ECRICOME 2018

Exercice I

Partie I

1. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 7A$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$.
- Ainsi : $A^2 - 7A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 7 & -14 \\ 0 & 21 & 0 \\ 7 & -7 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12 I_3$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A^2 - 7A = -12 I_3.}$$

□

b) En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.

Démonstration.
D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = X^2 - 7X + 12 = (X-3)(X-4)$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
Or, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de A.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Sp}(A) \subset \{3, 4\}. \text{ Les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de } A \text{ sont 3 et 4.}}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul P.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si P est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, P$ est toujours un polynôme annulateur puisque :
  $$(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A) = 0$$
  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $Q(X) = (X-5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
  $$Q(A) = (A - 5\, I)\ P(A) = 0$$
  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !). Par exemple, comme $Q(X) = (X-5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

□

c) Trouver alors toutes les valeurs propres de A, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

Démonstration.

- Déterminons $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_3(A) & \iff & (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_3(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(A) & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y - 2z\} \\
& = & \{\begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

Comme $E_3(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 3 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_3(A)$.

$$\boxed{E_3(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Commentaire

Il est important de lire l'énoncé de ce type de questions en entier pour choisir une méthode de résolution. En effet :

× si l'énoncé demande simplement de montrer qu'un réel λ donné est valeur propre d'une matrice A carrée d'ordre 3, alors on vérifie $\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_3) < 3$ pour ce réel λ particulier.
(si A est une matrice carrée d'ordre 2, on vérifie $\det(A - \lambda\, I_2) = 0$*)*

× si l'énoncé demande de montrer qu'un réel λ est valeur propre d'une matrice A carrée d'ordre 3 **et** de déterminer le sous-espace propre associé, alors on détermine directement $E_\lambda(A)$ et comme $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, cela démontre que $E_\lambda(A)$ est bien le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

- Déterminons $E_4(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 4 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_4(A) & \Longleftrightarrow & (A - 4 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & & 0 & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow 2\, L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 2z \\ & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & & & = & 2z \\ & - & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  Finalement, on obtient l'expression de $E_4(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_4(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = 0 \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

  Comme $E_4(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 4 est bien valeur propre de A, d'espace propre associé $E_4(A)$.

$$\boxed{E_4(A) \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de A.

$$\boxed{\text{Ainsi, } A \text{ est inversible.}}$$

- Déterminons les dimensions des sous-espaces propres.

  La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

  × engendre $E_3(A)$,

  × est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

  Ainsi, $\mathcal{F}_1$ est une base de $E_3(A)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\big(E_3(A)\big) = \text{Card}\big(\mathcal{F}_1\big) = 2.}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_4(A)$,

× est libre car constituée d'un vecteur non nul.

Ainsi, $\mathcal{F}_2$ est une base de $E_4(A)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\big(E_4(A)\big) = \text{Card}\,\big(\mathcal{F}_2\big) = 1.}$$

• La matrice A est un matrice carrée d'ordre 3. Or :

$$\dim\big(E_3(A)\big) + \dim\big(E_4(A)\big) \;=\; 3$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est diagonalisable.}}$$

□

2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le noyau de f. En déduire une valeur propre de f et l'espace propre associé.

Démonstration.

• Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \text{Ker}(f) & \iff & f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & BU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ -3x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 6z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & z & = & y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $\text{Ker}(f)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ker}(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \;\text{ et }\; z = 0\} \\
& = & \{(y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \;=\; \{y \cdot (1, 1, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \;=\; \text{Vect}\,((1, 1, 0))
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}\,((1, 1, 0))}$$

- Ainsi : $E_0(f) = \text{Ker}(f) = \text{Vect}\left((1,1,0)\right) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est valeur propre de } f\text{, d'espace propre associé } E_0(f) = \text{Vect}\left((1,1,0)\right).}$$

□

b) Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{rg}(B - 2I_3) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \dim\left(\text{ Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \dim\left(\text{ Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = 2 \end{aligned}$$

En effet, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{rg}(B - 2I_3) = 2}$$

□

c) Calculer $f(e_1 - e_2 - e_3)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1 - e_2 - e_3)\big) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1 - e_2 - e_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(e_1 - e_2 - e_3) = (3, -3, -3).}$$

□

d) Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Démonstration.

- D'après la question ***2.b)*** : $\text{rg}(B - 2I_3) = 2 < 3$.
  On en déduit que la matrice $B - 2I_3$ n'est pas inversible.
  Ainsi, 2 est valeur propre de $B = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\boxed{\text{Le réel 2 est valeur propre de } f.}$$

- D'après la question ***2.c)*** :

$$f(e_1 - e_2 - e_3) = (3, -3, -3) = 3 \cdot (1, -1, -1) = 3 \cdot (e_1 - e_2 - e_3)$$

$$\boxed{\text{Comme } e_1 - e_2 - e_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}\text{, le réel 3 est valeur propre de } f.}$$

- Enfin, on a démontré en ***2.a)*** que 0 est valeur propre de f.
  L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui possède 3 valeurs propres distinctes.

  $$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

- On peut aussi démontrer que 2 est valeur propre de f à l'aide du théorème du rang. Détaillons cette rédaction.
- Comme $B - 2I_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - 2\mathrm{id})$, on en déduit : $\mathrm{rg}(f - 2\mathrm{id}) = 2$.
  Ainsi, d'après le théorème du rang :

  $$\underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{\dim(\mathbb{R}^3)} \quad = \quad \dim\big(\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})\big) \quad + \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim\big(\mathrm{Im}(f-2\mathrm{id})\big)}$$

  On en déduit : $\dim\big(\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})\big) = 1$.
  Comme $E_2(f) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, 2 est valeur propre de f.

□

3. Trouver une matrice P inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous :

⋆ la matrice $D_2 = P^{-1}\ B\ P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

⋆ les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),

⋆ la matrice $D_1 = P^{-1}\ A\ P$ est également diagonale.

Démonstration.

