# EDHEC 2018

## Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

***1.*** Vérifier que $A$ n'est pas inversible.

*Démonstration.*

$$\det(A) \; = \; \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right) \; = \; 6 - 2 \times 3 \; = \; 0$$

$$\boxed{\text{Comme } \det(A) = 0, \text{ la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$$

**Commentaire**

On peut aussi démontrer qu'une matrice carrée est non inversible en remarquant qu'une de ses colonnes (resp. ligne) s'écrit comme combinaison linéaire de ses autres colonnes (resp. lignes). Ici, la deuxième colonne de $A$ est proportionnelle à la première. Ceci permet de conclure que $A$ n'est pas inversible.

□

***2.*** Déterminer les valeurs propres de $A$, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

*Démonstration.*

- Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est une valeur propre de } A & \Leftrightarrow & A - \lambda\, I \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda\, I) = 0 \end{array}$$

$$\det(A - \lambda\, I) \; = \; \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right) \; = \; (1-\lambda)(6-\lambda) - 2 \times 3 \; = \; \lambda^2 - 7\lambda + \cancel{6} - \cancel{6} \; = \; \lambda\,(\lambda - 7)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Sp}(A) = \{0, 7\}.}$$

**Commentaire**

- On a démontré dans la question précédente que la matrice $A$ n'est pas inversible. Cela démontre que $0$ est valeur propre de $A$, ce qu'on retrouve ici.
- La matrice $A$ est une matrice carrée d'ordre 2. On démontre ici qu'elle possède 2 valeurs propres distinctes. Même si ce n'est pas l'objet de la question, on peut conclure que cette matrice est diagonalisable.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_0(A) & \iff & AU = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2\,y & = & 0 \\ 3\,x & + & 6\,y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2\,y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_0(A) &= \left\{ U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ \mid \ AU = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ \mid \ x = -2y \right\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ \mid \ y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ \mid \ y \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } E_0(A) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} U \in E_7(A) &\iff AU = 7U \\ &\iff (AU - 7I)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ 3\,x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\underset{}{\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_7(A) &= \left\{ U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ \mid \ (A - 7I)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ \mid \ y = 3x \right\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } E_7(A) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).}$$

□

Dans la suite de l'exercice, on considère l'application $f$ qui, à toute matrice $M$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = AM$$

*3.* Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord que si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors $f(M) = AM \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est à valeurs dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in \big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$.

$$\begin{aligned} f\big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) &= A\ \big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) \\ &= A(\lambda_1 \cdot M_1) + A(\lambda_2 \cdot M_2) \\ &= \lambda_1\ AM_1 + \lambda_2\ AM_2 \\ &= \lambda_1\ f(M_1) + \lambda_2\ f(M_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'application } f \text{ est linéaire.}}$$

□

*4. a)* Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et vérifier que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2.

*Démonstration.*

- Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
M \in \text{Ker}(f) & \iff & f(M) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\
& \iff & AM = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+6z & 3y+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & 2\,z & & & = & 0 \\ & & y & & & + & 2\,t & = & 0 \\ 3\,x & & & + & 6\,z & & & = & 0 \\ & & 3\,y & & & + & 6\,t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & 2\,z & & & = & 0 \\ & & y & & & + & 2\,t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & 3\,y & & & + & 6\,t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & 2\,z & & & = & 0 \\ & & y & & & + & 2\,t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ker}(f) & = & \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ x = -2z \ \texttt{ ET } \ y = -2t \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ z \in \mathbb{R} \ \texttt{ ET } \ t \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ z \in \mathbb{R} \ \texttt{ ET } \ t \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est :
  - × génératrice de $\text{Ker}(f)$.
  - × libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(\text{Ker}(f)\big) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2.}$$

□

***b)*** En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

*Démonstration.*
D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big)}_{=4} = \underbrace{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)}_{=2} + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 2.}$$

□

***c)*** On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $(E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$, $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de $E_1$, $E_2$, $E_3$, et $E_4$ puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

*Démonstration.*

- Procédons tout d'abord au calcul :

× $f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 3 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4$.

× $f(E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot E_1 + 1 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 3 \cdot E_4$.

× $f(E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 6 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4$.
On remarque : $f(E_3) = 2f(E_1)$.

× $f(E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 0 \cdot E_1 + 2 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 6 \cdot E_4$.
On remarque : $f(E_4) = 2f(E_2)$.

- Comme $(E_1, E_2, 2_3, E_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(f(E_1), f(E_2), 2 \cdot f(E_1), 2 \cdot f(E_1)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(f(E_1), f(E_2)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(E_1 + 3 \cdot E_3,\ E_2 + 3 \cdot E_4\right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} = (E_1 + 3 \cdot E_3,\ E_2 + 3 \cdot E_4)$ est :
× génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
× de cardinal $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (E_1 + 3 \cdot E_3,\ E_2 + 3 \cdot E_4) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$$

**Commentaire**

- Il est souvent demandé, à la suite d'un tel calcul, de donner la matrice représentative de l'endomorphisme $f$ dans la base $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. On obtient ici :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- La matrice obtenue n'est pas inversible puisque sa dernière colonne est colinéaire à la deuxième. Ce résultat n'est pas surprenant puisque :

$$f \text{ non bijective} \ \Leftrightarrow \ \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ non inversible}$$

Lorsque la base $\mathscr{B}$ est fixée, l'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel. Voici quelques correspondances :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijective} & \longleftrightarrow & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

Dans cet exercice le travail s'effectue au niveau des espaces vectoriels.

□

***5. a)*** Déterminer l'image par $f$ des vecteurs de $\text{Im}(f)$.

*Démonstration.*
Soit $M \in \text{Im}(f) = \text{Vect}\,(E_1 + 3 \cdot E_3,\ E_2 + 3 \cdot E_4)$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{array}{rcl} M & = & \lambda_1 \cdot (E_1 + 3 \cdot E_3) + \lambda_2 \cdot (E_2 + 3 \cdot E_4) \\ \text{ainsi} \quad f(M) & = & \lambda_1 \cdot f(E_1 + 3 \cdot E_3) + \lambda_2 \cdot f(E_2 + 3 \cdot E_4) \end{array}$$

Or :

× $$\begin{array}{rcl} f(E_1 + 3 \cdot E_3) & = & f(E_1) + 3 \cdot f(E_3) \\ & = & E_1 + 3 \cdot E_3 + 3 \cdot (2 \cdot E_1 + 6 \cdot E_3) \\ & = & 7 \cdot E_1 + 21 \cdot E_3 = 7 \cdot (E_1 + 3 \cdot E_3) \end{array}$$

× $$\begin{array}{rcl} f(E_2 + 3 \cdot E_4) & = & f(E_2) + 3 \cdot f(E_4) \\ & = & E_2 + 3 \cdot E_4 + 3 \cdot (2 \cdot E_2 + 6 \cdot E_4) \\ & = & 7 \cdot E_2 + 21 \cdot E_4 = 7 \cdot (E_2 + 3 \cdot E_4) \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} f(M) & = & 7\lambda_1 \cdot (E_1 + 3 \cdot E_3) + 7\lambda_2 \cdot (E_2 + 3 \cdot E_4) \\ & = & 7 \cdot \Big(\lambda_1 \cdot (E_1 + 3 \cdot E_3) + \lambda_2 \cdot (E_2 + 3 \cdot E_4)\Big) \\ & = & 7 \cdot M \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } M \in \text{Im}(f),\ f(M) \ = \ 7 \cdot M.}$$

**Commentaire**

Il est aussi possible de revenir à la définition de $f$ est des matrices $f(E_i)$.
On écrit alors :

- Tout d'abord : $E_1 + 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Et :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 21 & 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Puis : $E_2 + 3 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Et :

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

***b)*** Donner les valeurs propres de $f$ puis conclure que $f$ est diagonalisable.

*Démonstration.*

- D'après la question ***4.a)***, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$.
  Ainsi, 0 est valeur propre de $f$, d'espace propre associé $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2$.
- D'après la question précédente, 7 est valeur propre de $f$ et :
  $$E_7(f) \supset \mathrm{Im}(f)$$
  *(toute matrice $M \in \mathrm{Im}(f)$ est vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre 7)*
  Or, d'après la question précédente, $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 2$.
- On en déduit :
  $$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_7(f)\big) \geqslant 4$$
  Or, par propriété du cours :
  $$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_7(f)\big) \leqslant \dim\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big) = 4$$
- On en conclut :
  $$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_7(f)\big) = 4$$

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable.}}$$

**Commentaire**

Il est possible de rédiger autrement en exhibant une base de vecteurs propres.
Pour ce faire, on définit la famille $\mathcal{F}$ obtenue comme concaténation de bases de $E_0(f)$ et de $\mathrm{Im}(f) \subset E_7(f)$. Plus précisément, on note :

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

Cette famille est libre car est la concaténation de familles libres (puisqu'une base est une famille libre) issues de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.
Ainsi la famille $\mathcal{F}$ est :

× libre,

× de cardinal $\mathrm{Card}\big(\mathcal{F}\big) = 4 = \dim\Big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\Big)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $f$.
On en conclut que $f$ est diagonalisable.

