction
```

Commentaire

Dans le sujet original, l'indentation était légèrement différente, notamment en ce qui concerne les structures conditionnelles (pas de saut de ligne après les `then` et `else`). On présente ici le programme avec une indentation plus classique qui correspond à la présentation retenue dans les autres épreuves.

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    2.    2.    3.    3.    4.    4.    5.    5.
    1.    2.    3.    4.    5.    7.    8.   10.   12.
    1.    2.    3.    5.    6.    9.   11.   15.   18.
    1.    2.    3.    5.    7.   10.   13.   18.   23.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   14.   20.   26.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   21.   28.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   29.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   30.
```

a) Compléter les lignes 5 et 6 du script de la fonction `qmatrix`.

Démonstration.
Le but de cette question est d'obtenir la matrice $\big(q(\ell, k)\big)_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$.
Pour ce faire, il faut se servir des résultats précédents.

- D'après la question *4.a)(i)*, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $q(1, k) = 1$.

  $\boxed{\text{On en déduit que la première ligne de la matrice recherchée ne contient que des 1.}}$

- D'après la question *4.a)(ii)*, pour tout entier $\ell \geqslant k$, $q(\ell, k) = p(k) = q(k, k)$. Cette propriété est notamment vérifiée pour $k = 1$. Ainsi :

$$\forall \ell \in [\![1, n]\!], \ q(\ell, 1) = q(1, 1) = 1$$

  $\boxed{\text{On en déduit que la première colonne de la matrice recherchée ne contient que des 1.}}$

- La stratégie du programme consiste à créer initialement une matrice carrée d'ordre `n` remplie de 1 et stockée dans une variable `q`.

```
2        q = ones(n, n)
```

  La première ligne et première colonne de cette matrice est, de fait, constituée de 1.
  Le reste du programme consiste à remplir cette matrice ligne par ligne (de la $2^{\text{ème}}$ à la $n^{\text{ème}}$).
  D'où la présence de la structure itérative suivante :

```
3        for L = 2:n
```

- La ligne ℓ de la matrice est mise à jour en procédant comme suit.

  (1) On met à jour les coefficients à gauche du coefficient diagonal. Autrement dit, les valeurs $q(\ell, k)$ pour $k < \ell$. Pour ce faire, on se sert de nouveau du résultat de la question *4.a)(ii)*, qui stipule que pour $k < \ell$: $q(\ell, k) = p(k) = q(k, k)$. Ce qui se traduit comme suit :

```
4            for K = 2:n
5                if (K<L) then
6                    q(L,K) = q(K,K)
```

  (le coefficient en position (ℓ, k) est donné par la valeur du coefficient diagonal situé dans la même colonne)

  (2) On met alors à jour le coefficient diagonal. Pour ce faire, on se sert du résultat de la question *4.c)(ii)*, qui stipule que pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $q(\ell, \ell) = 1 + q(\ell - 1, \ell)$.
  Ce qui se traduit comme suit :

```
7                elseif (K==L) then
8                    q(L,K) = 1 + q(L-1,L)
```

  (le coefficient en position (ℓ, ℓ) est donné par la valeur du coefficient directement situé au-dessus auquel on ajoute 1)

  (3) On met alors à jour les coefficients à droite du coefficient diagonal.
  Pour ce faire, on se sert du résultat de la question *4.c)(i)*, qui stipule que pour tout $k > \ell$: $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$. Ce qui se traduit comme suit :

```
9                else
10                   q(L,K) = q(L-1,K) + q(L,K-L)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**. □

b) Donner un script **Scilab** permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)(ii)***, on a, pour tout $\ell \geqslant k$: $Q(\ell, k) = P(k)$.
  On a notamment : $Q(n,n) \ = \ P(n)$. Et ainsi :
  $$p(n) \ = \ q(n,n)$$
- Ainsi, $p(n)$ est le coefficient en position (n,n) de la matrice $\big(q(\ell,k)\big)_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$.
  Pour obtenir ce coefficient on écrit un programme :
  (1) qui demande à l'utilisateur d'entrer au clavier une valeur pour n et la stocke dans une variable `n`.
  (2) qui génère la matrice `q` à l'aide de la fonction de la question précédente.
  (3) qui affiche la valeur contenu dans la variable `n`.
  On obtient le programme **Scilab** suivant :