- D'après la question précédente, l'endomorphisme f est diagonalisable.
  Il en est donc de même de la matrice B.
  Il existe donc une matrice inversible P et une matrice D_2 diagonale telles que :

  $$B = PD_2P^{-1}$$

  Plus précisément, la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de B et la matrice D_2 est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).
- Déterminons alors les sous-espaces propres de B.
  - On a vu en question ***2.c)*** que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre 3.

    On en déduit :

    $$E_3(B) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

    Or, comme B est diagonalisable : $\dim\big(E_3(B)\big) + \dim\big(E_0(B)\big) + \dim\big(E_4(B)\big) = 3$.
    Comme tous ces espaces propres sont de dimension 1 au minimum, on obtient :

    $$\dim\big(E_3(B)\big) = \dim\big(E_0(B)\big) = \dim\big(E_4(B)\big) = 1$$

    $$\boxed{\text{Ainsi : } E_3(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).}$$

– D'après la question ***2.a)*** : $E_0(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

– Il reste alors à déterminer $E_2(B)) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (B - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(B) & \iff & (B - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\-3 & 1 & -3\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -3x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & 4y & & & = & 0 \\ & & 2y & & & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & - & y & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_2(B)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(B) & = & \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = 0\} \\
& = & E_4(A) \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

(en reconnaissant l'expression obtenue en ***1.c)****)*

- On obtient donc :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

- Remarquons alors :

– $A \times \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\0 & 3 & 0\\1 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

– $A \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

car, d'après la question ***1.c)***, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

La famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) de $E_3(A)$.
Or : Card $\big(\mathcal{F}_3\big) = 2 = \dim \big(E_3(A)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F}_3 \text{ est une base de } E_3(A).}$$

– $A \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

La famille $\mathcal{F}_4 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (car constituée d'un vecteur non nul) de $E_3(A)$.
Or : Card $\big(\mathcal{F}_4\big) = 1 = \dim \big(E_4(A)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F}_4 \text{ est une base de } E_4(A).}$$

- La matrice A étant diagonalisable, on sait qu'il existe une matrice Q inversible et une matrice D_1 diagonale telles que :
$$A = QD_1Q^{-1}$$
Plus précisément, la matrice Q est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A et la matrice D_1 est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres). On obtient donc :
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \quad \text{et} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ vérifie les conditions énoncées dans le sujet.}}$$

□

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = \dfrac{1}{6}\ A\ X_{n+1} + \dfrac{1}{6}\ B\ X_n$.
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+2} = \dfrac{1}{6}\ D_1\ Y_{n+1} + \dfrac{1}{6}\ D_2\ Y_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- En multipliant à gauche de part et d'autre de l'égalité de définition de la suite matricielle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :
$$\begin{aligned} P^{-1}X_{n+2} &= P^{-1}\left(\frac{1}{6}\ A\ X_{n+1} + \frac{1}{6}\ B\ X_n\right) \\ &= \frac{1}{6}\ P^{-1}A\ X_{n+1} + \frac{1}{6}\ P^{-1}B\ X_n \end{aligned}$$

- Par définition de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $X_n = PY_n$ et $X_{n+1} = PY_{n+1}$. Ainsi :

$$P^{-1}X_{n+2} \;=\; \frac{1}{6}\ P^{-1}AP\ Y_{n+1} + \frac{1}{6}\ P^{-1}BP\ Y_n \;=\; \frac{1}{6}\ D_1\ Y_{n+1} + \frac{1}{6}\ D_2\ Y_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+2} = \frac{1}{6}\ D_1\ Y_{n+1} + \frac{1}{6}\ D_2\ Y_n}$$

□

2. Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\ a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\ a_n \\[2ex] b_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\ b_{n+1} \\[2ex] c_{n+2} &= \dfrac{2}{3}\ c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\ c_n \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par calcul :

$$D_1Y_{n+1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\ a_{n+1} \\ 3\ b_{n+1} \\ 4\ c_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_2Y_n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\ a_n \\ 0 \\ 2\ c_n \end{pmatrix}$$

- On en déduit, par la question précédente :

$$\begin{array}{ccccccc} Y_{n+2} & = & \dfrac{1}{6}\ D_1Y_{n+1} & + & \dfrac{1}{6}\ D_2Y_n & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} & = & \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\ a_{n+1} \\ 3\ b_{n+1} \\ 4\ c_{n+1} \end{pmatrix} & + & \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\ a_n \\ 0 \\ 2\ c_n \end{pmatrix} & = & \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\ a_{n+1} + 3\ a_n \\ 3\ b_{n+1} \\ 4\ c_{n+1} + 2\ c_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+2} = \frac{1}{2}\ a_{n+1} + \frac{1}{2}\ a_n, \quad b_{n+2} = \frac{1}{2}\ b_{n+1} \quad \text{et} \quad c_{n+2} = \frac{2}{3}\ c_{n+1} + \frac{1}{3}\ c_n.}$$

□

3. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.

Démonstration.

- On remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

L'énoncé fournit l'inverse (supposée) de P. Il est donc inutile de calculer cette inverse à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss. Cette rédaction est évidemment acceptée mais pénalisante à terme du fait de la perte de temps qu'elle implique. On détaille ci-dessous cette rédaction qu'il convient de connaître mais qu'il ne faut appliquer que lorsque nécessaire.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 2\, L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, P est inversible.

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow 2\, L_1 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue enfin les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

- Par définition :

$$Y_0 = P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1} X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Commentaire

- Par définition, la matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'inverse de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si :
$$AB = BA = I_n$$
Si c'est le cas, B est notée A^{-1} et on obtient aussi que A est l'inverse de B.
- Dans la démonstration, on utilise le résultat classique suivant :
$$AB = I_n \ \Rightarrow \ A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$
(la propriété réciproque est évidemment vérifiée)
autrement dit :
$$AB = I_n \ \Rightarrow \ AB = BA = I_n$$
Si $AB = I_n$, on dit que la matrice B est **l'inverse à droite** de la matrice A. Ainsi, l'implication précédente signifie que, dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, si A possède une inverse à droite notée B alors A est inversible d'inverse (tout court) B. Si l'on sait que $AB = I_n$, il est donc inutile de vérifier $BA = I_n$ pour conclure quant à l'inversibilité de A.
- Le résultat suivant est évidemment lui aussi vérifié :
$$BA = I_n \ \Rightarrow \ A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$
Si B est **l'inverse à gauche** de A alors B est l'inverse de A.