□

***6.*** Généralisation : $f$ est toujours l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, $A$ est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que $f$ et $A$ possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

***a)*** Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur propre colonne associé.
Justifier que $X^tX$ appartient à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de $f$.
En déduire que $\lambda$ est valeur propre de $f$.

*Démonstration.*

- L'énoncé précise que $X$ est un vecteur colonne. Notons le $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$X^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

De plus, comme $X$ est un vecteur propre de $A$, en particulier : $X \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
Cela signifie : $x_1 \neq 0$ `OU` $x_2 \neq 0$. On en déduit : $x_1^2 \neq 0$ `OU` $x_2^2 \neq 0$.

> En conclusion, $X^tX$ est un élément **non nul** de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- D'autre part :

$$\begin{aligned} f\big(X^tX\big) &= AX^tX = (AX)\ {}^tX \\ &= (\lambda X)\ {}^tX && \textit{(car } X \textit{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda\textit{)} \\ &= \lambda\ X^tX \end{aligned}$$

> Ainsi, $X^tX \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ est un vecteur propre de $f$ associé à $\lambda$ qui est elle-même une valeur propre de $f$.

**Commentaire**

On rappelle qu'un vecteur propre est un vecteur **non nul**. Il convient donc de démontrer le caractère non nul de $X^tX$ pour obtenir tous les points.

□

***b)*** Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ et $M$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de $f$ associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes $C_1$ et $C_2$ de $M$, montrer que $\lambda$ est valeur propre de $A$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord comme $M$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ AM}}{f(M)} = \lambda \cdot M$$

- En multipliant de part et d'autre cette égalité par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ AC_1}}{AM\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\shortparallel \\ \lambda \cdot C_1}}{\lambda \cdot M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

- De même, en multipliant de part et d'autre cette égalité par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$AC_2 \ = \ \lambda \cdot C_2$$

- Enfin, comme $M$ est un vecteur propre de $f$, alors, en particulier : $M \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.
On en déduit : $C_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ `OU` $C_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'une (au moins) des colonnes de } M \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda.}$$

**Commentaire**

- La remarque précédente s'applique de nouveau ici : pour que $C_1$ soit un vecteur propre de $M$, il faut démontrer $C_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
- Afin de travailler sur la première (resp. deuxième) colonne de la matrice $A$, on a multiplié à droite par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Cette technique peut être adaptée à un travail sur les lignes. En multipliant à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$), on récupère la première (resp. deuxième) ligne de $A$. Cette technique était déjà présente dans le problème de l'épreuve `EDHEC 2017`. On peut retenir l'idée développée dans le paragraphe par la forme :

$$L \ A \ C$$

qui signifie qu'avec une multiplication à gauche, on effectue une opération sur les (L)ignes, tandis qu'avec une multiplication à droite, on effectue une multiplication sur les (C)olonnes.

□

## Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout $i$ de $\{0, 1, 2\}$, on note $A_i$ l'événement : « on choisit la pièce numérotée $i$ ».
Pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $P_k$ l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro $k$ » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire $X$, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire $Y$, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à $X$ la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à $Y$ la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

***1. a)*** Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord : $[X = 1] = P_1$.
- La famille $(A_0, A_1, A_2)$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X=1]\big) & = & \mathbb{P}(P_1) & \\
 & = & \mathbb{P}(A_0 \cap P_1) + \cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap P_1)} + \mathbb{P}(A_2 \cap P_1) & \textit{(car } A_1 \cap P_1 = \varnothing \textit{ puisque la pièce 1 ne donne que Face)} \\
 & = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_1) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_1) & \textit{(car pour tout } i \in [\![0,2]\!], \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3} \neq 0\textit{)} \\
 & = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times 1 \ = \ \dfrac{1}{2} & \textit{(par définition des pièces 0 et 2)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X=1]\big) \ = \ \frac{1}{2}}$$

**Commentaire**

Cette question est une illustration du cadre classique de la formule des probabilités totales : l'expérience aléatoire débute par un choix et ce choix influence le reste de l'expérience aléatoire. On considère ici l'événement $P_1$, réalisé si Pile est obtenu dès le premier lancer. Il est important de comprendre que la probabilité de cet événement dépend du choix initial de la pièce utilisée pour faire les lancers. L'idée derrière la formule des probabilités totales est de déterminer la probabilité de l'événement $P_1$ pour tous les choix possibles de pièce.
Ce qui se formalise comme suit :

× les choix de la pièce sont représentés par la famille d'événements $(A_0, A_1, A_2)$.
  Cette famille est un système complet d'événements car deux pièces ne peuvent être choisies à la fois (si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$) et car l'une des pièces est forcément choisie ($A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \Omega$).

× on détermine, pour tout $i \in [\![0, 2]\!]$, $\mathbb{P}\big(A_i \cap P_1\big)$.

□

***b)*** Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

*Démonstration.*
Soit $n \geqslant 2$.

- On raisonne comme dans la question précédente.
  On remarque tout d'abord que l'événement $[X=n]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile apparaît au rang $n$. Autrement dit, si et seulement si l'on a obtenu $n-1$ Face suivi d'un Pile. Ainsi :
  $$[X=n] \;=\; F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n$$
- Par la formule des probabilités totales :
  $$\mathbb{P}\big(\,[X=n]\,\big) \;=\; \mathbb{P}\big(A_0 \cap [X=n]\,\big) + \cancel{\mathbb{P}\big(A_1 \cap [X=n]\,\big)} + \cancel{\mathbb{P}\big(A_2 \cap [X=n]\,\big)}$$
  En effet :
  × $A_1 \cap [X=n] = A_1 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n = \varnothing$ puisque la pièce 1 ne donne jamais Pile.
  × $A_2 \cap [X=n] \;=\; A_2 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n \;=\; \varnothing$ puisque la pièce 2 donne toujours Pile, notamment dès le premier lancer.
- On obtient ainsi :

$$\begin{array}{cll}
& \mathbb{P}\big(\,[X=n]\,\big) & \\
= & \mathbb{P}\big(A_0 \cap [X=n]\,\big) \;=\; \mathbb{P}\big(A_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n\big) & \\
= & \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}\big(A_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n\big) & \\
= & \mathbb{P}(A_0) \;\times\; \mathbb{P}_{A_0}(F_1) \;\times\; \ldots \;\times\; \mathbb{P}_{A_0}(F_{n-1}) \;\times\; \mathbb{P}_{A_0}(P_n) & \textit{(car les événements sont indépendants pour } \mathbb{P}_{A_0}\textit{)} \\
= & \dfrac{1}{3} \;\times\; \dfrac{1}{2} \;\times\; \ldots \;\times\; \dfrac{1}{2} \;\times\; \dfrac{1}{2} \;=\; \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \textit{(car la pièce } 0 \textit{ est équilibrée)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{En combinant tous ces résultats, on obtient : } \mathbb{P}\big(\,[X=n]\,\big) \;=\; \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.}$$

**Commentaire**

Il y a une subtilité cachée dans cette question. On utilise le fait que les événements $P_i$ (avec $i \in \mathbb{N}^*$) et $F_j$ (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_0}$. L'idée est qu'une fois la pièce choisie, les lancers sont indépendants. Cependant, ces événements `NE SONT PAS` indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$. Démontrons-le.

- Tout d'abord, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big(P_1 \cap P_2\big) & = & \mathbb{P}\big(A_0 \cap P_1 \cap P_2\big) + \cancel{\mathbb{P}\big(A_1 \cap P_1 \cap P_2\big)} + \mathbb{P}\big(A_2 \cap P_1 \cap P_2\big) \\
& = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}\big(P_1 \cap P_2\big) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}\big(P_1 \cap P_2\big) \\
& = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_1)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_2) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_1)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_2) \\
& = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \;+\; \dfrac{1}{3} \times 1 \times 1 \;=\; \dfrac{5}{12}
\end{array}$$

- Or, comme vu en question ***1.a)*** : $\mathbb{P}(P_1) \;=\; \frac{1}{2}$ et en raisonnant de même : $\mathbb{P}(P_2) \;=\; \frac{1}{2}$.
  Et ainsi :
  $$\mathbb{P}\big(P_1 \cap P_2\big) = \frac{5}{12} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(P_1)\ \mathbb{P}(P_2)$$

□

***c)*** En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$.

*Démonstration.*

- D'après l'énoncé, $X$ prend soit la valeur 0, soit le rang d'apparition du premier Pile.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X(\Omega) = \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}}$$

- Ainsi, la famille $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) = 1$$

et ainsi en réordonnant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X=0]\big) &= 1 - \mathbb{P}\big([X=1]\big) - \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \textit{(d'après les deux questions précédentes)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}} \qquad \textit{(avec } \tfrac{1}{2} \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{3}.}$$