```
n = input('Entrez une valeur entière non nulle n')
q = qmatrix(n)
disp(q(n,n))
```

□

c) Conjecturer une formule générale pour $q(2,k)$ applicable à tout entier $k \geqslant 1$, puis la démontrer.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. Afin de conjecturer une formule pour $q(2,k)$, on place en regard la valeur de k et les coefficients de la $2^{\text{ème}}$ ligne de la matrice fournie dans l'énoncé.

Valeur de k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur de $q(2,k)$	1	2	2	3	3	4	4	5	5

La parité de k semble jouer un rôle dans la valeur de $q(2,k)$. Plus précisément :

× si k est pair alors on peut conjecturer :
$$q(2,k) \ = \ \frac{k}{2} + 1$$
(si $k = 2$, $\frac{k}{2} + 1 = 2$; si $k = 4$, $\frac{k}{2} + 1 = 3$; si $k = 6$, $\frac{k}{2} + 1 = 4$ ...)

× si k est impair alors on peut conjecturer :
$$q(2,k) \ = \ \frac{k-1}{2} + 1$$
(si $k = 1$, $\frac{k-1}{2} + 1 = 1$; si $k = 3$, $\frac{k-1}{2} + 1 = 2$; si $k = 5$, $\frac{k-1}{2} + 1 = 3$ ...)

Démontrons par récurrence double : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : q(2,k) = \begin{cases} \frac{k}{2}+1 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{k-1}{2}+1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part, d'après la question ***4.a)(ii)*** : $q(2,1) = q(1,1) = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{1-1}{2}+1 = 1$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

- D'une part, d'après la question ***4.c)(ii)*** : $q(2,2) = 1 + q(1,2) = 1+1 = 2$.
- D'autre part : $\dfrac{2}{2}+1 = 2$.

D'où $\mathcal{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$, et démontrons $\mathcal{P}(k+2)$ $\left(\text{i.e. } q(2,k+2) = \begin{cases} \frac{k+2}{2}+1 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{k+1}{2}+1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \right)$.

Comme $k \in \mathbb{N}^*$, $k+2 > 2$. Ainsi, d'après la question ***4.c)(i)*** :

$$\begin{array}{rcccc} q(2,k+2) & = & q(1,k+2) & + & q(2,k) \\ & = & 1 & + & q(2,k) \end{array}$$

Deux cas se présentent :

× si k pair alors $q(2,k) = \frac{k}{2}+1$ et :

$$q(2,k+2) \ = \ 1 + \frac{k}{2} + 1 \ = \ \frac{k+2}{2} + 1$$

× si k impair alors $q(2,k) = \frac{k-1}{2}+1$ et :

$$q(2,k+2) \ = \ 1 + \frac{k-1}{2} + 1 \ = \ \frac{k+1}{2} + 1$$

D'où $\mathcal{P}(k+2)$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par principe de récurrence double : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k).}$$

Commentaire

- La valeur de $q(2,k)$ change tous les 2 rangs. Il est donc assez naturel d'utiliser une récurrence double pour démontrer la conjecture.
- On aurait pu présenter la conjecture à l'aide de la partie entière par défaut $\lfloor . \rfloor$. Par exemple :

$$q(2,k) \ = \ \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$$

On a fait le choix dans la démonstration de ne pas introduire cet opérateur afin de faciliter les manipulations algébriques.

□

Problème

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.
Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est à dire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([X_k = 1]) = p \quad et \quad \mathbb{P}([X_k = 0]) = 1 - p$$

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2,\ \frac{\text{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_k)\mathbb{V}(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & si\ k = \ell \\ r & si\ k \neq \ell \end{cases}$$

1. a) Dans les cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

Démonstration.

(i) Si les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors : $\forall k \neq \ell$, $\text{Cov}(X_k, X_\ell) = 0$.

Or : $\forall k \neq \ell$, $r = \dfrac{\text{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_k)\, \mathbb{V}(X_\ell)}}$.

$$\boxed{\text{Donc } r = 0.}$$

La v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance en tant que somme de v.a.r. discrètes qui en admettent une. On rappelle : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$:

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \Big(p(1-p)\Big) = n\,p\,(1-p)$$

$$\boxed{\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = n\,p\,(1-p)}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes, par stabilité des lois binomiales : } \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

(ii) Si les v.a.r. X_1, ..., X_n sont égales, alors :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \mathbb{V}(X_1)$$

Donc, pour tout $k \neq \ell$:

$$r \ = \ \frac{\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_k)\,\mathbb{V}(X_\ell)}} \ = \ \frac{\mathbb{V}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\,\mathbb{V}(X_1)}} \ = \ \frac{\mathbb{V}(X_1)}{\mathbb{V}(X_1)} \ = \ 1$$

$$\boxed{r = 1}$$

On l'a précisé dans le point précédent : la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance en tant que somme de v.a.r. discrètes qui en admettent une.
Comme les v.a.r. X_1, ..., X_n sont égales :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \ = \ \sum_{k=1}^{n} X_1 \ = \ n\,X_1$$

On en déduit :

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) \ = \ \mathbb{V}(n\,X_1) \ = \ n^2\,\mathbb{V}(X_1) \ = \ n^2\,p\,(1-p)$$

$$\boxed{\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = n^2\,p\,(1-p)}$$

- On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = n\,X_1$.

$$\boxed{\text{Comme } X_1(\Omega) = \{0,1\}, \text{ on obtient : } S_n(\Omega) = \{0,n\}.}$$

- De plus : $\mathbb{P}([S_n = 0]) \ = \ \mathbb{P}([n\,X_1 = 0]) \ = \ \mathbb{P}([X_1 = 0]) \ = \ 1-p$.
  Comme la famille $([S_n = 0]\,, [S_n = n])$ est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}([S_n = n]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([S_n = 0]) \ = \ \cancel{1} - (\cancel{1} - p) \ = \ p$$

$$\boxed{\mathbb{P}([S_n = 0]) = 1-p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([S_n = n]) = p}$$

Commentaire

- Dans le programme ECE, les calculs de covariance ne sont introduits que pour les v.a.r. discrètes. On peut préciser la valeur de la variance d'une somme de v.a.r. discrètes à l'aide de l'opérateur de covariance. Plus précisément, si X_1 et X_2 sont deux v.a.r. **discrètes** qui admettent un moment d'ordre 2, alors $X_1 + X_2$ admet une variance donnée par :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + 2\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_2)$$

  Ce résultat justifie la rédaction « $\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ admet une variance comme somme de v.a.r. **discrètes** qui en admettent une ».
- Le résultat précédent n'est pas donné dans le cas de v.a.r. quelconques. Cela se justifie par le fait que la définition de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ (qui requiert le calcul de l'espérance d'un produit) n'est défini, dans le programme ECE, que dans le cadre de v.a.r. discrètes. Rappelons que si X_1 et X_2 admettent une variance :

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \ = \ \mathbb{E}\big(X_1 X_2\big) - \mathbb{E}\big(X_1 X_2\big)$$

  (par la formule de Kœnig-Huygens, on récupère alors : $\mathrm{Cov}(X_1, X_1) \ = \ \mathbb{V}(X_1)$.

□

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ est donnée par la formule :

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) \;=\; k\,p\,(1-p)\,(1+(k-1)r)$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On l'a déjà précisé : $\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ admet une variance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} p(1-p) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} r\, \sqrt{\mathbb{V}(X_i)\ \mathbb{V}(X_j)} \qquad \textit{(par définition de } r\textit{)} \\
&= k\ p(1-p) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} r\, \sqrt{p(1-p)\ p(1-p)} \\
&= k\ p(1-p) + k(k-1)\ r\ p(1-p)
\end{aligned}$$

En effet : $\mathrm{Card}\Big([\![1,k]\!]^2 \setminus \{(i,j) \in [\![1,k]\!]^2 \mid i = j\}\Big) \;=\; k^2 - k \;=\; k\ (k-1)$.

On obtient bien, en factorisant : $\mathbb{V}\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\Big) \;=\; k\,p\,(1-p)\,(1+(k-1)r)$.

Commentaire

- La formule étant donnée dans l'énoncé, on pouvait procéder par récurrence sur k.
  Pour l'étape d'hérédité, on remarque :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k+1} X_i\right) \;=\; \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1}\right) \;=\; \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) + 2\ \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i,\ X_{k+1}\right) + \mathbb{V}(X_{k+1})$$

- On utilise dans cette question la généralisation, pour k v.a.r. , de la formule donnant la somme d'une variance de v.a.r. discrètes admettant un moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \ 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big)
\end{aligned}$$

  La deuxième égalité se déduit de la première par symétrie de l'opérateur $\mathrm{Cov}(.,.)$.
  Il est conseillé de connaître ces égalités, parfois présentes à l'écrit et fréquemment utilisés à l'oral de mathématiques de `HEC`.

Commentaire

La généralisation de la formule de la variance de la somme n'est pas explicitement donnée dans le programme. Nous donnons ci-dessous sa démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) &= \mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i, \sum_{j=1}^{k} X_j\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Cov}\Big(X_i, \sum_{j=1}^{k} X_j\Big) && \textit{(par linéarité à gauche de l'opérateur } \mathrm{Cov}(.,.)\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big)\Big) && \textit{(par linéarité à droite de l'opérateur } \mathrm{Cov}(.,.)\textit{)} \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant k} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i=j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i\neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_i\big) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i\neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i\neq j}} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big)
\end{aligned}$$

□

c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

Démonstration.
D'après la formule de la question précédente, appliquée avec $k = n$:

$$\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = n\,p\,(1-p)\,(1+(n-1)r)$$

Une variance étant toujours positive : $\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \geqslant 0$.

Ainsi, en multipliant par $\dfrac{1}{n\,p\,(1-p)} > 0$, on obtient :

$$\begin{array}{lrcl}
 & 1+(n-1)\,r & \geqslant & 0 \\
\text{donc} & (n-1)\,r & \geqslant & -1 \\
\text{et ainsi} & r & \geqslant & -\dfrac{1}{n-1} \quad \textit{(car } n-1>0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } r \geqslant -\dfrac{1}{n-1}.}$$

□

2. On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2.

a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p-1)$.

Démonstration.

- Par définition :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}} \\ &= \frac{\mathbb{E}\big(X_1X_2\big) - \mathbb{E}\big(X_1\big)\ \mathbb{E}\big(X_2\big)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}} \\ &= \frac{\mathbb{E}\big(X_1X_2\big) - p^2}{p(1-p)} \qquad \textit{(car } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)\textit{)} \end{aligned}$$

- Les v.a.r. X_i suivant toutes la même loi de Bernoulli, $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
  Ainsi, $\big(X_1X_2\big)\big(\Omega\big) = \{0, 1\}$. Plus précisément, si $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} (X_1X_2)(\omega) = 1 &\Leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega) = 1 \\ &\Leftrightarrow X_1(\omega) = 1 \ \texttt{ET} \ X_2(\omega) = 1 \\ &\Leftrightarrow \omega \in [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \end{aligned}$$

  En notant $u = \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\,\big)$, on obtient : $X_1X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(u)$.

- On en déduit que la v.a.r. X_1X_2 admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}\big(X_1X_2\big) \ = \ u$$

- Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} r = -1 &\Leftrightarrow \frac{u - p^2}{p(1-p)} = -1 \\ &\Leftrightarrow u - p^2 = -p(1-p) \\ &\Leftrightarrow u = p^2 - p(1-p) \\ &\Leftrightarrow u = p\ \big(p - (1-p)\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } r = -1 \ \Leftrightarrow\ \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\,\big) = p\ \big(2p - 1\big).}$$