$\square$

4. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Démonstration.

- La suite (a_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{1}{2}\ a_{n+1} + \frac{1}{2}\ a_n$.
C'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
  - L'équation caractéristique associée à la suite (a_n) est : $x^2 = \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{2}$.
  Notons P le polynôme : $P(X) = X^2 - \frac{1}{2}\ X - \frac{1}{2} = (X-1)(X+\frac{1}{2})$.
  Ce polynôme admet deux racines distinctes : 1 et $-\frac{1}{2}$.
  - On en déduit la formule explicite de (a_n) :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda \times 1^n + \mu \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \mu \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
  où les valeurs λ et μ sont données par le système :
$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrl} \lambda & + & \mu & = & 2 & \quad \textit{(valeur de } a_0\textit{)} \\ \lambda & - & \frac{1}{2}\ \mu & = & 1 & \quad \textit{(valeur de } a_1\textit{)} \end{array} \right.$$
  Résolvons-le.
$$(S) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} \lambda & + & \mu & = & 2 \\ & & -\frac{3}{2}\ \mu & = & -1 \end{array} \right. \overset{L_1 \leftarrow \frac{3}{2} L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} \frac{3}{2}\ \lambda & & & = & 2 \\ & & -\frac{3}{2}\ \mu & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$$

- La suite (b_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}\ b_n$.
  C'est donc une suite géométrique.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\ b_0 = 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

- La suite (c_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+2} = \frac{2}{3}\ c_{n+1} + \frac{1}{3}\ c_n$.
  C'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
  - L'équation caractéristique associée à la suite (c_n) est : $x^2 = \frac{2}{3}\ x + \frac{1}{3}$.
    Notons P le polynôme : $P(X) = X^2 - \frac{2}{3}\ X - \frac{1}{3} = (X-1)(X+\frac{1}{3})$.
    Ce polynôme admet deux racines distinctes : 1 et $-\frac{1}{3}$.
  - On en déduit la formule explicite de (c_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \lambda \times 1^n + \mu \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \lambda + \mu \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

où les valeurs λ et μ sont données par le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrl} \lambda & + & \mu & = & 1 & \quad \textit{(valeur de } c_0\textit{)} \\ \lambda & - & \frac{1}{3}\ \mu & = & -1 & \quad \textit{(valeur de } c_1\textit{)} \end{array} \right.$$

Résolvons-le.

$$(S) \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcr} \lambda & + & \mu & = & 1 \\ & & -\frac{4}{3}\ \mu & = & -2 \end{array} \right. \overset{L_1 \leftarrow \frac{4}{3} L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrcr} \frac{4}{3}\ \lambda & & = & -\frac{2}{3} \\ & -\frac{4}{3}\ \mu & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n.}$$

□

5. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition :

$$X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n - c_n \\ -a_n + b_n \\ -a_n + c_n \end{pmatrix}$$

- On calcule alors :

$$\begin{aligned} \alpha_n = a_n + b_n - c_n &= \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

- Puis :

$$\beta_n = -a_n + b_n = -\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}\gamma_n = -a_n + c_n &= -\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}.}$$

□

6. a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
1  function res = X(n)
2      Xold = [3; 0; -1]
3      Xnew = [3; 0; -2]
4      A = [2,1,-2; 0,3,0; 1,-1,5]
5      B = [1,-1,-1; -3,3,-3; -1,1,1]
6      for i = 2:n
7          Aux = ..........
8          Xold = .........
9          Xnew = .........
10     end
11     res = .........
12 endfunction
```

Démonstration.
Détaillons les différents éléments présents dans cette fonction.

– En ligne 2 et 3, on définit les variables `Xold` et `Xnew`.
Ces deux variables sont initialement affectées aux valeurs X_0 et X_1.

– En ligne 4 et 5, on stocke les matrices A et B dans les variables `A` et `B`.

– De la ligne 6 à la ligne 10, on met à jour les variables `Xold` et `Xnew` de sorte à ce qu'elles contiennent les valeurs successives de la suite matricielle (X_n).

```
6      for i = 2:n
7          Aux = Xold
8          Xold = Xnew
9          Xnew = 1/6 ⋆ A ⋆ Xold + 1/6 ⋆ B ⋆ Aux
10     end
```

Pour ce faire, on a introduit une variable auxiliaire `Aux`.

Détaillons le principe de cette boucle :

× avant le 1^er tour de boucle :

$$\texttt{Xold} \text{ contient } X_0 \quad \text{et} \quad \texttt{Xnew} \text{ contient } X_1$$

lors du 1^er tour de boucle (`i` contient 2) :

`Aux = Xold`	(`Aux` contient X_0, dernière valeur de `Xold`)
`Xold = Xnew`	(`Xold` contient X_1, dernière valeur de `Xnew`)
`Xnew = 1/6 ⋆ A ⋆ Xold + 1/6 ⋆ B ⋆ Aux`	(`Xnew` contient X_2, valeur obtenue par la définition $X_2 = \frac{1}{6}\ AX_1 + \frac{1}{6}\ BX_0$)

× avant le 2^ème tour de boucle, d'après ce qui précède :

$$\texttt{Xold} \text{ contient } X_0, \quad \texttt{Xold} \text{ contient } X_1 \quad \text{et} \quad \texttt{Xnew} \text{ contient } X_2$$

lors du 2^ème tour de boucle (`i` contient 3) :

`Aux = Xold`	(`Aux` contient X_1, dernière valeur de `Xold`)
`Xold = Xnew`	(`Xold` contient X_2, dernière valeur de `Xnew`)
`Xnew = 1/6 ⋆ A ⋆ Xold + 1/6 ⋆ B ⋆ Aux`	(`Xnew` contient X_3, valeur obtenue par la définition $X_3 = \frac{1}{6}\ AX_2 + \frac{1}{6}\ BX_1$)

× ...

× avant le $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle :

$$\texttt{Xold} \text{ contient } X_{n-3}, \quad \texttt{Xold} \text{ contient } X_{n-2} \quad \text{et} \quad \texttt{Xnew} \text{ contient } X_{n-1}$$

lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle (`i` contient n) :

`Aux = Xold`	(`Aux` contient X_{n-2}, dernière valeur de `Xold`)
`Xold = Xnew`	(`Xold` contient X_{n-1}, dernière valeur de `Xnew`)
`Xnew = 1/6 ⋆ A ⋆ Xold + 1/6 ⋆ B ⋆ Aux`	(`Xnew` contient X_n, valeur obtenue par la définition $X_n = \frac{1}{6}\ AX_{n-1} + \frac{1}{6}\ BX_{n-2}$)

– Enfin, il n'y a plus qu'à affecter à `res` la valeur X_n.