**Commentaire**

- La propriété de la question précédente (***1.b)***) a été démontrée pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $n \geqslant 2$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.
- Il est indispensable de connaître les formules donnant la valeur d'une somme géométrique.
  - Dans le cas d'une somme finie.
    Pour tout $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant n$ :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$$

  - Dans le cas d'une somme infinie.
    Pour tout $q \in \,]-1,1[$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q}$$

**Commentaire**

- Il est aussi possible de traiter cette question directement.
Rappelons tout d'abord que l'événement $[X = 0]$ est réalisé si l'on n'obtient jamais Pile. Ainsi :
$$[X = 0] \;=\; \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i$$
D'après le théorème de la limite monotone :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$$
Pour plus de lisibilité, notons $C_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A_0, A_1, A_2)$ :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n) &= \mathbb{P}(A_0 \cap C_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap C_n) + \cancel{\mathbb{P}(A_2 \cap C_n)} \\ &= \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(C_n) + \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(C_n) \end{aligned}$$
En effet $A_2 \cap C_n = \varnothing$ puisque la pièce 2 donne toujours Pile, notamment dès le premier lancer. Enfin :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{A_0}(C_n) &= \mathbb{P}_{A_0}\big(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\big) = \mathbb{P}_{A_0}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_0}(F_n) = \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \mathbb{P}_{A_1}(C_n) &= \mathbb{P}_{A_1}\big(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\big) = \mathbb{P}_{A_1}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1}(F_n) = 1 \times \ldots \times 1 = 1 \end{aligned}$$
On en conclut :
$$\mathbb{P}(C_n) \;=\; \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(C_n) + \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(C_n) \;=\; \frac{1}{3}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$
car $\frac{1}{2} \in \,]-1, 1[$. On retrouve bien le résultat énoncé.
- Cette démonstration permet de comprendre le résultat :
  × si on choisit la pièce 0, l'événement $[X = 0]$ se produit avec probabilité nulle.
  × si on choisit la pièce 1 (ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{3}$), l'événement $[X = 0]$ est l'événement certain puisqu'on n'obtient que des Face avec cette pièce. Il se produit alors avec probabilité 1.
  × si on choisit la pièce 2, l'événement $[X = 0]$ est l'événement impossible puisqu'on n'obtient que des Pile avec cette pièce. □

*2.* Montrer que $X$ admet une espérance et la calculer.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $X$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\ \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([X = k])$. Alors, pour $n \geqslant 2$ :
$$\begin{aligned} S_n &= \cancel{0 \times \mathbb{P}([X = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([X = 1]) + \sum_{k=2}^{n} k\ \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} k\ \frac{1}{3}\ \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} k\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

- On fait alors apparaître la somme partielle d'une série géométrique dérivée première convergente car de raison $\frac{1}{2} \in \left]-1,1\right[$ :

$$\sum_{k=2}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) - 1 \times 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1 \;=\; 4-1 \;=\; 3$$

- On en déduit que $X$ admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} k\, \mathbb{P}([X=k]) \;=\; \lim_{n\to+\infty} S_n \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{1}{2}\,\cancel{3} \;=\; \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \;=\; 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1}$$

□

*3.* Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance.
En déduire que $X$ possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n(n-1)\, \mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, \mathbb{P}([X=k])$. Alors, pour $n \geqslant 2$ :

$$T_n \;=\; \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \;=\; \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}$$

en reconnaissant la somme partielle d'une série géométrique dérivée deuxième convergente car de raison $\frac{1}{2} \in \left]-1,1\right[$.

- On en déduit que $X(X-1)$ admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) \;=\; \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\, \mathbb{P}([X=k]) \;=\; \lim_{n\to+\infty} T_n \;=\; \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 2 \times 2^3 \;=\; \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \frac{4}{3}}$$

- D'autre part :

$$X^2 \;=\; X(X-1) + X$$

Ainsi, $X^2$ admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance. Enfin, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(X^2\big) \;=\; \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) \;=\; \frac{4}{3}+1 \;=\; \frac{7}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(X^2\big) \;=\; \frac{7}{3}}$$

- Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \;=\; \frac{7}{3} - 1^2 \;=\; \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) \;=\; \frac{4}{3}}$$

**Commentaire**

On a déjà rappelé les formules concernant les sommes géométriques.
Ajoutons celles des sommes géométriques dérivées première et deuxième. Pour $q \in \,]-1,1[$ :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k\ q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

□

*4.* Justifier que $Y$ suit la même loi que $X$.

*Démonstration.*
L'expérience décrite dans l'énoncé fait apparaître une symétrie des rôles de Pile et Face.
Plus précisément, pour chaque côté (Pile et Face), on dispose :
× d'une pièce donnant ce côté avec probabilité $\frac{1}{2}$,
× d'une deuxième pièce donnant toujours ce côté,
× d'une troisième pièce donnant toujours l'autre côté.
De plus, le choix de la pièce se fait de manière équiprobable. Ainsi, la probabilité d'obtenir Pile à un certain rang est la même que la probabilité d'obtenir Face à ce même rang.

> On en déduit que les v.a.r. $X$ et $Y$ qui donnent respectivement le rang d'apparition du premier Pile et du premier Face suivent la même loi.

□

***5. a)*** Montrer que, pour tout entier $j$ supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}([Y=j])$.

*Démonstration.*
L'événement $[X=1] \cap [Y=j]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile apparaît au 1<sup>er</sup> rang et le premier Face apparaît au $j^{\text{ème}}$ rang. Ainsi, cet événement est réalisé par tous les $\infty$-tirages qui commencent par $j-1$ Pile suivis d'un Face :

$$[X=1] \cap [Y=j] \ = \ P_1 \cap \ldots \cap P_{j-1} \cap F_j \ = \ [Y=j]$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X=1] \cap [Y=j]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Y=j]\big).}$$

□

***b)*** Montrer que, pour tout entier $i$ supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=1]) = \mathbb{P}([X=i])$.

*Démonstration.*
On retrouve la question précédente en échangeant les rôles de Face et Pile. Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$[X=i] \cap [Y=1] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i \ = \ [X=i]$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X=i] \cap [Y=1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X=i]\big).}$$

□

***6.*** Loi de $X+Y$.

***a)*** Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

*Démonstration.*
Soit $\omega \in \Omega$ un $\infty$-tirage. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, trois cas se présentent.
- Si $X(\omega) = 0$ c'est qu'on n'a pas obtenu de Pile lors de ce tirage.
  Dans ce cas, on obtient Face dès le premier tirage. Ainsi :

$$(X+Y)(\omega) \ = \ X(\omega) + Y(\omega) \ = \ 0+1 \ = \ 1$$

- Si $X(\omega) = 1$ c'est qu'on obtient Pile lors du premier tirage. Dans ce cas :
  × soit Face n'apparaît pas du tout dans le tirage $\omega$. Alors $Y(\omega) = 0$ et :
  $$(X+Y)(\omega) \ = \ X(\omega) + Y(\omega) \ = \ 1$$
  × soit Face apparaît dans le tirage, ce qui se produit au mieux pour la première fois au $2^{\text{ème}}$ rang. En notant $Y(\omega) = j \in [\![2, +\infty[\![$, on obtient :
  $$(X+Y)(\omega) \ = \ X(\omega) + Y(\omega) \ = \ 1 + j \in [\![3, +\infty[\![$$
  Il est à noter que la v.a.r. $X+Y$ peut prendre toutes les valeurs $k \in [\![3, +\infty[\![$ : il suffit pour cela de considérer un $\infty$-tirage commençant par $k-1$ Pile successifs et suivi d'un Face au $k^{\text{ème}}$ rang.
- Si $X(\omega) = i \in [\![2, +\infty[\![$ c'est qu'on obtient Pile pour la première fois au $i^{\text{ème}}$ rang.
  On a alors obtenu Face lors du $1^{\text{er}}$ tirage.
  $$(X+Y)(\omega) \ = \ X(\omega) + Y(\omega) \ = \ i + 1 \in [\![3, +\infty[\![$$

$$\boxed{(X+Y)(\Omega) \ = \ \{1\} \cup [\![3, +\infty[\![}$$ □

***b)*** Montrer que $\mathbb{P}\big( [X+Y=1] \big) = \dfrac{2}{3}$.

*Démonstration.*
Comme détaillé dans la question précédente, l'événement $[X+Y=1]$ est réalisé si on n'obtient jamais Face ou si on n'obtient jamais Pile. Ainsi :
$$[X+Y=1] \ = \ [X=0] \cup [Y=0]$$
Ces deux événements étant incompatibles, on obtient :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=0]\big) + \mathbb{P}\big([Y=0]\big) & \\ & = & \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \ = \ \dfrac{2}{3} & \textit{(d'après les questions \textbf{1.c)} et \textbf{4.})} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big( [X+Y=1] \big) = \dfrac{2}{3}}$$ □

***c)*** Justifier que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, on a :
$$[X+Y=n] = \big( [X=1] \cap [Y=n-1] \big) \bigcup \big( [Y=1] \cap [X=n-1] \big)$$

*Démonstration.*
Soit $n \geqslant 3$. On procède par double inclusion.
Soit $\omega \in \Omega$ un $\infty$-tirage.