□

b) Que vaut alors $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\,\big)$?

Démonstration.
On suppose dans cette question : $r = -1$.
Ainsi, d'après la question précédente : $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\,\big) = p\ (2p - 1)$.

- La famille $([X_2 = 0]\,, [X_2 = 1])$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\,\big)$$

  De plus : $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0]\,\big) = 1 - p$ car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

- Il reste alors à déterminer $\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big)$.
  On raisonne alors avec le système complet $([X_1 = 0], [X_1 = 1])$.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)$$

  Ainsi, on en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) & = & \mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) - \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) \\ & = & p - p\,(2p-1) \\ & = & p\,\big(1-(2p-1)\big) = p\,(2-2p) = 2p\,(1-p) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } r = -1, \text{ on a : } \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) = 2p\,(1-p).}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) & = & \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) - \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) \\ & = & (1-p) - 2p\,(1-p) \\ & = & (1-p)\,(1-2p) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } r = -1, \text{ alors } \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) = (1-p)\,(1-2p).}$$

Commentaire

- On a démontré dans cette question :

$$\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big)$$

  En raisonnant de même, on démontre :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big)$$

  Comme X_1 et X_2 suivent la même loi : $\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big)$.
  On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) & = & \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) - \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) \\ & = & \mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) - \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) \\ & = & \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big)}$$

  Cette propriété semble assez naturelle puisque les v.a.r. X_i semblent jouer un rôle symétrique.
  Pour autant, il n'y a pas lieu de l'affirmer sans démonstration.

- Il était aussi possible de faire une démonstration réutilisant la question précédente. Cette démonstration est plus subtile mais utilise des propriétés qu'il convient de maîtriser. On la présente dans la remarque suivante.

Commentaire

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note : $Y_i = 1 - X_i$. Alors : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1-p)$.
  En effet, $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big) & = & \mathbb{P}\big([1 - X_i = 0]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X_i = 1]\big) \ = \ p \\ \mathbb{P}\big([Y_i = 1]\big) & = & 1 - \mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big) \ = \ 1 - p \end{array}$$
  Dans la suite, on note $q = 1 - p$, de sorte que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$.
- Les v.a.r. Y_1 et Y_2 admettent chacune un moment d'ordre 2.
  Ainsi, Y_1 et Y_2 admettent un coefficient de corrélation linéaire. En appliquant le résultat de la question précédente à Y_1, Y_2, on obtient :
$$\begin{array}{rcl} \rho(Y_1, Y_2) = -1 & \Leftrightarrow & \mathbb{P}\big([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]\big) = q\ (2q - 1) \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) = (1-p)\ (2\ (1-p) - 1) \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) = (1-p)\ (1 - 2p) \end{array}$$
- Nous allons maintenant démontrer : $\rho(Y_1, Y_2) = \rho(X_1, X_2)$.
  Remarquons tout d'abord que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
$$\mathbb{V}(Y_i) \ = \ \mathbb{V}(1 - X_i) \ = \ \mathbb{V}(X_i)$$
  Ensuite :
$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) & = & \mathrm{Cov}(1 - X_1, 1 - X_2) & \\ & = & \mathrm{Cov}(1, 1 - X_2) - \mathrm{Cov}(X_1, 1 - X_2) & \textit{(par linéarité à gauche de l'opérateur } \mathrm{Cov}(.,.)\textit{)} \\ & = & \mathrm{Cov}(1, 1 - X_2) - \mathrm{Cov}(X_1, 1) + \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \textit{(par linéarité à droite de l'opérateur } \mathrm{Cov}(.,.)\textit{)} \\ & = & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \end{array}$$
  En effet, pour toute v.a.r. discrète V admettant un moment d'ordre 1 :
$$\mathrm{Cov}(1, V) = \mathrm{Cov}(V, 1) = \mathbb{E}(1\ V) - \mathbb{E}(1)\ \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(V) - \mathbb{E}(V) = 0$$
$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement, } \rho(Y_1, Y_2) = \rho(X_1, X_2) = r. \\ \text{Et ainsi : } r = -1 \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) = (1-p)\ (1 - 2p). \end{array}}$$

□

c) En déduire que le coefficient r ne peut-être égal à -1 que lorsque $p = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X_1 + X_2 = 1]) = 1$.

Démonstration.
- D'après la question ***1.b)*** :
$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) \ = \ 2\ p(1-p)\ (1 + r)$$
- Comme $p \in \,]0, 1[$: $r = -1 \ \Leftrightarrow \ \mathbb{V}(X_1 + X_2) = 0$. Ainsi :
$$\begin{array}{rcl} r = -1 & \Leftrightarrow & X_1 + X_2 \text{ est une v.a.r. presque sûrement égale à son espérance} \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{P}([X_1 + X_2 = 2p]) = 1 \end{array}$$

En effet, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 2p$.
La valeur $2p$ est alors obligatoirement une valeur prise par $X_1 + X_2$.
Or : $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Comme $p \in \,]0, 1[$, les cas $2p = 0$ et $2p = 2$ sont à exclure.

$$\boxed{\text{On en déduit que } r = -1 \text{ si et seulement si } p = \frac{1}{2} \ \text{ et } \ \mathbb{P}([X_1 + X_2 = 1]) = 1.}$$

Commentaire

Revenons rapidement sur la propriété dont on se sert dans la démonstration :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(X) = 0 & \Leftrightarrow & \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = 0 & \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{P}\left(\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 = 0\right]\right) = 1 & \textit{(car la v.a.r. } Y = \left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 \\ & & & \textit{est positive et d'espérance nulle)} \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{P}([X = \mathbb{E}(X)]) = 1 & \end{array}$$

En effet : $\left[(X - \mathbb{E}(X))^2 = 0\right] = [X - \mathbb{E}(X) = 0] = [X = \mathbb{E}(X)]$. □

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $\mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = 1$.

a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.

Démonstration.
On suppose dans l'énoncé que la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ est presque-sûrement constante égale à 1.

- On en déduit qu'elle admet une espérance égale à 1.
  Or, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} p = np$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } np = 1 \text{ et donc } p = \frac{1}{n}.}$$

- La v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ étant presque-sûrement constante, elle admet une variance nulle.
  Or, d'après la question ***1.b)*** : $\mathbb{V}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\Big) = np(1-p)\ \big(1 + (n-1)\ r\big)$.
  Et comme $np(1-p) > 0$ alors : $1 + (n-1)\ r = 0$.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } (n-1)\ r = -1 \text{ ou encore : } r = -\frac{1}{n-1}.}$$

□

b) Déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive et la calculer.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = 1\right] & = & [X_1 = 1] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0] \\ & \cup & [X_1 = 0] \cap [X_2 = 1] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0] \\ & \ldots & \ldots \\ & \cup & [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0] \\ & \cup & [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1] \end{array}$$

- Les événements de cette réunion étant deux à deux incompatibles, on en déduit :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) & = & \mathbb{P}\left([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]\right) \\ & + & \mathbb{P}\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]\right) \\ & \ldots & \ldots \\ & + & \mathbb{P}\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]\right) \\ & + & \mathbb{P}\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1]\right)\end{array}$$

Cette somme étant égale à 1, on en déduit que les seuls n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive sont ceux qui ne contiennent que des coordonnées nulles mises à part l'une d'entre elles égale à 1.

(s'il existait un autre tel n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$, l'événement $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = 1\right] \cup [(X_1, \ldots, X_n) = (a_1, \ldots, a_n)]$ serait de probabilité strictement supérieure à 1, ce qui est impossible)

- Démontrons maintenant que toutes ces probabilités sont égales.
  Pour ce faire, pour tout $i_0 \in [\![1, n]\!]$ on note :

$$B_n^{i_0} = \bigcap_{\substack{k = 1 \\ k \neq i_0}}^{n} [X_k = 0]$$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$. La famille $\left(B_n^{i_0}, \overline{B_n^{i_0}}\right)$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1]\Big) = \mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap B_n^{i_0}\Big) + \cancel{\mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap \overline{B_n^{i_0}}\Big)}$$

En effet, $\mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap \overline{B_n^{i_0}}\Big) = 0$ car :

$$[X_{i_0} = 1] \cap \overline{B_n^{i_0}} \subset \left[\sum_{k=1}^{n} X_k > 1\right]$$

et donc, par croissance de l'application probabilité $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap \overline{B_n^{i_0}}\Big) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k > 1\right]\right) = 0$$

Pour tout $i_0 \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}\Big([X_{i_0} = 1] \cap B_n^{i_0}\Big) = p$.

- Toutes ces probabilités étant égales, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = n\, \mathbb{P}\left([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]\right) = np$$

et ainsi, $np = 1$ d'où $p = \dfrac{1}{n}$.

Les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive ont une probabilité égale à $p = \dfrac{1}{n}$. □

Partie II. Lois bêta-binomiales

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt$ est convergente si seulement si $x > 0$.

Démonstration.
La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$.

× $f(t) = t^{x-1}\ (1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ car $(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} 1^{y-1} = 1$.

× $\forall t \in\ ]0, \frac{1}{2}]$, $t^{x-1}\ (1-t)^{y-1} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$.

× En tant qu'intégrale de Riemann impropre en 0, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}}\ dt$ est convergente si et seulement si $1 - x < 1$ c'est à dire $x > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale } \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \text{ est convergente si et seulement si } x > 0.}$$

□

b) Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \ = \ \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}\ (1-t)^{x-1}\ dt$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon \in\ ]0, \frac{1}{2}[$.

- La fonction f est continue sur $[\frac{1}{2}, 1-\varepsilon]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt$ est bien définie.
- On effectue le changement de variable $\boxed{u = 1 - t}$.

  $u = 1 - t$ (et donc $t = 1 - u$)
  $\hookrightarrow du = -dt$ et $dt = -du$
  - $t = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
  - $t = 1 - \varepsilon \Rightarrow u = 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon$

- Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1 - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{1}{2}, 1-\varepsilon]$.