```
res = Xnew
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On a démontré dans cette question que si, avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle :

  `Aux` contient X_{i-2}, `Xold` contient X_{i-1} et `Xnew` contient X_i

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  `Aux` contient X_{i-1}, `Xold` contient X_i et `Xnew` contient X_{i+1}

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `Xnew` contient X_n.
- Il est à noter que si on teste la fonction avec une valeur de `n` strictement inférieure à 2, alors on n'entre pas dans la boucle (l'instruction `2:n` crée une matrice ligne vide). Dans ce cas, la variable `Xnew` n'est pas mise à jour et la variable `res` contient à la fin du programme X_1, soit la valeur initialement affectée à `Xnew`. Ainsi, la fonction renvoie la bonne valeur aussi lorsque la variable `n` prend la valeur 1.

□

b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure 1) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.

Figures/ECRICOME_2018/suites_alpha_beta_gamma.pdf

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***5*** :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{4}{3} \simeq -1,33$$

En effet, comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

- On démontre de même, toujours d'après les expressions obtenues en question ***5.*** :

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{11}{6} \simeq 1,8 \quad \text{et} \quad \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{11}{6} \simeq -1,8$$

- Or, d'après la figure :
  - × la suite repérée par × semble converger vers un réel valant approximativement $1,8$.

    $\boxed{\text{Cette représentation graphique correspond à la suite } (\alpha_n).}$
  - × la suite repérée par $\oplus$ semble converger vers un réel valant approximativement $-1,3$.

    $\boxed{\text{Cette représentation graphique correspond à la suite } (\beta_n).}$
  - × la suite repérée par $\Diamond$ semble converger vers un réel valant approximativement $-1,8$.

    $\boxed{\text{Cette représentation graphique correspond à la suite } (\gamma_n).}$

Commentaire

Il est possible de rédiger autrement.
La représentation graphique commençant à 2, on peut calculer :

$$\alpha_2 = \frac{14}{6}, \quad \beta_2 = -1 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = -\frac{11}{6}$$

ce qui permet d'associer chaque représentation graphique à la bonne suite.

□

Exercice 2

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\frac{1}{x+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1, \quad \ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad \ln(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit } \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.}$$

- D'autre part :

$$\ln(x) - \ln(x+1) = -\big(\ln(x+1) - \ln(x)\big) = -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1) = 0$$

$$\boxed{\text{Comme de plus } \frac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\text{, on en déduit } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

□

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in\,]0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} \\[2ex] & = & \dfrac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x\ (x+1)^2} \ = \ \dfrac{-x + (x^2+2x+1) - x^2 - x}{x\ (x+1)^2} \ = \ \dfrac{1}{x\ (x+1)^2} \end{array}$$

Or $x(x+1)^2 > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in\,]0,+\infty[,\ f'(x) > 0.}$$

- On en déduit le tableau de variations de f.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$
Variations de f	‖ $-\infty$	↗ 0

□

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\[2ex] & = & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) + \ln(n) \\[2ex] & = & \dfrac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \ = \ f(n) \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)}$$

□

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'étude en question ***1.b)***, la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. On en déduit :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) < 0$$

- En appliquant cette propriété en $x = n$, on obtient, d'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$$

$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est (strictement) décroissante.}}$

□

e) Écrire une fonction d'en-tête : `function y = u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
1  function y = u(n)
2      S = 0
3      for k = 1:n
4          S = S + 1/k
5      end
6      y = S - log(n)
7  endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce code :

× en ligne 2, on crée la variable `S` dont le but est de contenir, en fin de programme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Cette variable `S` est donc initialisée à 0.

× de la ligne 3 à la ligne 5, on met à jour la variable `S` à l'aide d'une boucle.
Pour ce faire, on ajoute au $k^{\text{ème}}$ tour de boucle la quantité $\frac{1}{k}$.
Ainsi, `S` contient bien $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ en sortie de boucle.

× en ligne 6, on affecte à la variable `y` la valeur $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Commentaire

Pour le calcul de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on peut aussi tirer profit des fonctionnalités **Scilab** :

```
S = sum(1 ./ 1:n)
```

Pour bien comprendre cette instruction, rappelons que :

× l'instruction `1:n` permet de créer la matrice ligne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

× l'opérateur `./` permet d'effectuer la division terme à terme.
Ainsi, l'instruction `1 ./ 1:n` permet de créer la matrice ligne $\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

× la fonction `sum` permet de sommer tous les coefficients d'une matrice.

On obtient donc bien la somme à calculer par cette méthode.