($\subset$) Supposons $\omega \in [X+Y=n]$. Autrement dit : $X(\omega) + Y(\omega) = n$. Comme $n \geqslant 3$, cela démontre, comme déjà vu en question ***6.a)*** que l'$\infty$-tirage $\omega$ contient au moins un Pile (si ce n'est pas le cas, Face apparaît dès le premier lancer et dans ce cas $Y(\omega) = 1$ et $X(\omega) + Y(\omega) = 1$). Notons alors $i$ le rang du premier Pile dans $\omega$. Deux cas se présentent.
  – Soit $i = 1$ : dans ce cas, $X(\omega) = 1$.
    Or, comme $X(\omega) + Y(\omega) = n$ alors $Y(\omega) = n - 1$.
    Ainsi, $\omega \in [X=1] \cap [Y=n-1]$.

– Soit $i \in [\![2, +\infty[\![$ : dans ce cas, l'$\infty$-tirage $\omega$ débute forcément par Face car le premier Pile apparaît au rang $i \geqslant 2$. Ainsi : $Y(\omega) = 1$ et $X(\omega) = i$. Or, comme $X(\omega) + Y(\omega) = n$ alors $i + 1 = n$ ou encore $i = n - 1$.

Ainsi, $\omega \in [Y = 1] \cap [X = n-1]$.

On en déduit : $\omega \in \big([X = 1] \cap [Y = n-1]\big) \bigcup \big([Y = 1] \cap [X = n-1]\big)$.

($\supset$) Supposons $\omega \in \big([X = 1] \cap [Y = n-1]\big) \bigcup \big([Y = 1] \cap [X = n-1]\big)$. Ainsi :

× soit $\omega \in [X = 1] \cap [Y = n-1]$.
Dans ce cas $X(\omega) = 1$, $Y(\omega) = n - 1$ et ainsi : $X(\omega) + Y(\omega) = n$.

× soit $\omega \in [X = n-1] \cap [Y = 1]$.
Dans ce cas $X(\omega) = n - 1$, $Y(\omega) = 1$ et ainsi : $X(\omega) + Y(\omega) = n$.

Ainsi, dans les deux cas $X(\omega) + Y(\omega) = n$ et donc : $\omega \in [X + Y = n]$.

**Commentaire**

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé (il existe $\omega$ réalisant cet événement *i.e.* il existe $\omega$ appartenant à cet événement) si et seulement si le second événement est réalisé (l'élément $\omega$ précédent est aussi élément de cet événement).
- L'énoncé demande de « Justifier » une égalité entre événements. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes. On peut alors supposer qu'une rédaction sans les $\omega$ (en prenant comme hypothèse initiale : $X + Y = n$) serait acceptée. Cependant, il faut bien comprendre que toute v.a.r. $Z$ est une application $Z : \Omega \to \mathbb{R}$. Écrire « si $Z = n$ » signifie donc que l'on considère tous les éléments $\omega \in \Omega$ tels que $Z(\omega) = n$ c'est à dire tous les éléments $\omega$ qui réalisent l'événement $[Z = n]$. D'ailleurs, on peut aussi rédiger en commençant par : « Supposons que l'événement $[X + Y = n]$ est réalisé ».

□

***d)*** En déduire que l'on a, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

*Démonstration.*
Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([X + Y = n]\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = n-1] \ \cup \ [Y = 1] \cap [X = n-1]\big) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
= \ & \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = n-1]\big) + \mathbb{P}\big([Y = 1] \cap [X = n-1]\big) && \textit{(car les deux événements de cette réunion sont incompatibles)} \\
= \ & \mathbb{P}\big([Y = n-1]\big) + \mathbb{P}\big([X = n-1]\big) && \textit{(d'après la question \textbf{5.})} \\
= \ & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && \textit{(d'après la question \textbf{1.b)})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X + Y = n]\big) \ = \ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

□

*7.* Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel $m$, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et $m$ (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

*a)* Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire $X$ lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
1  piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
2  x = 1
3  if piece == 0 then
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
5      while lancer == 0
6          lancer = ---
7          x = ---
8      end
9  else
10     if piece == 1 then
11         x = ---
12     end
13 end
14 disp(x)
```

*Démonstration.*

- En ligne 1, la variable `piece` doit contenir un entier aléatoire compris entre 0 et 2 ce qui permet de coder le choix de la pièce qui sera utilisée pour les tirages.

```
1  piece = grand(1, 1, 'uin', 0, 2)
```

- La structure conditionnelle qui suit (l'utilisation du `if`) permet de coder l'expérience pour chacune des pièces :
  - si la pièce 0 a été initialement choisie, on effectue un premier lancer qui doit donner Pile (représenté par 1) avec probabilité $\frac{1}{2}$ et Face (représenté par 0) avec probabilité $\frac{1}{2}$.

```
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', 0, 1)
```

    On doit alors réitérer cet expérience tant que l'on n'obtient pas Pile, c'est à dire tant que l'on obtient Face, ce qui correspond à la condition :

```
5      while lancer == 0
```

    À chaque tour de boucle (on y rentre tant qu'on n'obtient pas Pile), on effectue un nouveau lancer avec cette pièce :

```
6          lancer = grand(1, 1, 'uin', 0, 1)
```

    On met alors à jour le compteur `x`, en l'incrémentant de 1 à chaque Face obtenu.

```
7          x = x + 1
```

    Ce compteur a été initialisé à 1 de sorte qu'en sortie de boucle il contient ce nombre 1 incrémenté de 1 à chaque Face. Ainsi, `x` contient bien le rang d'apparition du premier Pile.

– si la pièce 1 a été initialement choisie, alors à chaque tirage on obtient Face. Dans ce cas, la v.a.r. $X$ prend la valeur 0. On met à jour la variable `x` en conséquence.

```
    if piece == 1 then
        x = 0
    end
```

– le dernier cas (choix de la pièce 2) n'apparaît pas explicitement dans cette structure conditionnelle (*cf* question suivante).

**Commentaire**

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**. □

***b)*** Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

*Démonstration.*
Comme signalé dans la question précédente, le choix de la pièce 2 n'apparaît pas explicitement dans la structure conditionnelle. Cette pièce renvoie Pile à chaque lancer. Ainsi, si cette pièce est choisie, $X$ prend la valeur 1. La variable `x` qui est initialisée à 1 ne nécessite donc pas de mise à jour.

$$\boxed{\text{Le cas de la pièce numérotée 2 n'apparaît pas explicitement dans le script mais est bien géré par ce programme.}}$$ □

# Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérés dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit $a$ un réel strictement positif et $f$ la fonction définie par : $f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \frac{x}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$.

*1.* Montrer que la fonction $f$ est une densité.

*Démonstration.*

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x \geqslant 0$ : $\frac{x}{a} \geqslant 0$ car $a > 0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} > 0$. Ainsi, $f(x) = \frac{x}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} \geqslant 0$. Donc : $f(x) \geqslant 0$.
  - Si $x < 0$ : $f(x) = 0 \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- La fonction $f$ est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante (nulle) sur cet intervalle.
  La fonction $f$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

**Commentaire**

La continuité sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points suffit ici.
Mais on peut remarquer que $f$ est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 0 = 0, \qquad f(0) \ = \ 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} = 0$$

- Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et vaut 1.
  - Tout d'abord : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt$, car $f$ est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  - La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
    Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\, dt &= \int_0^A \frac{t}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\, dt \\ &= -\int_0^A \frac{-t}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\, dt \\ &= -\left[ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \right]_0^A \\ &= -\left( \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a}} - \mathrm{e}^0 \right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a}} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

□

*Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire $X$ de densité $f$.*

*2.* Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
– Si $x < 0$, alors :

$$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{x} 0\ dt \ = \ 0$$

car $f$ est nulle sur $]-\infty, 0[$.
– Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{0}^{x} f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= \int_{0}^{x} \frac{t}{a}\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\ dt && \textit{(par définition de } f \textit{ sur } [0,x]\textit{)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} && \textit{(d'après le calcul de la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

□

*3.* On considère la variable aléatoire $Y$ définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

***a)*** Montrer que $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

*Démonstration.*
- Notons $\varphi : x \mapsto \dfrac{x^2}{2a}$ de sorte que $Y = \varphi(X)$.

$$Y(\Omega) = (\varphi(X))(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big) \subset \ [0,+\infty[$$

En effet, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) \ = \ [0,+\infty[$ ($\varphi$ ne prend que des valeurs positives).
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  – Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \ [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  – Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\left(\left[\tfrac{X^2}{2a} \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X^2 \leqslant 2a\ x\right]\right) && \textit{(car } a > 0\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{X^2} \leqslant \sqrt{2a\ x}\right]\right) && \textit{(car la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\ |X| \leqslant \sqrt{2a\ x}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[-\sqrt{2a\ x} \leqslant X \leqslant \sqrt{2a\ x}\right]\right) \\ &= F_X\big(\sqrt{2a\ x}\big) - F_X\big(-\sqrt{2a\ x}\big) && \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ &= F_X\big(\sqrt{2a\ x}\big) = 1 - \exp\left(-\frac{\big(\sqrt{2a\ x}\big)^2}{2a}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\cancel{2a}\ x}{\cancel{2a}}\right) \end{aligned}$$

- On en conclut que $X$ admet pour fonction de répartition :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

□

***b)*** On rappelle qu'en **Scilab** la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Écrire un script **Scilab** demandant la valeur de $a$ à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire $X$.

*Démonstration.*

- Dans cette question, on considère : $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

**Commentaire**

Ce premier point amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque $X$ est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. $X$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de $\Omega$ par l'application $X$.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. $X$ :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Il y a donc une différence fondamentale entre les valeurs que peut prendre $X$ et les valeurs de $F_X$ ou $f_X$ dont la définition dépend d'une probabilité $\mathbb{P}$. Par exemple, si l'on sait que $f_X$ est nulle en dehors de $]0, +\infty[$ alors : :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt = 0$$

  Cela ne signifie pas que $X$ ne prend pas de valeurs négatives mais simplement que cela se produit avec probabilité nulle.
- En toute rigueur, on ne peut donc pas confondre $X(\Omega)$ et l'ensemble sur lequel $f_X$ ne s'annule pas (cela n'a pas beaucoup de sens puisque $f_X$ est définie à un nombre fini de points près). Il est donc fréquent que les énoncés précisent, lors de l'introduction de la v.a.r. $X$, son ensemble image :

  *On considère un variable aléatoire $X$,* **à valeurs positives**, *de densité $f$*

  C'est ce qu'on se permet de faire dans cette question.

- Par définition : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$. Ainsi : $X^2 = 2a\, Y$ et $\sqrt{X^2} = \sqrt{2a\, Y}$.
  Enfin, comme on a supposé que $X$ ne prend que des valeurs positives, on obtient :

$$X = \sqrt{2a\, Y}$$

- D'après la question précédente : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On en déduit le script suivant :