  On obtient alors :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \ = \ \int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon} (1-u)^{x-1}\ u^{y-1}\ (-du)$$

Enfin :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon} (1-u)^{x-1}\ u^{y-1}\ (-du) \ = \ -\int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon} (1-u)^{x-1}\ u^{y-1}\ du \ = \ \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} (1-u)^{x-1}\ u^{y-1}\ du$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \ = \ \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} u^{y-1}\ (1-u)^{x-1}\ du.}$$

□

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Démonstration.

- On procède par équivalence.

$$\begin{array}{lll} & \text{L'intégrale impropre } \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} u^{y-1}\ (1-u)^{x-1}\ du \text{ est convergente} & \\ \Leftrightarrow & \text{La fonction } H : \varepsilon \mapsto \displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u^{y-1}\ (1-u)^{x-1}\ du \text{ admet une limite finie en } 0 & \textit{(par définition)} \\ \Leftrightarrow & \text{La fonction } G : \varepsilon \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \text{ admet une limite finie en } 0 & \textit{(d'après la question 4.b))} \\ \Leftrightarrow & \text{La fonction } F : \varepsilon \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \text{ admet une limite finie en } 1 & (*) \\ \Leftrightarrow & \text{L'intégrale impropre } \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \text{ est convergente} & \textit{(par définition)} \end{array}$$

L'équivalence $(*)$ est vérifiée grâce au théorème de composition des limites qui permet d'affirmer, lorsque l'une des deux limites suivantes existe, alors l'autre existe et :

$$\lim_{\varepsilon\to 1} F(\varepsilon) \ = \ \lim_{\varepsilon\to 0} G(\varepsilon)$$

> On en déduit alors, par la question ***4.a)***, que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt$ est convergente si et seulement si $y > 0$.

- D'autre part :

$$\begin{array}{lll} & \text{L'intégrale impropre } \displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \text{ est convergente} & \\ \Leftrightarrow & \text{Les intégrales impropres } \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \text{ et } \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \text{ sont convergentes} & \textit{(par définition)} \end{array}$$

> Ainsi, d'après le point précédent et la question ***4.a)***, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

□

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\ dt.$

5. Soit x et y des réels strictement positifs.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1,y) = \dfrac{x}{y} \times B(x,y+1)$.

Démonstration.
Soit $(c,d) \in \,]0,1[^2$ avec $c \leqslant d$. La fonction $t \mapsto t^x\ (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[c,d]$.

- On détermine $\displaystyle\int_c^d t^x\ (1-t)^{y-1}\ dt$ en procédant par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^x & & u'(t) & = & x\ t^{x-1} \\ v'(t) & = & (1-t)^{y-1} & & v(t) & = & -\dfrac{(1-t)^y}{y} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[c,d]$.

On obtient finalement :

$$\int_c^d t^x\ (1-t)^{y-1}\ dt \quad = \quad \frac{-1}{y} \left[\ t^x\ (1-t)^y\ \right]_c^d + \frac{x}{y} \int_c^d t^{x-1}\ (1-t)^y\ dt$$

- Or : $\left[\ t^x\ (1-t)^y\ \right]_c^d \ = \ d^x\ (1-d)^y - c^x\ (1-c)^y$. Et :

$$\lim_{c\to 0}\ (d^x\ (1-d)^y - c^x\ (1-c)^y) = d^x\ (1-d)^y - 0^x\ (1-0)^y = d^x\ (1-d)^y$$

$$\text{puis} \quad \lim_{d\to 1}\ (d^x\ (1-d)^y) = 1^x\ (1-1)^y = 0$$

- Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^x\ (1-t)^{y-1}\ dt$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^y\ dt$ sont convergentes.

  On en déduit que toutes les quantités présentes dans l'égalité admettent des limites finies.
  Par passage à la limite ($c \to 0$ puis $d \to 0$) dans l'égalité, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^1 t^x\ (1-t)^{y-1}\ dt & = & \displaystyle\frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^y\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ B(x+1,y) & & \dfrac{x}{y}\ B(x,y+1) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } B(x+1,y) = \frac{x}{y} \times B(x,y+1).}$$

Commentaire

Le programme officiel stipule que « les techniques de calculs (**intégration par parties**, changement de variables) seront pratiquées sur des intégrales sur un segment ».
On ne peut donc rédiger cette question en travaillant directement sur l'intervalle $]0,1[$.
C'est pourquoi on introduit les réels c et d qui permettent d'effectuer l'IPP sur une intégrale sur le segment $[c,d]$.

□

b) En déduire l'égalité : $B(x, y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x, y)$.

Démonstration.

- On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{rrcl} & B(x, y+1) & = & \dfrac{y}{x+y}\ B(x, y) \\ \Leftrightarrow & \dfrac{x+y}{y}\ B(x, y+1) & = & B(x, y) \\ \Leftrightarrow & \left(\dfrac{x}{y}+1\right)\ B(x, y+1) & = & B(x, y) \\ \Leftrightarrow & \dfrac{x}{y}\ B(x, y+1) + B(x, y+1) & = & B(x, y) \\ \Leftrightarrow & B(x+1, y) + B(x, y+1) & = & B(x, y) \quad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- Calculons :

$$\begin{array}{rcl} B(x+1, y) + B(x, y+1) & = & \displaystyle\int_0^1 t^x\ (1-t)^{y-1}\ dt + \int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^y\ dt \quad \textit{(par définition)} \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \left(t^x\ (1-t)^{y-1} + t^{x-1}\ (1-t)^y\right)\ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ \left(\cancel{t} + (1-\cancel{t})\right)\ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt \\ & = & B(x, y) \end{array}$$

Ainsi, la dernière égalité du raisonnement par équivalence est vérifiée.
Il en est donc de même de la première.

$$\boxed{B(x, y+1) = \frac{x}{x+y}\ B(x, y)}$$

□

6. Pour tout réel z, soit $\left((z)^{[m]}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(z)^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}$$

(par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$)
Établir pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout couple (k, ℓ) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) \ = \ \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x, y)$$

Démonstration.
Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On souhaite démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \ell \in [\![k, +\infty [\![,\ B(x+k, y+\ell-k) \ = \ \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x, y)$$

On démontre par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$

où $\mathcal{P}(k)$: $\forall \ell \in [\![k, +\infty[\![,\ B(x+k, y+\ell-k) \ = \ \dfrac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$

▸ **Initialisation** :

Il s'agit de démontrer $\mathcal{P}(0)$: $\forall \ell \in [\![0, +\infty[\![,\ B(x, y+\ell) \ = \ \dfrac{(x)^{[0]} \times (y)^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$,

ce qui s'écrit, par définition de $(x)^{[0]}$, $\mathcal{P}(0)$: $\forall \ell \in \mathbb{N},\ B(x, y+\ell) \ = \ \dfrac{(y)^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$.

Démontrons alors par récurrence : $\forall \ell \in \mathbb{N}, \mathcal{H}(\ell)$ où $\mathcal{H}(\ell)$: $B(x, y+\ell) \ = \ \dfrac{(y)^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $B(x, y+0) = B(x,y)$.
  - D'autre part : $\dfrac{(y)^{[0]}}{(x+y)^{[0]}} \times B(x,y) = \dfrac{1}{1}\ B(x,y) = B(x,y)$.

  D'où $\mathcal{H}(0)$.
- **Hérédité** : soit $\ell \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{H}(\ell)$ et démontrons $\mathcal{H}(\ell+1)$ $\left(\textit{i.e. } B(x, y+\ell+1) \ = \ \dfrac{(y)^{[\ell+1]}}{(x+y)^{[\ell+1]}} \times B(x,y) \right)$.

  On a :

$$\begin{aligned} B(x, y+\ell+1) &= B(x, (y+\ell)+1) \\ &= \frac{y+\ell}{x+(y+\ell)}\ B(x, y+\ell) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\ &= \frac{y+\ell}{x+(y+\ell)}\ \frac{(y)^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) && \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathcal{H}(\ell)\textit{)} \\ &= \frac{(y+\ell)\ (y)^{[\ell]}}{\big((x+y)+\ell\big)\ (x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) \\ &= \frac{(y)^{[\ell+1]}}{(x+y)^{[\ell+1]}} \times B(x,y) \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{H}(\ell+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall \ell \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}(\ell).}$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.
(rappelons que cette récurrence n'avait d'autre but que de démontrer l'étape d'initialisation de la récurrence englobante)

Commentaire

Il faut bien comprendre que la propriété démontrée en ***5.b)*** est vérifiée pour tout couple de réels strictement positifs. On peut d'ailleurs l'écrire :

$$\forall u > 0,\ \forall v > 0,\ B(u, v+1) \ = \ \frac{u}{u+v}\ B(u,v)$$

Dans la démonstration ci-dessus, on utilise cette propriété pour $u = x > 0$ et $v = y + \ell > 0$.

► **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$

$$\left(\text{i.e. } \forall \ell \in [\![k+1, +\infty[\![, \ B\big(x+k+1, y+\ell-(k+1)\big) \ = \ \frac{(x)^{[k+1]} \times (y)^{[\ell-(k+1)]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) \right)$$

Soit $\ell \geqslant k+1$. On a :

$$\begin{aligned}
& B\big(x+k+1, y+\ell-(k+1)\big) \\
= \ & B\big((x+k)+1, y+\ell-k-1\big) \\
= \ & \frac{x+k}{y+\ell-k-1} \ B\big(x+k, (y+\ell-k-\cancel{1})+\cancel{1}\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{5.a)}\textit{)} \\
= \ & \frac{x+k}{y+\ell-k-1} \ \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) && \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(k)\textit{)} \\
= \ & (x+k) \ (x)^{[k]} \ \frac{(y)^{[\ell-k]}}{y+\ell-k-1} \ \frac{1}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) \\
= \ & (x)^{[k+1]} \ (y)^{[\ell-k-1]} \ \frac{1}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) && (*) \\
= \ & \frac{(x)^{[k+1]} \ (y)^{[\ell-(k+1)]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)
\end{aligned}$$

L'étape $(*)$ est justifiée par la définition de l'opérateur $.^{[m]}$:

$$(x+k) \ (x)^{[k]} \ = \ (x)^{[k+1]} \qquad \text{et} \qquad \big(y+(\ell-k-1)\big) \ (y)^{[\ell-k-1]} \ = \ (y)^{[\ell-k]}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(k).}$$

Commentaire

Nous avons opté ici pour la présentation rigoureuse de la démonstration. On aurait pu raisonner autrement.

- Tout d'abord, pour $x > 0$, $v > 0$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
B(x+k, v) \ &= \ B\big(\big(x+(k-1)\big)+1, v\big) \\
&= \ \frac{x+k-1}{x+k-1+v} \ B(x+(k-1), v) \\
&= \ \frac{x+k-1}{x+k-1+v} \ \frac{x+k-2}{x+k-2+v} \ B(x+(k-2), v) && \textit{(d'après la question } \textbf{5.b)}\textit{)} \\
&= \ \dots \\
&= \ \frac{x+k-1}{x+k-1+v} \ \frac{x+k-2}{x+k-2+v} \ \dots \ \frac{x}{x+v} \ B(x,v) \\
&= \ \frac{(x)^{[k]}}{(x+v)^{[k]}} \ B(x,v)
\end{aligned}$$

- D'autre part, on démontre, en combinant les résultats des questions ***5.a)*** et ***5.b)***, que pour tout $x > 0$ et $y > 0$:

$$B(x, y+1) \; = \; \frac{y}{x} \, B(x+1, y) \; = \; \frac{y}{\cancel{x}} \, \frac{\cancel{x}}{x+y} \, B(x, y) \; = \; \frac{y}{x+y} \, B(x, y)$$

- À l'aide de cette propriété, en procédant comme dans le premier point de cette remarque, on a pour tout $x > 0$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B(x, y+n) &= B(x, (y+n-1)+1) \\ &= \frac{y+n-1}{x+y+n-1} \, B(x, y+n-1) \\ &= \frac{y+n-1}{x+y+n-1} \, \frac{y+n-2}{x+y+n-2} \, B(x, y+n-2) \\ &= \ldots \\ &= \frac{y+n-1}{x+y+n-1} \, \frac{y+n-2}{x+y+n-2} \, \cdots \, \frac{y}{x+y} \, B(x, y) \\ &= \frac{(y)^{[n]}}{(x+y)^{[n]}} \end{aligned}$$

- On a alors :

$$\begin{aligned} B(x+k, y+\ell-k) &= \frac{(x)^{[k]}}{(x+y+\ell-k)^{[k]}} \, B(x, y+\ell-k) & \textit{(avec } v = y+\ell-k\textit{)} \\ &= \frac{(x)^{[k]}}{(x+y+\ell-k)^{[k]}} \, \frac{(y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell-k]}} \, B(x, y) & \textit{(avec } n = \ell-k\textit{)} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} (x+y+\ell-k)^{[k]} &= (x+y+\ell-1)(x+y+\ell-2)\ldots(x+y+\ell-k) \\ (x+y)^{[\ell-k]} &= (x+y+\ell-k-1)(x+y+\ell-k-2)\ldots(x+y) \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} (x+y+\ell-k)^{[k]} \, (x+y)^{[\ell-k]} &= (x+y+\ell-1)(x+y+\ell-2)\ldots(x+y) \\ &= (x+y)^{[\ell]} \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure :

$$B(x+k, y+\ell-k) \; = \; \frac{(x)^{[k]} \, (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \, B(x, y)$$

□

7. Soit a et b des réels strictement positifs.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $p_k = \dbinom{n}{k} \dfrac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

a) À l'aide de la relation obtenue dans la question ***6***, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} p_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a,b)} && \textit{(d'après la question précédente avec } x = a > 0 \textit{ et } y = b > 0\textit{)} \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(a+k, b+n-k)
\end{aligned}$$

(cette écriture est valide car $B(a,b) > 0$ en tant qu'intégrale sur $]0,1[$ d'une fonction continue et strictement positive sur $]0,1[$)

- Remarquons alors :

$$\begin{aligned}
B(a+k, b+n-k) &= \int_0^1 t^{a+k-1} \ (1-t)^{b+n-k-1} \ dt \\
&= \int_0^1 t^{a-1} \ (1-t)^{b-1} \ t^k \ (1-t)^{n-k} \ dt
\end{aligned}$$

Et ainsi, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} B(a+k, b+n-k) \\
=\ & \int_0^1 t^{a-1} \ (1-t)^{b-1} \ \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} t^k \ (1-t)^{n-k} \right) \ dt \\
=\ & \int_0^1 t^{a-1} \ (1-t)^{b-1} \ (\cancel{t} + (1-\cancel{t}))^n \ dt && \textit{(en reconnaissant la formule du binôme de Newton)} \\
=\ & \int_0^1 t^{a-1} \ (1-t)^{b-1} \ dt \ = \ B(a,b)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En combinant ces résultats, on obtient : } \sum_{k=0}^{n} p_k \ = \ \frac{1}{B(a,b)} \ B(a,b) \ = \ 1.}$$

□

On dit qu'une variable aléatoire S suit une loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(n; a, b)$ si $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \mathbb{P}([S = k]) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

b) Reconnaître la loi $\mathbf{B}(n;1,1)$.

Démonstration.
Soit S une v.a.r. qui suit la loi $\mathbf{B}(n;1,1)$.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Par définition :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\,[S=k]\,) & = & \dbinom{n}{k} \dfrac{(1)^{[k]} \times (1)^{[n-k]}}{(2)^{[n]}} \\ & = & \dbinom{n}{k} \dfrac{k! \times (n-k)!}{(n+1)!} \qquad (*) \\ & = & \dbinom{n}{k} \dfrac{k! \times (n-k)!}{n!} \dfrac{1}{n+1} \ = \ \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

L'étape $(*)$ est justifiée par la définition de l'opérateur $.^{[n]}$:

$$\begin{array}{rcl} 2^{[n]} \ = \ 2^{[(n-1)+1]} & = & (2+(n-1))\ 2^{[n-1]} \\ & = & (n+1)\ (2+(n-2))\ (2)^{[n-2]} \\ & = & (n+1)\ n\ (n-1)\dots 2^{[0]} \ = \ (n+1)! \end{array}$$

(en toute rigueur, il faudrait faire une récurrence ; l'étape d'hérédité est immédiate :
$2^{[n+1]} = (n+2)\ 2^{[n]} = (n+2)\ (n+1)! = (n+2)!$*)*

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ainsi, } S(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(\,[S=k]\,) = \dfrac{1}{n+1}. \\ \text{Ainsi : } S \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!]). \end{array}}$$

□

c) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $\mathbf{B}(n;a,b)$ est égale à $\dfrac{na}{a+b}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, S admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
- Cette espérance est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(S) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} B(a+k, b+n-k) \end{array}$$

*(comme dans la question **7.a)**)*

- On procède alors comme en question ***7.a)***. Par linéarité de l'intégration :

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{k}{n} B(a+k, b+n-k) \\ = & \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}\ (1-t)^{b-1}\ \left(\sum_{k=0}^{n} k \binom{k}{n}\ t^k\ (1-t)^{n-k} \right)\ dt \\ = & \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}\ (1-t)^{b-1}\ (nt)\ dt \\ = & n \displaystyle\int_0^1 t^{a}\ (1-t)^{b-1}\ dt \ = \ n\ B(a+1,b) \end{array}$$

(en reconnaissant l'espérance d'une v.a.r. Y telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t)$ avec $t \in\ ]0,1[$)

- On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \frac{1}{B(a,b)}\ n\ B(a+1,b) \ = \ \frac{n}{B(a,b)}\ \frac{a}{b}\ B(a,b+1) && \textit{(d'après la question \textbf{5.a)})}\\ &= \frac{n}{B(a,b)}\ \frac{a}{\cancel{b}}\ \frac{\cancel{b}}{a+b}\ B(a,b) \ = \ n\ \frac{a}{a+b} && \textit{(d'après la question \textbf{5.b)})}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{E}(S) = n\ \frac{a}{a+b}.}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à repérer les sommes classiques issues du chapitre de probabilité traitant des lois usuelles. Ici, on a utilisé :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{k}{n}\ t^k\ (1-t)^{n-k} \ = \ n\ t$$

car l'on reconnaît $\mathbb{E}(Y)$ où Y est une v.a.r. telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t)$.

- Si l'énoncé avait demandé le calcul de la variance de S, on aurait été amené à déterminer son moment d'ordre 2. On aurait alors eu à considérer :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{k}{n}\ t^k\ (1-t)^{n-k} \ = \ \mathbb{E}\big(Y^2\big)$$

et par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{V}(Y) + \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2\\ &= nt\ (1-t) + (nt)^2 \ = \ n\ t(1-t) + n^2\ t^2\\ &= nt\ \big((1-t)+nt\big) \ = \ nt\ \big(1+(n-1)\ t\big)\end{aligned}$$

- Il est aussi possible de remarquer : $k \dbinom{n}{k} \ = \ n \dbinom{n-1}{k-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}\ B(a+k, b+n-k)\\ &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}\ B(a+k, b+n-k) && \textit{(car le premier élément de cette somme est nulle)}\\ &= \frac{n}{B(a,b)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\ B(a+k, b+n-k)\\ &= \frac{n}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\ B(a+(k+1), b+n-(k+1)) && \textit{(par décalage d'indice)}\end{aligned}$$

On procède alors comme en question ***7.a)***.
L'écriture intégrale de $B(.,.)$ fait alors apparaître $\big(1+(1-t)\big)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$.

- Cette dernière rédaction est évidemment acceptée mais pénalisante à terme du fait de la perte de temps qu'elle implique.

□

Partie III. Un possible dans le cas où $n = 2$

Soit a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \{0,1\}^2,\ \mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]) \ = \ \frac{B(a + x_1 + x_2, b + 2 - x_1 - x_2)}{B(a,b)}$$

8. a) Montrer que les deux variables X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.

Démonstration.
La loi du couple (X_1, X_2) est fournie dans la question.
Il s'agit donc de déterminer les lois marginales de ce couple.

- D'après l'énoncé : $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0,1\}$.
- La famille $\big([X_2 = 0], [X_2 = 1] \big)$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) \\ &= \frac{B(a, b+2)}{B(a,b)} + \frac{B(a+1, b+1)}{B(a,b)} \end{aligned}$$

  Or, par les formules des questions ***5.a)*** et ***5.b)*** :

$$B(a, b+2) = B(a, (b+1)+1) = \frac{b+1}{a+(b+1)}\ B(a, b+1) = \frac{b+1}{a+b+1}\ \frac{b}{a+b}\ B(a,b)$$

$$B(a+1, b+1) = \frac{b}{(a+1)+b}\ B(a+1, b) = \frac{b}{(a+1)+b}\ \frac{a}{a+b}\ B(a,b)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) &= \frac{b}{(a+b)\ (a+b+1)}\ (b+1) + \frac{b}{(a+b)\ (a+b+1)}\ a \\ &= \frac{b}{(a+b)\ (a+b+1)}\ ((b+1)+a) = \frac{b}{a+b} \end{aligned}$$

  et donc :

$$\mathbb{P}\big([X_1 = 1]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) = 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

- On procède de même pour déterminer la loi de la v.a.r. X_2. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big) \\ &= \frac{B(a, b+2)}{B(a,b)} + \frac{B(a+1, b+1)}{B(a,b)} = \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent la même loi de Bernoulli } \mathcal{B}\left(\frac{a}{a+b}\right).}$$

Commentaire

- Il n'est pas demandé, dans l'énoncé, d'expliciter le paramètre de la loi de Bernoulli commune à X_1 et X_2. Ainsi, comme l'on sait que X_1 et X_2 suivent chacune une loi de Bernoulli ($X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0,1\}$), l'égalité $\mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big)$ permet de conclure que X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.
- On a préféré explicité tous les calculs ici car ils serviront dans les questions suivantes. □

b) Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(2; a, b)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1(\Omega) \texttt{ ET } x_2 \in X_2(\Omega)\} = \{0, 1, 2\}$.
- Soit $i \in \{0, 1, 2\}$.
  La famille $\big([X_1 = 0], [X_1 = 1]\big)$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = i]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_1 + X_2 = i]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_1 + X_2 = i]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = i]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = i-1]\big) \end{aligned}$$

  Il s'agit alors d'envisager les différentes valeurs de i.

  - Si $i = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) + \cancel{\mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = -1]\big)} \\ &= \frac{B(a, b+2)}{B(a,b)} = \frac{(b+1)\ b}{(a+b+1)(a+b)} \\ &= \frac{(a)^{[0]} \times b^{[2]}}{(a+b)^{[2]}} = \binom{2}{0} \frac{(a)^{[0]} \times b^{[2-0]}}{(a+b)^{[2]}} \end{aligned}$$

  - Si $i = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big) \\ &= \frac{B(a+1, b+1)}{B(a,b)} + \frac{B(a+1, b+1)}{B(a,b)} = 2\ \frac{a\ b}{(a+b+1)(a+b)} \\ &= 2\ \frac{(a)^{[1]} \times b^{[1]}}{(a+b)^{[2]}} = \binom{2}{1} \frac{(a)^{[1]} \times b^{[1]}}{(a+b)^{[2]}} \end{aligned}$$

  - Si $i = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 2]\big) &= \cancel{\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 2]\big)} + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) \\ &= \frac{B(a+2, b)}{B(a,b)} = \frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)(a+b)} \end{aligned}$$

    Ce résultat est une nouvelle fois obtenu par les formules des questions ***5.a)*** et ***5.b)***.
    On obtient alors :

$$\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 2]\big) = \binom{2}{0} \frac{(a)^{[2]} \times b^{[2-2]}}{(a+b)^{[2]}}$$

    en remplaçant les rôles joués par a et b dans la formule obtenue dans le cas $i = 0$.

$$\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathbf{B}(2; a, b)}$$

□

c) Établir la relation : $\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) &= \frac{\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1]\,\big)} \\ &= \frac{\frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)(a+b)}}{\frac{a}{a+b}} = \frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)\cancel{(a+b)}}\ \frac{\cancel{a+b}}{a} = \frac{a+1}{a+b+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) \ = \ \frac{a+1}{a+b+1}.}$$

□

9. La fonction **Scilab** suivante dont le script est incomplet (lignes 7 et 11), effectue une simulation des deux variables X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

Commentaire

- Avant de fournir le programme **Scilab** associé à cette question, rappelons que lors de l'écriture d'un programme, on se soumet généralement à quelques règles de bonne conduite :
  (1) utilisation de commentaires indiquant le but de chaque fonction,
  (2) réflexion autour du découpage en sous-fonctions pouvant être réutilisées,
  (3) utilisation de nom explicites pour les fonctions et le variables,
  (4) indentation du code (utilisation correcte d'espaces et sauts de lignes).

  Le but de ces règles est de produire un code lisible, intelligible et facilement modifiable à l'avenir. Évidemment, on ne s'attend pas, dans un sujet de concours, à ce que soit commentée la fonction dont on il est demandé d'expliciter le calcul. Par contre, on s'attend à ce que les autres règles de bonne conduite soient respectées. Ne pas le faire correspond à ce que l'on nomme de l'**obfuscation** (pas forcément volontaire) de code. Sous ce terme, on désigne les méthodes permettant de rendre un code difficile à déchiffrer. Le but de telles techniques est de protéger son code. Typiquement, une entreprise ayant investi afin de développer un algorithme pourra procéder à une obfuscation de code afin que ses concurrents industriels ne puissent comprendre la manière dont procède cet algorithme.
- Dans l'énoncé original, le programme était présenté sous la forme suivante.