□

2. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} + \ln(n) - \ln(n+1)\right) + \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.c)}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \ = \ \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

□

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave.
  On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= g(1) + g'(1)\ (x-1) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}\ (x-1) \ = \ x - 1 \end{aligned}$$

  On en déduit donc :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ln(x) \ \leqslant \ x - 1$$

  Soit $t \geqslant 0$. En appliquant la propriété ci-dessus à $x = 1 + t \in\ ]0, +\infty[$, on obtient :

$$\ln(1+t) \leqslant (\cancel{1} + t) - \cancel{1} = t$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t \geqslant 0,\ \ln(1+t) \leqslant t.}$$

Commentaire

- Notons tout d'abord que la variable t étant sous la portée d'un quantificateur, elle est muette. Ainsi, le résultat démontré est bien celui souhaité.
- Il est possible de procéder différemment.
  On peut par exemple considérer la fonction $g_1 : x \mapsto \ln(1+x)$ et démontrer qu'elle est concave. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_{g_1}$ est située sous sa tangente au point d'abscisse 0 :

$$\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \ \leqslant \ g_1(0) + g_1'(0)\ (x - 0) = \ln(1) + x = x$$

- On peut aussi considérer la fonction $g_2 : x \mapsto x - \ln(1+x)$, procéder à son étude et conclure quant à son signe :

$$\forall x \geqslant 0,\ g_2(x) \geqslant 0$$

  ce qui correspond à l'inégalité souhaitée.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité précédente à $t = \dfrac{1}{n}$, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et ainsi} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

□

c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto 1 + x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, +\infty[$ car polynomiale sur cet intervalle.
    - telle que $h_1(]-1, +\infty[) \subset]0, +\infty[$.
  - × $h_2 : x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } h \text{ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de tout point de l'intervalle }]-1,+\infty[\text{ et donc en particulier de } 0.}$$

- Ainsi, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0, telle que, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}\,x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \end{aligned}$$

  où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer cette égalité à $x = \dfrac{1}{n}$ pour n dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

  avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ par théorème de composition des limites.

  On peut donc écrire :

$$v_n - v_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et donc } v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.}$$

□

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

Démonstration.
D'après ce qui précède :

× $v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et $\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).
Il en est de même de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

$$\boxed{\text{Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum_{n \geqslant 1} (v_{n+1} - v_n) \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

La seule difficulté de cette démonstration réside dans la rédaction du critère des séries à termes positifs (les arguments à utiliser ont tous été démontrés dans les questions précédentes). C'est donc une question d'application directe du cours qu'il convient de savoir traiter.

□

e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers γ.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par sommation télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \;=\; v_{(n-1)+1} - v_1 \;=\; v_n - v_1$$

  On en déduit : $v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.

- Or, d'après la question précédente, la série $\sum_{n \geqslant 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente.
  On déduit de l'écriture précédente de v_n que la suite (v_n) est convergente, de limite :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = v_1 + \gamma$$

- Enfin :

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{1} = \left(\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} - \cancel{\ln(1)} \right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n) \text{ est convergente, de limite } \lim_{n \to +\infty} v_n = \gamma.}$$

□

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par définition : $u_n \;=\; v_n + \dfrac{1}{n}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente car elle est la somme de suites convergentes.

$$\boxed{\text{De plus, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n + \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \gamma + 0 = \gamma.}$$

Commentaire

- Il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. Il n'est donc pas judicieux de laisser de côté certaines parties.
- Cette question ***3.a)*** ne présente pas de difficulté. Comme dans la question ***2.d)***, on est confronté ici à une question bilan qui consiste simplement à rappeler puis utiliser certains résultats précédents. Ces résultats étant fournis par l'énoncé, cette question peut être traitée même si les questions précédentes ne l'ont pas été.

□

b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$
puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$$

Démonstration.

- Dans ce qui précède, on a démontré que :
  - × la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (question ***2.b***).
  - × la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

  Démontrons alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma$. Pour ce faire, on suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Autrement dit, on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_{n_0} > \gamma$.

  La suite (v_n) étant croissante : $\forall n \geqslant n_0,\ v_n \geqslant v_{n_0}$.
  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\gamma \geqslant v_{n_0}$.
  En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors :
  $$\gamma \geqslant v_{n_0} > \gamma$$
  Ce qui est absurde !
  $$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma.}$$
- En appliquant le résultat précédent à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est croissante (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante) et de limite $-\gamma$, on obtient :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -u_n \leqslant -\gamma$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \gamma.}$$

Commentaire

- L'esprit de l'énoncé semble être d'utiliser directement le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(v_n) \text{ croissante} \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell}$$

- Le résultat encadré ci-dessus est lié à la notion de borne supérieure d'une suite, qui par définition, et sous réserve d'existence, est le plus petit des majorants de la suite. Si on connaît ce vocabulaire, on a accès à un énoncé plus précis du théorème de convergence monotone : toute suite croissante et majorée converge **vers sa borne supérieure**. On peut alors démontrer le résultat précédent :
  - × la suite (v_n) converge (vers ℓ) donc elle est majorée,
  - × la suite (v_n) est croissante.

  Ainsi, d'après le théorème ci-dessus, $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \ell$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité précédente : $u_n - \gamma \geqslant 0$. On en déduit :

$$|u_n - \gamma| \ = \ u_n - \gamma$$

Or, par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_n - \gamma \ = \ v_n + \frac{1}{n} - \gamma \ = \ (v_n - \gamma) + \frac{1}{n} \ \leqslant \ \frac{1}{n}$$

car, d'après ce qui précède : $v_n - \gamma \leqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \gamma| \ \leqslant \ \frac{1}{n}}$$