```
a = input("Prière d''entrer une valeur strictement positive")
y = grand(1, 1, 'exp', 1)
x = sqrt(2*a*y)
disp(x)
```

□

*4. a)* Vérifier que la fonction $g$ qui à tout réel associe $x^2\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$, est paire.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$g(-x) \;=\; (-x)^2\ \exp\left(-\frac{(-x)^2}{2a}\right) \;=\; x^2\ \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \;=\; g(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ est paire.}}$$

□

*b)* Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire $Z$ suivant la loi normale de paramètre 0 et $a$.

*Démonstration.*
Notons $Z$ une v.a.r. telle que : $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a)$.

- Alors $Z$ admet pour densité la fonction $f_Z$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_Z : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}\ \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)$$

- La v.a.r. $Z$ admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Z) = a$$

De plus, d'après la formule de Kœnig-Huygens : $\mathbb{V}(Z) \;=\; \mathbb{E}\big(Z^2\big) - \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2$. Et ainsi :

$$\mathbb{E}\big(Z^2\big) \;=\; \mathbb{V}(Z) + \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2 \;=\; a + 0 \;=\; a$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z \text{ admet pour moment d'ordre 2 : } \mathbb{E}\big(Z^2\big) = a.}$$

**Commentaire**

- Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. C'est particulièrement le cas dans cet énoncé où les propriétés caractéristiques de lois usuelles (loi exponentielle, loi normale) sont explicitement demandées.
- Profitons-en pour rappeler que si $T$ est une v.a.r. telle que $T \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ alors $T$ admet pour densité la fonction $f_T$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_T : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

De plus, $T$ admet une espérance et une variance données par : $\mathbb{E}(T) = \mu$ et $\mathbb{V}(T) = \sigma^2$.

□

*c)* En déduire que $X$ possède une espérance et la déterminer.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $X$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ f_X(t)\ dt$.

- Comme $f$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$$

- Or, pour tout $t \in [0,+\infty[$ :

$$t\ f_X(t) \ = \ \frac{1}{a}\ t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \ = \ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}\ \frac{1}{\sqrt{a}\ \sqrt{2\pi}}\ t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \ = \ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}\ t^2 f_Z(t)$$

  On a rappelé en question précédente que $Z$ admet un moment d'ordre 2.
  De plus, on a démontré en question ***4.a)*** que la fonction $g : t \mapsto t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}$ est paire. Il en est de même de la fonction $t \mapsto t^2\ f_Z(t)$ qui n'est autre que $g$, à une constante multiplicative près.
  Ainsi :

$$\mathbb{E}\big(Z^2\big) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\ dt \ = \ 2\int_{0}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\ dt \ = \ 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}\ t f_X(t)\ dt$$

- On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t f_X(t)\ dt$ est convergente.
  Ainsi, $X$ admet une espérance qui vérifie :

$$\mathbb{E}\big(Z^2\big) \ = \ 2\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}\ \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet pour espérance : } \mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\ \sqrt{a}}\ \mathbb{E}(Z^2) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2\ \sqrt{a}}\ a \ = \ \frac{\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2}}.}$$

□

***5. a)*** Rappeler l'espérance de $Y$ puis montrer que $X$ possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

*Démonstration.*

- On a démontré en question ***3.a)*** : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y \text{ admet une espérance donnée par : } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1} = 1.}$$

- Par définition : $X^2 = 2a\ Y$. La v.a.r. $X^2$ admet donc une espérance car c'est la transformée affine d'une v.a.r. $Y$ qui admet une espérance.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et par linéarité de l'espérance :}\\ \mathbb{E}\big(X^2\big) = 2a\ \mathbb{E}(Y) = 2a.\end{array}}$$

□

***b)*** En déduire que la variance de $X$ est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\ a}{2}$$

*Démonstration.*
On a démontré en question précédente que $X$ admet un moment d'ordre 2. Ainsi, $X$ admet une variance et par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) \ &= \ \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= \ 2a - \left(\frac{\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2}}\right)^2 \ = \ 2a - \frac{a\pi}{2} \ = \ \frac{4a - a\pi}{2} \ = \ \frac{(4-\pi)\ a}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\ a}{2}}$$

□

*On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.*

***6.*** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $X$.
On note $S_n$ la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} {X_k}^2$.

***a)*** Montrer que $S_n$ est un estimateur sans biais de $a$.

*Démonstration.*
La v.a.r. $S_n$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big({X_k}^2\big) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{\cancel{2}n} \sum_{k=1}^{n} \cancel{2}a && \textit{(car } \mathbb{E}\big(X^2\big) = 2a\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n}a \;=\; a
\end{aligned}$$

Ainsi, $S_n$ admet un biais donné par :

$$b_a(S_n) \;=\; \mathbb{E}(S_n) - a \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } S_n \text{ est un estimateur sans biais du paramètre } a.}$$

□

***b)*** Montrer que $X^2$ possède une variance et que $\mathbb{V}\big(X^2\big) = 4a^2$.

*Démonstration.*
Par définition : $X^2 = 2a\,Y$. Ainsi, $X^2$ admet une variance car c'est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une variance. Par propriété de la variance, on obtient :

$$\mathbb{V}\big(X^2\big) \;=\; \mathbb{V}\big(2a\,Y\big) \;=\; 4a^2\,\mathbb{V}(Y) \;=\; 4a^2\,\frac{1}{1^2} \;=\; 4a^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X^2 \text{ admet une variance donnée par } \mathbb{V}\big(X^2\big) = 4a^2.}$$

□

***c)*** Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de $S_n$ en tant qu'estimateur de $a$.
En déduire que $S_n$ est un estimateur convergent de $a$.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $S_n$ admet un moment d'ordre 2 en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent des moments d'ordre 2.
- Ainsi, $S_n$ admet un risque quadratique. Et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned}
r_a(S_n) &= \mathbb{V}_a(S_n) + \cancel{\big(b_a(S_n)\big)^2} && \textit{(car } S_n \textit{ est un estimateur sans biais)} \\
&= \mathbb{V}_a\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) \;=\; \frac{1}{4n^2}\,\mathbb{V}_a\left(\sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}_a\left({X_k}^2\right) && \textit{(les v.a.r. } X_k \textit{ sont indépendantes donc, d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. } X_k^2 \textit{ le sont aussi)} \\
&= \frac{1}{\cancel{4}n^2} \sum_{k=1}^{n} \cancel{4}a^2 \;=\; \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\,\cancel{n}a^2 \;=\; \frac{a^2}{n}
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$r_a(S_n) \;=\; \frac{a^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Comme } \lim_{n\to+\infty} r_a(S_n) = 0, \text{ on en déduit que } S_n \text{ est un estimateur convergent de } a.}$$ □

**7.** On suppose que $a$ est inférieur ou égal à 1.

***a)*** Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire $S_n$ et en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big( [|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \Big) \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}$$

*Démonstration.*

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que pour toute v.a.r. $U$ qui admet une variance :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big( [|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \big) \;\leqslant\; \frac{\mathbb{V}(U)}{\varepsilon^2}$$

**Commentaire**

Dans cette question, on a considéré l'événement $[|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon]$ avec une inégalité stricte. Habituellement, le résultat est plutôt présenté avec une inégalité large. Cette dernière permet cependant d'obtenir celle utilisée ici. Pour cela, il suffit de remarquer :

$$[|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \;\subset\; [|U - \mathbb{E}(U)| \geqslant \varepsilon]$$

et ainsi, par croissance de l'application $\mathbb{P}$ :

$$\mathbb{P}\big( [|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \big) \;\leqslant\; \mathbb{P}\big( [|U - \mathbb{E}(U)| \geqslant \varepsilon] \big)$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $U = S_n$ qui admet une variance (d'après la question ***6.c)***) et à $\varepsilon > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\big( [|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{P}\big( [|S_n - a| > \varepsilon] \big) & & \dfrac{a^2}{n\ \varepsilon^2} \end{array}$$