```
1 function x = randbetabin(a, b)
2     x = zeros(1,2) ;
3     u = (a + b) ⋆ rand() ;
4     v = (a + b + 1) ⋆ rand() ;
5         if (u < a) then x(1,1) = 1 ; if .............. then x(1,2) = 1 ; end ;
6                 else if ............. then x(1,2) = 1 ; end ;
7         end ;
8 endfunction
```

  On peut regretter cette indentation qui rend le code difficile à lire : il est en effet difficile de percevoir l'imbrication des structures conditionnelles.
- On se permet ici de fournir le programme dans une version plus classique de l'indentation.

```
1   function x = randbetabin(a, b)
2       x = zeros(1,2)
3       u = (a + b) ⋆ rand()
4       v = (a + b + 1) ⋆ rand()
5       if (u < a) then
6           x(1,1) = 1
7           if ............. then
8               x(1,2) = 1
9           end
10      else
11          if ............ then
12              x(1,2) = 1
13          end
14      end
15  endfunction
```

a) Préciser la loi simulée par la variable `u` de la ligne 3.

Démonstration.
L'instruction `rand` permet de simuler une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{U}([0,1[)$.
En ligne 3, on multiplie le résultat fourni par `rand()` (valeur dans $[0,1[$) par `(a + b)`.
Cela permet de transporter le résultat dans l'intervalle $[0, a+b[$.

$$\boxed{\text{La variable } \mathtt{u} \text{ est une simulation d'une v.a.r. } U \text{ telle que } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, a+b[).}$$ □

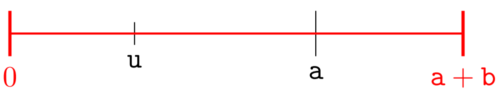
b) Compléter les lignes 7 et 11.

Démonstration.

- Commençons par rappeler que les v.a.r. X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$. Pour simuler le couple (X_1, X_2), l'énoncé propose une fonction `randbetabin` qui renvoie une matrice réelle $(\mathtt{x}_1 \ \ \mathtt{x}_2)$. Plus précisément :
  × $\mathtt{x}_1$ doit prendre la valeur 1 avec probabilité $\dfrac{a}{a+b}$,
  × $\mathtt{x}_1$ doit prendre la valeur 0 avec probabilité $\dfrac{b}{a+b}$.
  Il en est de même de $\mathtt{x}_2$.
- Le programme commence par créer la matrice ligne `x` à 2 colonnes remplie de 0, puis va mettre à jour ces coefficients afin de respecter les objectifs énoncés dans le point précédent.
- Il y a ici une subtilité puisque les v.a.r. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
  En effet, d'après la question ***8.c)*** :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]}\big([X_2 = 1]\big) \; = \; \frac{a+1}{a+b+1} \neq \frac{a}{a+b} \; = \; \mathbb{P}\big([X_2=1]\big)$$

  Ainsi, le programme opère en 2 temps :
  × on simule d'abord la v.a.r. X_1.
  On a vu que l'appel `(a+b) ⋆ rand()` simule une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, a+b[)$. Plus précisément cet appel renvoie un réel `u` choisit aléatoirement dans $[0, \mathtt{a}+\mathtt{b}[$:



Le réel $\mathtt{u}$ appartient à l'intervalle $[0, \mathtt{a}[$ avec probabilité :

$$\mathbb{P}\left([U \in [0, \mathtt{a}[\ ]\right) = \mathbb{P}\left([U < \mathtt{a}]\right) = \frac{\mathtt{a}}{\mathtt{a}+\mathtt{b}} = \mathbb{P}([X_1 = 1])$$

Le réel $\mathtt{u}$ appartient à l'intervalle $[\mathtt{a}, \mathtt{a}+\mathtt{b}[$ avec probabilité :

$$\mathbb{P}\left([U \in [\mathtt{a}, \mathtt{a}+\mathtt{b}[\ ]\right) = \mathbb{P}\left([U \geqslant \mathtt{a}]\right) = \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{a}+\mathtt{b}} = \mathbb{P}([X_1 = 0])$$

C'est ce que réalise le programme en ligne 6 :

