

EML 2018

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de \mathbb{R}^3 défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1$$

1. a) Calculer v .

b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

c) On note P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} .
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} .

2. a) Déterminer la matrice A' de f dans la base \mathcal{C} .

b) En déduire les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

d) Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A , A' , P et P^{-1} .

3. a) Déterminer la matrice B de g dans la base \mathcal{B} .

b) Montrer : $B^2 = 2B$.

c) En déduire les valeurs propres de g , ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

d) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. a) Montrer que \mathcal{E} est un espace vectoriel.

b) Soit M une matrice appartenant à \mathcal{E} .

Montrer que M n'est pas inversible. (*On pourra raisonner par l'absurde*).

5. On cherche à montrer que \mathcal{E} n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

a) Justifier que, pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et ${}^t A - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) En déduire que les matrices B et ${}^t A$ admettent une valeur propre en commun, notée α .

c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α , et Y un vecteur propre de ${}^t A$ associé à la valeur propre α . On note : $N = X {}^t Y$.

Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à \mathcal{E} .

d) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b, +\infty[$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.
b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de \mathbb{N} , renvoie la valeur de u_n .
b) Recopier et compléter la ligne `3` de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel ϵ strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à ϵ près.

```

1  function b = valeur_approchee(epsilon)
2      n = 0
3      while .....
4          n = n + 1
5      end
6      b = suite(n)
7  endfunction

```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

10. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq x$.

11. a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.

On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b) Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0$.

On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y$$

13. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U .

b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question 2.

14. a) Écrire la matrice hessienne, notée M_a , de H au point $(a, \ln(a))$.

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= a - 1 \end{cases}$$

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

15. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U .
 b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.
 c) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

- d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
3. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .
 b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.
 c) En déduire la loi de V .
4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
5. Que vaut $\text{Cov}(U, V)$? En déduire $\text{Cov}(X, U)$?

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. Simulation informatique

- a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la v.a.r. X .
 b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0, 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```

1  function r = mystere(p)
2      r = 0
3      N = 10 ^ 4
4      for k = 1:N
5          x = simule_X()
6          y = simule_Y(p)
7          if x <= y then
8              r = r + 1/N
9          end
10         end
11     endfunction

```

- c) On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :

Figures/EML_2018/graphe_EML.png

À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B .

- a)* Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
- b)* Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
- c)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Y \geq n]) = (1 - p)^n$.

8. a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y \geq n])$.

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{(2 + p)^2}$.

- c)* Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.