On en déduit :

$$-\mathbb{P}\big( [|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) \;\geqslant\; -\frac{a^2}{n\ \varepsilon^2}$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}\big( [|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \leqslant \varepsilon] \big) \;=\; 1 - \mathbb{P}\big( [|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) \;\geqslant\; 1 - \frac{a^2}{n\ \varepsilon^2}$$

- Enfin, comme on a supposé : $0 < a \leqslant 1$, alors, par croissance de la fonction élévation au carré sur $\mathbb{R}_+$ on a :

$$a^2 \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{a^2}{n\ \varepsilon^2} \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big( [|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \Big) \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}.}$$ □

***b)*** Déterminer une valeur de $n$ pour laquelle $\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour $a$ avec niveau de confiance au moins égal à 95%.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big( [|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \big) \ \geqslant\ 1 - \dfrac{1}{n\ \varepsilon^2}$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} [|S_n - a| \leqslant \varepsilon] &= [-\varepsilon \leqslant S_n - a \leqslant \varepsilon] \\ &= [-S_n - \varepsilon \leqslant -a \leqslant -S_n + \varepsilon] \\ &= [S_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant S_n + \varepsilon] \\ &= [a \in [S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon]\ ] \end{aligned}$$

- Ainsi, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, on obtient, par la question précédente :

$$\mathbb{P}\Big( \Big[S_n - \frac{1}{10} \leqslant a \leqslant S_n + \frac{1}{10}\Big] \Big) \ \geqslant\ 1 - \frac{1}{n\ \left(\frac{1}{10}\right)^2} = 1 - \frac{100}{n}$$

On cherche un intervalle de confiance pour $a$ avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.
Il faut donc trouver $n$ tel que : $1 - \dfrac{100}{n} \geqslant 0,95$. Or :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{100}{n} \geqslant 0,95 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{100}{n} \leqslant 0,05 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{n}{100} \geqslant \frac{1}{0,05} \qquad \textit{(car la fonction inverse est strictement croissante sur } ]0, +\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{100}{0,05} \end{aligned}$$

avec : $\dfrac{100}{0,05} = \dfrac{100}{5 \times 10^{-2}} = \dfrac{20}{10^{-2}} = 20 \times 10^2 = 2000$.

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2000,\ \left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right] \text{ est un intervalle de confiance pour } a \text{ avec niveau de confiance au moins égal à 95\%.}}$$

□

# Problème

On considère la fonction $f$ qui à tout réel $x$ associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\ dt$.

*Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

## Partie 1 : étude de $f$

***1. a)*** Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de $x$.

*Démonstration.*
Notons $g : t \mapsto \ln\left(1+t^2\right)$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord : $1+t^2 \geqslant 1$.
  Ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$ :

$$g(t) \ = \ \ln\left(1+t^2\right) \ \geqslant \ \ln(1) = 0$$

- La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ où :
  × $g_1 : t \mapsto 1+t^2$ est :
    – continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale,
    – telle que $g_1(\mathbb{R}) = [1,+\infty[ \ \subset \ ]0,+\infty[$.
  × $g_2 : t \mapsto \ln(t)$, continue sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \geqslant 0$ alors la quantité $f(x)$ est bien définie comme intégrale sur le **segment** $[0,x]$ de la fonction $g$ continue sur $[0,x]$.
  De plus : $\forall t \in [0,x]$, $g(t) \geqslant 0$.

  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant x)$ :

$$f(x) \ = \ \int_0^x g(t)\ dt \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0}$$

  × si $x < 0$ alors la quantité $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\ dt = -\int_x^0 g(t)\ dt$ et bien définie comme opposée de l'intégrale sur le **segment** $[x,0]$ de la fonction $g$ continue sur $[x,0]$.
  De plus : $\forall t \in [x,0]$, $g(t) \geqslant 0$.

  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(x < 0)$ :

$$\int_x^0 g(t)\ dt \ \geqslant \ 0$$

  et ainsi : $f(x) \ = \ \displaystyle\int_0^x g(t)\ dt \ = \ -\int_x^0 g(t)\ dt \ \leqslant \ 0.$

$$\boxed{\forall x < 0,\ f(x) \leqslant 0}$$

**Commentaire**

On illustre dans cette question la rédaction attendue afin de démontrer qu'une composée de fonctions continues est continue. Par la même rédaction, on pourrait démontrer qu'une composée de fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$) est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$) en remplaçant chaque occurrence du terme « continue » par dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$). □

***b)*** Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.

*Démonstration.*

- On a vu dans la question précédente que $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  Elle admet donc une primitive $G$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition :

$$f(x) \ = \ \int_0^x \ g(t) \ dt \ = \ \big[ \ G(t) \ \big]_0^x \ = \ G(x) - G(0)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ car } G \text{ l'est.}}$$

  *($f$ est la somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et d'une constante)*
- De plus :

$$f'(x) \ = \ G'(x) - 0 \ = \ g(x) \ = \ \ln\left(1 + x^2\right)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \ln\left(1 + x^2\right)}$$

**Commentaire**

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction $f$ est la primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule au point 0. On en déduit immédiatement que $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = g(x)$.
- L'intérêt de la démonstration précédente est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers. Imaginons par exemple une fonction $h$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = \int_0^{x^2} \ g(t) \ dt = \big[ \ G(t) \ \big]_0^{x^2} \ = G(x^2) - G(0)$$

  La fonction $h$ `N'EST PAS` une primitive de $g$.
  L'expression ci-dessus permet toutefois de conclure que $h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto x^2$ par $G$ toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ h'(x) = 2x \times G'(x^2) = 2x \times g(x^2) = 2x \ \ \ln\left(1 + x^2\right)$$

- Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de dériver sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

***c)*** En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de $f$).

*Démonstration.*

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = g(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$$

- Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 1$. Ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$ :

$$\ln\left(1 + x^2\right) \ \geqslant \ \ln(1) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}. \text{ La fonction } f' \text{ ne s'annulant qu'en un point} \\ (f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0), \text{ la fonction } f \text{ est même strictement croissante sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$

□

***2. a)*** Montrer que $f$ est impaire.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, intervalle symétrique.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f(-x) \;=\; \int_0^{-x} \ln\left(1+t^2\right)\, dt$$
On effectue le changement de variable $\boxed{\;u = -t\;}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \text{ (et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{ et } \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \\ \bullet\ t = -x \ \Rightarrow\ u = x \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur le segment de bornes $0$ et $x$ (c'est le segment $[0, x]$ si $x \geqslant 0$ ou le segment $[x, 0]$ si $x < 0$).

On obtient finalement :
$$f(-x) \;=\; \int_0^{-x} \ln\left(1+t^2\right)\, dt \;=\; \int_0^{x} \ln\left(1+(-u)^2\right)\, (-\ du) \;=\; -\int_0^{x} \ln\left(1+u^2\right)\, du \;=\; -f(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \text{ et la fonction } f \text{ est impaire.}}$$
□

***b)*** Étudier la convexité de la fonction $f$ et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

*Démonstration.*

- En question ***1.a)***, on a démontré que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f' = g$. En adoptant la même rédaction que dans la question ***1.a)***, on démontre que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f''(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} \times 2x$$
Comme $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$, la quantité $f''(x)$ est du signe de $2x$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est concave sur } ]-\infty, 0] \text{ et convexe sur } [0, +\infty[\text{. La fonction } f \text{ change de} \\ \text{concavité en } 0 \text{, seul point d'inflexion de la courbe représentative de } f.\end{array}}$$
□

**3. a)** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

*Démonstration.*
Remarquons tout d'abord :