```
5        if (u < a) then
6            x(1,1) = 1
```

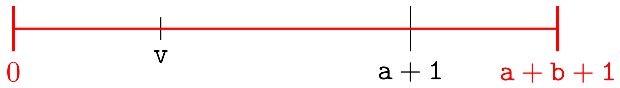
Dans le cas où la condition n'est pas réalisée (ce qui se produit avec probabilité $\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{a}+\mathtt{b}}$) le premier coefficient de la matrice $\mathtt{x}$ n'est pas mis à jour.

× on simule ensuite la v.a.r. X_2.
Pour ce faire, on regarde la valeur `x(1,1)` simulée pour X_1 :

- Si `x(1,1)` vaut 1 alors X_2 doit prendre la valeur 1 avec probabilité $\dfrac{\mathtt{a}+1}{\mathtt{a}+\mathtt{b}+1}$.

  *(d'après la question **8.c)** :* $\mathbb{P}_{[X_1=1]}\big([X_2 = 1]\big) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$*)*

  Pour affecter à `x(1,2)` la bonne valeur, on procède comme pour `x(1,1)`.
  Le schéma est le suivant :



  On complète donc comme suit la ligne 7 :

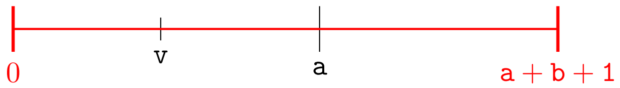
```
7        if (v < a + 1) then
8            x(1,2) = 1
```

- Si `x(1,1)` vaut 0 alors X_2 doit prendre la valeur 1 avec probabilité :

$$\mathbb{P}_{[X_1=0]}\big([X_2 = 1]\big) = \frac{\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big)}{\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big)}$$

$$= \frac{\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)}}{\frac{b}{a+b}} = \frac{ab}{(a+b+1)\cancel{(a+b)}}\ \frac{\cancel{a+b}}{b} = \frac{a}{a+b+1}$$

  Pour affecter à `x(1,2)` la bonne valeur, on procède comme précédent.
  Le schéma est le suivant :



  On complète donc comme suit la ligne 11 :

