EDHEC 2018

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas inversible.

2. Déterminer les valeurs propres de A, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de l'exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = AM$$

3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. ***a)*** Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

c) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$, $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1, E_2, E_3, et E_4 puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

5. ***a)*** Déterminer l'image par f des vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Donner les valeurs propres de f puis conclure que f est diagonalisable.

6. Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre colonne associé.
Justifier que $X\,{}^tX$ appartient à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de f.
En déduire que λ est valeur propre de f.

b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. ***a)*** Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance.
En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

5. *a)* Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

6. Loi de $X + Y$.

a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

b) Montrer que $\mathbb{P}\big(\,[X + Y = 1]\,\big) = \dfrac{2}{3}$.

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X + Y = n] = \big(\,[X = 1] \cap [Y = n-1]\,\big) \bigcup \big(\,[Y = 1] \cap [X = n-1]\,\big)$$

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
x = 1
if piece == 0 then
    lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
    while lancer == 0
        lancer = ---
        x = ---
    end
else
    if piece == 1 then
        x = ---
    end
end
disp(x)
```

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérés dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On rappelle qu'en **Scilab** la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire un script **Scilab** demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

4. a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel associe $x^2\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$, est paire.

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètre 0 et a.

c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

5. a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\ a}{2}$$

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.
On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} {X_k}^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.

b) Montrer que X^2 possède une variance et que $\mathbb{V}\big(X^2\big) = 4a^2$.

c) Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a.
En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

7. On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \Big)\ \geqslant\ 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}$$

b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec niveau de confiance au moins égal à 95%.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\ dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. ***a)*** Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2. ***a)*** Montrer que f est impaire.

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3. ***a)*** Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) \ = \ x\ \big(\ln(1+x^2) - 2\big) + 2\ \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ dt$ est une intégrale convergente.

b) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\ \ln(x)$$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \underset{x\to0}{o}(x^3)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$).

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
V = log(1 + U .^2)
f = -----
disp(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \, dt$.

7. ***a)*** La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

8. ***a)*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9. ***a)*** Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

10. ***a)*** Montrer que :

$$0 \ \leqslant \ \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \ \leqslant \ \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n, non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

e) Modifier le script présenté à la question ***6)*** pour donner un valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.