$$a + \frac{b}{1+t^2} \ = \ \frac{a\ (1+t^2)+b}{1+t^2} \ = \ \frac{(a+b)+at^2}{1+t^2}$$

Ainsi :

$$\frac{t^2}{1+t^2} \ = \ a + \frac{b}{1+t^2} \ \Leftrightarrow \ \frac{t^2}{1+t^2} \ = \ \frac{(a+b)+at^2}{1+t^2}$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout réel $t$, elle est équivalente, par identification, au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ a & & & = & 1 \end{array}\right. \ \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \ \left\{\begin{array}{rcl} b & = & -1 \\ a & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in \mathbb{R}, \ \frac{t^2}{1+t^2} \ = \ 1 - \frac{1}{1+t^2}.}$$

□

**b)** En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel $x$, on a :

$$f(x) \ = \ x\ \left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt$$

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On calcule $\displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\ dt$ en procédant par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln\left(1+t^2\right) & \quad & u'(t) & = & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment de bornes $0$ et $x$ (c'est le segment $[0,x]$ si $x \geqslant 0$ ou le segment $[x,0]$ si $x < 0$).

On obtient finalement :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\ dt & = & \left[\ t\ \ln\left(1+t^2\right)\ \right]_0^x - \displaystyle\int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\ dt \\ & = & \left(x\ \ln\left(1+x^2\right) - \cancel{0\ \ln(1)}\right) - 2\displaystyle\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\ dt \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & x\ \ln\left(1+x^2\right) - 2\displaystyle\int_0^x 1\ dt + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt \\ & = & x\ \ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \ = \ x\ \left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt}$$

□

*4.* Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

***a)*** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est une intégrale convergente.

*Démonstration.*
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

× $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

× $\forall t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant $2$ $(2 > 1)$.

Ainsi, par critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente.

De plus, comme la fonction $f$ est continue sur $[0, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \text{ est convergente.}}$$

□

***b)*** En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

*Démonstration.*
Soit $x > 0$.

- D'après la question ***3.a)*** :

$$f(x) \; = \; x \; \ln(1+x^2) - 2x + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

- On en déduit, en divisant de part et d'autre par $x \; \ln(1+x^2) \neq 0$ :

$$\frac{f(x)}{x \; \ln(1+x^2)} \; = \; 1 - 2 \, \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \; \ln(1+x^2)} + 2 \, \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt}{x \; \ln(1+x^2)}$$

- Or :

  × $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$.

  × l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente.
  On en déduit que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
  D'autre part, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$ :

$$\lim_{x\to+\infty} 2 \, \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt}{x \; \ln(1+x^2)} \; = \; 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x \; \ln(1+x^2)} \; = \; 1 \text{ et ainsi : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \; \ln(1+x^2).}$$

**Commentaire**

- Dans cette question, il est demandé de démontrer que la fonction $f$ est équivalente à la fonction $h : x \mapsto x \ \ln\left(1+x^2\right)$ au voisinage de $+\infty$. Pour ce faire, il faut systématiquement penser à former le quotient des deux fonctions.
  Il s'agit alors de vérifier :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$$
- Afin de pouvoir appliquer cette définition, on vérifiera au préalable que $h$ ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$ (ici on a : $\forall x > 0,\ h(x) \neq 0$).

□

***c)*** Vérifier que, pour tout réel $x$ strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x \ \ln(x)$$

*Démonstration.*
Soit $x > 0$.

- Remarquons tout d'abord : $1+x^2 \ = \ x^2 \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- On en déduit, par propriété de la fonction ln :
$$\ln\left(1+x^2\right) \ = \ \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \ = \ 2 \ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
- Enfin, d'après la question précédente :
$$\frac{f(x)}{2x \ \ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x \ \ln\left(1+x^2\right)}{2x \ \ln(x)} = \frac{2x \ \ln(x) + x \ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x \ \ln(x)} = 1 + \frac{\cancel{x} \ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\cancel{x} \ \ln(x)}$$
  et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$ alors :
$$1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2 \ \ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x \ \ln(x).}$$

□

***d)*** Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque $x$ est au voisinage de $-\infty$.

*Démonstration.*

- D'après la question ***4.c)*** : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{2x \ \ln(x)} = 1$.
- On pose alors le changement de variable $X = -x$.
  Ainsi, si $x \to +\infty$, $X \to -\infty$. On a alors :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x \ \ln(x)} &= \lim_{X\to-\infty} \frac{f(-X)}{2(-X) \ \ln(-X)} \\ &= \lim_{X\to-\infty} \frac{\cancel{-}f(X)}{\cancel{-}2X \ \ln(-X)} \qquad \textit{(car } f \textit{ est impaire)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit } \lim_{X\to-\infty} \frac{f(X)}{2X \ \ln(-X)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x \ \ln(x)} = 1 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 2x \ \ln(-x).}$$

**Commentaire**

- Si une fonction est paire (resp. impaire) sur $\mathbb{R}$, alors on peut limiter son étude à l'intervalle $[0,+\infty[$ et en déduire le comportement de la fonction sur $]-\infty,0]$.
  Plus précisément :
  × si $f$ est paire sur $\mathbb{R}$ alors la courbe représentative de $f$, $\mathcal{C}_f$, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit notamment que si $f$ admet une limite en $+\infty$, alors elle admet la même limite en $-\infty$.
  × si $f$ est impaire sur $\mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. On en déduit notamment que si $f$ admet une limite en $+\infty$, alors elle admet la limite opposée en $-\infty$.
- On écrit dans cette question $\ln(-X)$. On rappelle que l'écriture $-X$ ne désigne pas obligatoirement une quantité négative. Dans cette question, comme $X<0$, on a $-X>0$ ce qui permet l'écriture de $\ln(-X)$.

$\square$

***5.*** Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

***a)*** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.*
En question ***2.b)*** on a démontré que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $f'=g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En adoptant la même rédaction que dans la question ***1.a)***, on démontre que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^3 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

$\square$

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction $f$, c'est à dire :

$$f(x)=f(0)+\frac{x^1}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

***b)*** Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

*Démonstration.*
Soit $x\in\mathbb{R}$.

- Commençons par déterminer les dérivées successives de $f$.

$$f'(x)=\ln\left(1+x^2\right),\qquad f''(x)=\frac{2x}{1+x^2},\qquad f^{(3)}(x)=\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

- On en déduit :

$$f'(0)=\ln(1)=0,\qquad f''(0)=0,\qquad f^{(3)}(0)=\frac{2}{1}=2$$

Enfin, $f(0)=\displaystyle\int_0^0 \ln\left(1+t^2\right)\,dt=0$.
*(on peut aussi rappeler que $f$ est la primitive qui s'annule au point 0 de $g: t\mapsto \ln\left(1+t^2\right)$)*

$$\boxed{f(0)=f'(0)=f''(0)=0 \quad\text{et}\quad f^{(3)}(0)=2}$$

**Commentaire**

- Dans l'exercice, il est fondamental d'écrire la formule de Taylor-Young jusqu'à l'ordre 3 puisque les dérivées successives de $f$ en 0 sont nulles jusqu'à cet ordre : $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) \neq 0$.
- Dans le programme ECE, il est clairement spécifié que la notion de développement limité n'est abordée que jusqu'à l'ordre 2. C'est pourquoi le concepteur donne l'expression de la formule à l'ordre 3.
- Il est simple de généraliser la formule de Taylor-Young à l'ordre $n$. Plus précisément, si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage du point 0, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

où $f^{(k)}$ représente la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $f$.

☐

*c)* En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$).

*Démonstration.*
D'après la question précédente et par la formule de Taylor-Young rappelée dans l'énoncé :

$$f(x) \;=\; 2\ \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \;=\; \frac{2}{6}\ x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}\ x^3.}$$

☐

***6.*** On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$ :

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
V = log(1 + U .^2)
f = -----
disp(f)
```