```
7        if (v < a) then
8            x(1,2) = 1
```

Commentaire

Rappelons qu'on détaille la réponse à cette question afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.

□

10. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2.

Démonstration.

- Les v.a.r. Y_1 et Y_2 sont finies donc elles admettent chacune un moment d'ordre 2.
Ainsi, Y_1 et Y_2 admettent un coefficient de corrélation linéaire donné par :

$$\rho(X_1, X_2) \;=\; \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}} \;=\; \frac{\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}}$$

Or X_1 et X_2 suivent la même loi $\mathcal{B}\left(\frac{a}{a+b}\right)$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(X_1) \;=\; \frac{a}{a+b} \;=\; \mathbb{E}(X_2)$$

$$\mathbb{V}(X_1) \;=\; \frac{a}{a+b}\left(1 - \frac{a}{a+b}\right) \;=\; \frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b} \;=\; \mathbb{V}(X_2)$$

- L'espérance $\mathbb{E}(X_1X_2)$ est définie par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1X_2) &= \sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{1} i\ j\ \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [X_2 = j]\big)\right) \\
&= \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) \\
&= \frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)(a+b)}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) &= \frac{(a+1)\ a}{(a+b+1)(a+b)} - \frac{a}{a+b}\,\frac{a}{a+b} \\
&= \frac{a}{a+b}\left(\frac{a+1}{a+b+1} - \frac{a}{a+b}\right) \\
&= \frac{a}{a+b}\left(\frac{(a+1)(a+b) - a(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)}\right) \\
&= \frac{a}{a+b}\left(\frac{(a^2+ab+a+b) - (a^2+ab+a)}{(a+b+1)(a+b)}\right) \\
&= \frac{a}{a+b}\,\frac{b}{(a+b+1)(a+b)} \;=\; \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}
\end{aligned}$$

- On peut alors finir le calcul :

$$\begin{aligned}
\rho(X_1, X_2) &= \frac{1}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}}\big(\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\big) \\
&= \frac{(a+b)^2}{\cancel{ab}}\,\frac{\cancel{ab}}{(a+b+1)(a+b)^2} \;=\; \frac{1}{a+b+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\rho(X_1, X_2) \;=\; \frac{1}{a+b+1}}$$

□

b) Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$.
Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r.

Démonstration.

- La fonction `randbetabin` prend pour paramètres les variables `a` et `b` et renvoie la simulation du couple (X_1, X_2), où X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{\texttt{a}}{\texttt{a} + \texttt{b}}\right)$.
- Ainsi, si on souhaite utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r, il suffit de trouver `a` et `b` solutions du système (S) suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} p & = & \dfrac{a}{a+b} \\ r & = & \dfrac{1}{a+b+1} \end{array} \right.$$

- Résolvons ce système :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} (p-1)\ a & + & p\ b & = & 0 \\ r\ a & + & r\ b & = & 1-r \end{array} \right. \qquad \textit{(en multipliant } L_1 \textit{ par } a+b \textit{ et } L_2 \textit{ par } a+b+1 \textit{ et en réordonnant)}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow (p-1)\,L_2 - r\,L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} (p-1)\ a & + & p\ b & = & 0 \\ & - & r\ b & = & (p-1)(1-r) \end{array} \right. \qquad \textit{(avec } p-1 \neq 0 \textit{ car } p \neq 1\textit{)}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow r\,L_1 + p\,L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} r(p-1)\ a & & & = & p(p-1)(1-r) \\ & - & r\ b & = & (p-1)(1-r) \end{array} \right. \qquad \textit{(avec } r \neq 0\textit{)}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{r(p-1)}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{r}\,L_2}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & p\,\dfrac{1-r}{r} \\ b & = & (1-p)\,\dfrac{1-r}{r} \end{array} \right. \qquad \textit{(avec } r(p-1) \neq 0\textit{)}$$

> Pour `p` et `r` donnés, l'appel `randbetabin(p*(1-r)/r, (1-p)*(1-r)/r)` permet d'obtenir la simulation de v.a.r. X_1 et X_2 qui vérifient les propriétés énoncées dans la question.

□