□

c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question ***1.e)*** a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
n = floor(1/eps) + 1
disp(u(n))
```

Démonstration.

- Ce script a pour but d'afficher une valeur approchée de γ à ε près (où ε est un réel strictement positif fourni par l'utilisateur et stocké dans la variable `eps`).
  Pour ce faire, il faut commencer par trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|u_N - \gamma| \ \leqslant \ \varepsilon$$

- Or, d'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \gamma| \ \leqslant \ \frac{1}{n}$$

  Afin de trouver l'entier N recherché, il suffit de trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{N} \ \leqslant \ \varepsilon$$

  Si c'est le cas, on obtient alors, par transitivité :

$$|u_N - \gamma| \ \leqslant \ \frac{1}{N} \ \leqslant \ \varepsilon$$

- Raisonnons par équivalence pour trouver N :

$$\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad N \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \qquad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

Ainsi, tout entier plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$ convient. En particulier, l'entier $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ convient.

Ce script affiche la valeur u_N où $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. C'est une valeur approchée de γ à ε près. □

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

1. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

Démonstration. On a :

× $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).
Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ est convergente.

Commentaire

La démonstration demandée ici est à peu de choses près celle de la question ***I.2.d)***.

□

2. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.}$$

Commentaire

- L'énoncé demande de « Justifier » le résultat. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles.
- Il est aussi possible ici de procéder par récurrence. Détaillons la rédaction.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

▸ **Initialisation** :

– D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{2k-1} = \dfrac{1}{2-1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

– D'autre part : $\sum\limits_{k=1}^{2} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{2k} = \left(\dfrac{1}{1} + \cancel{\dfrac{1}{2}}\right) - \cancel{\dfrac{1}{2}} = 1$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\text{ i.e. } \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2(n+1)} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{2k}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\right) + \frac{1}{2(n+1)-1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2n+1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n+2}\right) && \textit{(en introduisant } \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+2}\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n).}$

□

b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
& a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha\ (2n-1) + \beta\ n}{n(2n-1)} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{(2\alpha+\beta)\ n - \alpha}{n(2n-1)} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = (2\alpha+\beta)\ n - \alpha && \textit{(en multipliant par } n(2n-1) > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vérifiée pour tout entier non nul n, elle est équivalente, par identification, au système suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\alpha & + & \beta & = & 0 \\ -\alpha & & & = & 1 \end{array} \right.$$

Et enfin : $(S) \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\, L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & \beta & = & 2 \\ -\alpha & & & = & 1 \end{array} \right.$.

$$\boxed{\text{Les réels } \alpha = -1 \text{ et } \beta = 2 \text{ conviennent.}}$$

□

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k = \frac{-1}{k} + \frac{2}{2k-1}$$

- En sommant ces égalités membre à membre, on obtient, par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right) && \textit{(d'après la question } \mathbf{2.b)}\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \cancel{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cancel{2}k} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ = \ 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \\
&= 2 \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \right) \ = \ 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} a_k \ = \ 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}}$$

□

3. ***a)*** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - (\ln(2n) - \ln(n)) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \big((\ln(2) + \cancel{\ln(n)}) - \cancel{\ln(n)}\big) \;=\; \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, en réordonnant : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2).}$$

□

b) Calculer alors $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, la série $\sum a_n$ est convergente.
- Déterminons sa somme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} && \textit{(d'après la question } \textbf{2.c)}\textit{)} \\ &= 2 \ (u_{2n} - u_n + \ln(2)) && \textit{(d'après la question } \textbf{3.a)}\textit{)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \ (\cancel{\gamma} - \cancel{\gamma} + \ln(2)) && \textit{(car comme la suite } (u_n) \textit{ converge vers } \gamma\textit{, il en est de même de sa sous-suite } (u_{2n})\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2).}$$

□

4. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(\frac{k}{n}+1\right)} \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}}$$

□

b) Retrouver alors le résultat de la question ***3.b)***.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$.

- On reconnaît une somme de Riemann, ce qui démontre :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\ dx$$

Or :

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ dx = \left[\ \ln\left(|1+x|\right)\ \right]_0^1 = \left[\ \ln\left(1+x\right)\ \right]_0^1 = \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$$

- Ainsi, d'après la question ***2.c)*** :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ \ln(2)$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien : } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ \ln(2)}$$

□

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.

Démonstration.

- Commençons par décrire l'expérience.
  - Chaque lancer de pièce est une épreuve à deux issues : Pile (issue nommée succès), obtenu avec la probabilité p et Face, obtenu avec la probabilité $1-p$.
  - Ainsi, l'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

  La v.a.r. X compte le nombre de succès obtenu au cours de cette expérience.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).}$$

- L'événement A est réalisé si et seulement si le joueur a obtenu un nombre pair de Pile.