*Démonstration.*

- L'idée de la méthode de Monte-Carlo est de faire apparaître $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\ dt$ sous forme d'une espérance qu'on pourra alors approcher à l'aide d'une simulation informatique.
- On considère $U$ une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ de densité : $f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  Notons alors $V$ la v.a.r. définie par $V = g(U) = \ln(1 + U^2)$.

  D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $V$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ f_U(t)\ dt$ est absolument convergente.
  Les fonctions $g$ et $f_U$ étant à valeurs positives, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

  La fonction $t \mapsto g(t)\ f_U(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^0_m$ sur $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ f_U(t)\ dt$ est bien définie.

  $$\boxed{\text{La v.a.r. } V \text{ admet une espérance.}}$$

- Enfin, par définition de $f_U$ on obtient l'espérance de $V$ sous la forme :

$$\mathbb{E}(V) \ = \ \int_0^1 g(t)\ f_U(t)\ dt \ = \ \int_0^1 \ln(1+t^2)\ dt \ = \ f(1)$$

- L'énoncé demande donc de déterminer une valeur approchée de $\mathbb{E}(V)$. L'idée naturelle pour obtenir une approximation de cette espérance est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 100000$ par exemple) la v.a.r. $V$.
    Formellement, on souhaite obtenir un $N$-uplet $(v_1, \dots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un $N$-échantillon $(V_1, \dots, V_N)$ de la v.a.r. $V$.
    *(les v.a.r. $V_i$ sont indépendantes et ont même loi que $V$)*
  - × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \ \simeq \ \mathbb{E}(V)$$

- Cela se traduit de la manière suivante en **Scilab** :
  - × la ligne 1 permet d'obtenir des valeurs $(u_1, \dots, u_{100000})$ qui correspondent à l'observation d'un 100000-échantillon $(U_1, \dots, U_{100000})$ de la v.a.r. $U$.
  - × en ligne 2, on applique la fonction $g$ à tous les éléments du 100000-uplet précédent, ce qui permet d'obtenir des valeurs $(v_1, \dots, v_{100000})$ qui correspondent à l'observation d'un 100000-échantillon $(V_1, \dots, V_{100000})$ de la v.a.r. $V$.
  - × en ligne 3, il faut calculer la moyenne de ces observations.
    On complète donc cette ligne comme suit.

```
3  f = mean(V)
```

**Commentaire**

- Un tel niveau d'explication n'est pas attendu aux concours : l'écriture de la ligne manquante démontre la compréhension de toutes les commandes en question.
  On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
- On a utilisé en ligne 3 une fonction prédéfinie en **Scilab**. D'autres solutions sont possibles. Tout d'abord, on peut utiliser la fonction `sum` :

```
3  f = sum(V) / 100000
```

  On peut aussi effectuer la somme à l'aide d'une boucle :

```
3  S = 0
4  for i = 1:100000
5      S = S + V(i)
6  end
7  f = S / 100000
```

  Étant donné l'espace alloué par le programme (une ligne), le concepteur avait certainement en tête la première ou la deuxième solution. Cependant, il est raisonnable de penser que toute réponse juste sera comptée comme telle. Ainsi, la dernière solution rapporte certainement la totalité des points.

□

## Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel $n$ non nul : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \, dt$.

*7. a)* La valeur donnée à $u_0$ est-elle cohérente avec l'expression générale de $u_n$ ?

*Démonstration.*
Si $n = 0$ alors :

$$\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \, dt \;=\; \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 \, dt \;=\; \int_0^1 1 \, dt \;=\; 1$$

La valeur donnée à $u_0$ est cohérente avec l'expression générale de $u_n$. On peut donc considérer, par la suite, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_n = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \, dt$$

□

*b)* Exprimer $u_1$ à l'aide de la fonction $f$.

*Démonstration.*
Par définition :

$$u_1 \;=\; \int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt \;=\; f(1)$$

$$\boxed{u_1 = f(1)}$$

□

*8. a)* Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0,1]$.

- Comme $t \in [0,1]$ : $\quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \quad$ *(par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0,1]$)*

  ainsi : $\quad 1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$

  et : $\quad 0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \quad$ *(par croissance de la fonction $\ln$ sur $[0,1]$)*

- Rappelons alors : $\ln(2) \leqslant 1$.
  En effet, par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, cette inégalité équivaut à $2 \leqslant e^1$.
  On a donc :

  $$\ln(1+t^2) \;\leqslant\; 1$$

  En multipliant de part et d'autre de cette inégalité par $\left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$, on obtient :

  $$\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} \;\leqslant\; \left(\ln(1+t^2)\right)^n$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$ :

$$\underbrace{\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \, dt}_{= u_n} \;\leqslant\; \underbrace{\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} \, dt}_{= u_{n+1}}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)$ est donc décroissante.

**Commentaire**

Il est possible d'adopter une présentation légèrement différente :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} \,dt - \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n} \,dt \\ &= \int_0^1 \Big(\big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} - \big(\ln(1+t^2)\big)^{n}\Big) \,dt \\ &= \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n} \,\big(\ln(1+t^2) - 1\big) \,dt \end{aligned}$$

On démontre alors : $\ln(1+t^2) - 1 \leqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$, d'où on en déduit :

$$\big(\ln(1+t^2)\big)^{n} \,\big(\ln(1+t^2) - 1\big) \leqslant 0$$

par multiplication par $\big(\ln(1+t^2)\big)^{n} \geqslant 0$.
On conclut par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$).

□

***b)*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Dans la question précédente, on a démontré, pour tout $t \in [0,1]$ :

$$0 \leqslant \ln(1+t^2)$$

Par croissance de la fonction élévation à la puissance $n$ sur $[0,+\infty[$, on en déduit :

$$0 \leqslant \big(\ln(1+t^2)\big)^{n}$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\underbrace{\int_0^1 0 \,dt}_{=\,0} \leqslant \underbrace{\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n} \,dt}_{=\,u_n}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0.}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée par } 0. \text{ Elle est donc convergente vers un réel } \ell \geqslant 0.}$$

□

***9. a)*** Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Dans la question ***8.a)***, on a démontré, pour tout $t \in [0,1]$ :

$$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$$

Par croissance de la fonction élévation à la puissance $n$ sur $[0,+\infty[$, on en déduit :

$$0 \leqslant \big(\ln(1+t^2)\big)^{n} \leqslant \big(\ln(2)\big)^{n}$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^1 0\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(2)\big)^n\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_n & & \big(\ln(2)\big)^n \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n.}$$

□

***b)*** Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ? Sur la série de terme général $u_n$ ?

*Démonstration.*

- D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n$$

- Or, la série $\sum \big(\ln(2)\big)^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\ln(2) \in [0,1[$ (comme on l'a démontré en question ***8.a)***).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum u_n \text{ est convergente.} \\ \text{On en déduit alors que la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite nulle.}\end{array}}$$

**Commentaire**

Si l'on suit l'ordre de la question, on doit d'abord déterminer la nature de la suite $(u_n)$.
On utilise l'encadrement précédent et on remarque :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\ln(2)\big)^n = 0$ car $\ln(2) \in [0,1[$.

Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite nulle.

□

***10. a)*** Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)}\ dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

*Démonstration.*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Dans la question ***8.a)***, on a démontré, pour tout $t \in [0,1]$ :

$$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$$

donc : $$0 \geqslant -\ln(1+t^2) \geqslant -\ln(2)$$

puis : $$1 \geqslant 1-\ln(1+t^2) \geqslant 1-\ln(2)$$

et : $$\frac{1}{1} \leqslant \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)}$$ *(par croissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ avec $1-\ln(2) > 0$)*

enfin : $$\big(\ln(1+t^2)\big)^n \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)}$$ *(en multipliant de part et d'autre par $\big(\ln(1+t^2)\big)^n \geqslant 0$)*

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } t \in [0,1] : 0 \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)}}$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^1 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)} \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_n & & \displaystyle\frac{1}{1-\ln(2)} \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt \ = \ \frac{u_n}{1-\ln(2)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : 0 \ \leqslant \ \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \ \leqslant \ \frac{u_n}{1-\ln(2)}.}$$

□

***b)*** En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$.

*Démonstration.*
Remarquons :

× $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$.

× $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{1-\ln(2)} = 0$ d'après la question ***9.b)***.

$$\boxed{\text{On en déduit, par théorème d'encadrement, que la suite } \left(\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente, de limite nulle.}}$$

□

***c)*** Justifier que, pour tout entier naturel $n$, non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^k \, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \big(\ln(1+t^2)\big)^k \, dt \quad \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ &= \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt.}$$

□

***d)*** En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \; = \; \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \quad &= \quad \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \\ &= \quad \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt - \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{10.b}\textit{))} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ est convergente et admet pour somme } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt.}$$ □

***e)*** Modifier le script présenté à la question ***6)*** pour donner un valeur approchée de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

*Démonstration.*

- Comme en question ***6***, il s'agit d'utiliser la méthode de Monte-Carlo. L'idée est de faire apparaître $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$ sous forme d'une espérance qu'on pourra alors approcher à l'aide d'une simulation informatique.
- On considère $U$ une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ de densité :

$$f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Notons alors $W$ la v.a.r. définie par $W = h(U) = \dfrac{1}{1-\ln(1+U^2)}$ où la fonction $h$ est définie par :

$$h : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $W$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(t) \; f_U(t) \; dt$ est absolument convergente.
  Les fonctions $g$ et $f_U$ étant à valeurs positives, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
  La fonction $t \mapsto h(t) \; f_U(t)$ étant de classe $\mathcal{C}_m^0$ sur $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(t) \; f_U(t) \; dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } W \text{ admet une espérance.}}$$

- Enfin, par définition de $f_U$ on obtient l'espérance de $W$ sous la forme :

$$\mathbb{E}(W) \ = \ \int_0^1 \ h(t) \ f_U(t) \ dt$$

- On peut donc appliquer la méthode de Monte-Carlo. Il s'agit, comme on l'a vu en question ***6*** d'approcher la valeur de $\mathbb{E}(W)$ par la quantité :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} w_i$$

  où $(w_1, \ldots, w_N)$ est un $N$-uplet d'observation du $N$-échantillon $(W_1, \ldots, W_N)$ de la v.a.r. $W$.
- En procédant comme en question ***6***, on obtient :

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
W = 1 / (1 - log(1 + U .^2) )
res = mean(W)
disp(res)
```

□