  Comme $n = 3$, ceci ne se produit que si le joueur n'obtient aucun Pile ou en obtient deux.
  On en déduit :
  $$A \ = \ [X=0] \ \cup \ [X=2]$$
  Ainsi, en appliquant $\mathbb{P}$ de part et d'autre :
  $$\begin{array}{rcll}
  \mathbb{P}(A) & = & \mathbb{P}\big(\,[X=0] \ \cup \ [X=2]\,\big) & \\
  & = & \mathbb{P}\big(\,[X=0]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[X=2]\,\big) & \textit{(car } [X=0] \textit{ et } [X=2] \textit{ sont incompatibles)} \\
  & = & \dbinom{3}{0}\ p^0(1-p)^3 + \dbinom{3}{2}\ p^2(1-p)^1 & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(3,p)\textit{)} \\
  & = & \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \ \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + 3\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right) & \textit{(car } p = \dfrac{2}{3}\textit{)} \\
  & = & \dfrac{1}{27} + 3\ \dfrac{4}{27} \ = \ \dfrac{13}{27} &
  \end{array}$$

  $$\boxed{\text{On obtient bien : } \mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}.}$$

□

2. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

Démonstration.

- Le gain du joueur dépend du nombre de Pile obtenus :
  × si le joueur obtient 0 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $0 \times 10 = 0$ euros.
  × si le joueur obtient 1 Pile, il est déclaré perdant et touche : $1 \times (-10) = -10$ euros.
  × si le joueur obtient 2 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $2 \times 10 = 20$ euros.
  × si le joueur obtient 3 Pile, il est déclaré perdant et touche : $3 \times (-10) = -30$ euros.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.}$$

Commentaire

La variable G représente le gain **algébrique** du joueur. Cela signifie que G peut prendre des valeurs positives (en cas de victoire du joueur) ou négatives (en cas de défaite). Si le gain algébrique du joueur est de -30, cela signifie que le joueur doit payer 30 euros.

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{lclclclcl}
\mathbb{P}(\,[G=0]\,) & = & \mathbb{P}(\,[X=0]\,) & = & \binom{3}{0}\, p^0(1-p)^3 & = & \left(\frac{1}{3}\right)^3 & = & \frac{1}{27} \\
\mathbb{P}(\,[G=-10]\,) & = & \mathbb{P}(\,[X=1]\,) & = & \binom{3}{1}\, p^1(1-p)^2 & = & 3\ \frac{2}{3}\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 & = & \frac{6}{27} \\
\mathbb{P}(\,[G=20]\,) & = & \mathbb{P}(\,[X=2]\,) & = & \binom{3}{2}\, p^2(1-p)^1 & = & 3\ \left(\frac{2}{3}\right)^2\ \left(\frac{1}{3}\right)^1 & = & \frac{12}{27} \\
\mathbb{P}(\,[G=-30]\,) & = & \mathbb{P}(\,[X=3]\,) & = & \binom{3}{3}\, p^3(1-p)^0 & = & \left(\frac{2}{3}\right)^3 & = & \frac{8}{27}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\,[G=-30]\,)=\frac{8}{27},\ \mathbb{P}(\,[G=-10]\,)=\frac{6}{27},\ \mathbb{P}(\,[G=0]\,)=\frac{1}{27},\ \mathbb{P}(\,[G=20]\,)=\frac{12}{27}}$$

Commentaire

- Dans cette question, on calcule $\mathbb{P}(\,[G=x]\,)$ pour tout $x \in G(\Omega)$. On peut s'affranchir du dernier calcul (à savoir $\mathbb{P}(\,[G=-30]\,)$), puisque, comme $\left(\,[G=x]\,\right)_{x\in\{-30,-10,0,20\}}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(\,[G=0]\,)+\mathbb{P}(\,[G=-10]\,)+\mathbb{P}(\,[G=20]\,)+\mathbb{P}(\,[G=-30]\,)=1$$

  et donc :

$$\mathbb{P}(\,[G=-30]\,)=1-\mathbb{P}(\,[G=0]\,)-\mathbb{P}(\,[G=-10]\,)-\mathbb{P}(\,[G=20]\,)$$

- Toutefois, il est vivement conseillé de réaliser tous ces calculs et d'utiliser la propriété ci-dessus comme mesure de vérification.

□

3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Démonstration.

- La v.a.r. G admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(G) & = & \displaystyle\sum_{x\in G(\Omega)} x\ \mathbb{P}(\,[G=x]\,) \\
& = & -30\ \mathbb{P}(\,[G=-30]\,)-10\ \mathbb{P}(\,[G=-10]\,)+0\ \mathbb{P}(\,[G=0]\,)+20\ \mathbb{P}(\,[G=20]\,) \\
& = & -30\ \frac{8}{27}-10\ \frac{6}{27}+20\ \frac{12}{27} \\
& = & \dfrac{-\cancel{240}-60+\cancel{240}}{27} \\
& = & \dfrac{-60}{27}\ =\ -\dfrac{20}{9}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{L'espérance de gain est négative donc le jeu n'est pas favorable au joueur.}}$$

(le joueur perd en moyenne environ $2,22$ *euros par partie)* □

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$.

Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.
  - × Si $X(\omega)$ est pair : alors $Y(\omega) = (-1)^{X(\omega)} = 1$. Et dans ce cas :

$$Z(\omega) \ = \ \frac{Y(\omega)+1}{2} \ = \ \frac{2}{2} \ = \ 1$$

  - × Si $X(\omega)$ est impair : alors $Y(\omega) = (-1)^{X(\omega)} = -1$. Et dans ce cas :

$$Z(\omega) \ = \ \frac{Y(\omega)+1}{2} \ = \ \frac{0}{2} \ = \ 0$$

$$\boxed{Y(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad Z(\Omega) = \{0, 1\}}$$

- Comme $Z(\Omega) = \{0, 1\}$, la v.a.r. Z suit une loi de Bernoulli dont le paramètre vaut :

$$\mathbb{P}\big([Z=1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X \text{ est pair}]\big) \ = \ \mathbb{P}(A)$$

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))}$$

□

b) Démontrer que : $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance car elle est finie.
  Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y \ \mathbb{P}\big([Y=y]\big) \\
&= (-1) \times \mathbb{P}\big([Y=-1]\big) + 1 \times \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \\
&= (-1) \times \big(1 - \mathbb{P}\big([Y=1]\big)\big) + \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \\
&= (-1) \times (1 - \mathbb{P}(A)) + \mathbb{P}(A) \\
&= 2\mathbb{P}(A) - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) \ = \ 2\mathbb{P}(A) - 1}$$

□

2. a) Donner la loi de X.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme vu en question } \textbf{\textit{1.}} : X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).}$$

□

b) En déduire que l'on a également :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

puis que : $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

Démonstration.

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y) & = & \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k \ \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{E}(Y) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} \ = \ (-p + (1-p))^n \ = \ (1-2p)^n$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) \ = \ (1-2p)^n}$$

□

3. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

Démonstration.
D'après la question ***1.b)*** et ***2.b)*** :

$$(1-2p)^n \ = \mathbb{E}(Y) \ = \ 2\mathbb{P}(A) - 1$$

On en déduit : $2\mathbb{P}(A) \ = \ 1 + (1-2p)^n$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1 + (1-2p)^n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{(1-2p)^n}{2}}$$

□

4. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ \left[p \leqslant \frac{1}{2} \text{ OU « } n \text{ est pair »}\right]$$

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(1-2p)^n}{2}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ \frac{(1-2p)^n}{2} \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ (1-2p)^n \geqslant 0$$

- Déterminons le signe de $(1-2p)^n$. Deux cas se présentent :
  × si $1-2p \geqslant 0$ (*i.e.* $p \leqslant \frac{1}{2}$) alors $(1-2p)^n \geqslant 0$.
  × si $1-2p < 0$ (*i.e.* $p > \frac{1}{2}$) alors le signe de $(1-2p)^n$ dépend de n. Plus précisément :
    – si n est pair : alors $(1-2p)^n > 0 \geqslant 0$.
    – si n est impair : alors $(1-2p)^n < 0$.

  On en déduit :

$$\begin{aligned} (1-2p)^n \geqslant 0 &\Leftrightarrow (p \leqslant \tfrac{1}{2}) \ \texttt{OU} \ \big((p > \tfrac{1}{2}) \ \texttt{ET} \ (n \text{ est pair})\big) \\ &\Leftrightarrow \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \ \texttt{OU} \ (p > \tfrac{1}{2})\Big) \ \texttt{ET} \ \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \ \texttt{OU} \ (n \text{ est pair})\Big) && \textit{(par distributivité de } \texttt{OU} \textit{ sur } \texttt{ET)} \\ &\Leftrightarrow \text{Vrai} \ \texttt{ET} \ \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \ \texttt{OU} \ (n \text{ est pair})\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \ \texttt{OU} \ (n \text{ est pair})\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ (p \leqslant \tfrac{1}{2}) \ \texttt{OU} \ (n \text{ est pair})}$$

Commentaire

Dans l'énoncé, l'expression demandée est présentée à l'aide de crochets. Cela peut amener à confusion : dans le contexte d'un exercice de probabilité, on préfère, si cela est possible, réserver les crochets à l'écriture d'événements du type $[X \in I]$ où X est une v.a.r. et I une partie de $\mathbb{R}$.

□

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $\mathbb{E}(G) = 10 \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \ k \ \mathbb{P}([X = k])$.

Démonstration.

- Démontrons :

$$G \ = \ 10 \ XY$$

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

× si $X(\omega)$ est pair alors le joueur est déclaré vainqueur. Dans ce cas :

$$G(\omega) \ = \ 10 \ X(\omega) \ = \ 10 \ X(\omega)Y(\omega)$$

car $Y(\omega) = 1$ dans ce cas (*cf* question ***1.a)*** de la partie II).

× si $X(\omega)$ est impair alors le joueur est déclaré perdant. Dans ce cas :

$$G(\omega) \ = \ -10 \ X(\omega) \ = \ 10 \ X(\omega)Y(\omega)$$

car $Y(\omega) = -1$ dans ce cas (*cf* question ***1.a)*** de la partie II).

$$\boxed{G \ = \ 10 \ XY}$$

- Par définition de la v.a.r. Y, on obtient :

$$G \ = \ 10 \ (-1)^X \ X$$

D'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(G) \ = \ \sum_{k \in X(\Omega)} 10 \ (-1)^k \ k \ \mathbb{P}\big([X = k]\big)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) \ = \ 10 \sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k \ k \ \mathbb{P}\big([X = k]\big)}$$

□

2. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \ k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$.

Démonstration.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- Tout d'abord :

$$k \binom{n}{k} = k \ \frac{n!}{k! \ (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \ (n-k)!}$$

- Par ailleurs :

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \ \frac{(n-1)!}{(k-1)! \ ((n-\cancel{1}) - (k-\cancel{1}))!} = \frac{n!}{(k-1)! \ (n-k)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n]\!], \ k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à n éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient n individus)
On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant un élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure un représentant de ces individus).*
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{n}{k}$ possibilités.
On distingue ensuite un élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
(on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite un représentant de ces individus)
Ainsi, il y a $k\ \binom{n}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\binom{n}{1} = n$ possibilités.
On choisit ensuite $k-1$ éléments dans E qui, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
(on choisit d'abord le représentant puis on lui adjoint un groupe de $k-1$ individus)
Ainsi, il y a $n\ \binom{n-1}{k-1}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat. □

3. Montrer que : $\mathbb{E}(G) = -10\ np\ (1-2p)^{n-1}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) &= 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ k\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) && \textit{(d'après la question 1. de la partie III)} \\
&= 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ k \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k} && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \\
&= 10 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\ k \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k} && \textit{(car le terme d'indice 0 est nul)} \\
&= 10 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\ n \binom{n-1}{k-1}\ p^k\ (1-p)^{n-k} && \textit{(d'après la question précédente et car } k \in [\![1,n]\!]\textit{)} \\
&= 10\ n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k}\ p^{k+1}\ (1-p)^{n-(k+1)} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= -10\ np \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}\ p^k\ (1-p)^{(n-1)-k} \\
&= -10\ np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\ (-p)^k\ (1-p)^{(n-1)-k} \\
&= -10\ np\ \big((-p)+(1-p)\big)^{n-1} = -10\ np\ (1-2p)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = -10\ np\ (1-2p)^{n-1}}$$

□

4. Démontrer alors que :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ p \leqslant \dfrac{1}{2}$$

Démonstration.

- On procède de la même manière qu'en question *4.* de la partie II. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-2p)^n \geqslant 0 \\ -10 \ np \ (1-2p)^{n-1} \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-2p)^n \geqslant 0 \\ (1-2p)^{n-1} \geqslant 0 \end{array}\right.$$

- Étudions les signes de $(1-2p)^n$ et $(1-2p)^{n-1}$. Deux cas se présentent :
  × si $1-2p \geqslant 0$ (*i.e.* $p \leqslant \frac{1}{2}$) alors $(1-2p)^n \geqslant 0$ et $(1-2p)^{n-1} \geqslant 0$
  × si $1-2p < 0$ (*i.e.* $p > \frac{1}{2}$) alors les signes des quantités étudiées dépendent de n.
  Plus précisément :
  – si n est pair : alors $(1-2p)^n > 0$ et $(1-2p)^{n-1} < 0$ car $n-1$ est impair.
  – si n est impair : alors $(1-2p)^n < 0$ et $(1-2p)^{n-1} > 0$ car $n-1$ est pair.

On obtient bien : $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-2p)^n \geqslant 0 \\ (1-2p)^{n-1} \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ p \leqslant \dfrac{1}{2}.$

□

5. a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ f(x) = x \ (1-2x)^{n-1}$.

Démonstration.
Dans le cas $n = 1$, la fonction f est la fonction identité : $f : x \mapsto x$.
Étudions maintenant le cas $n \geqslant 2$.

- La fonction f est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ car polynomiale.
- Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (1-2x)^{n-1} + x \ (n-1) \ (1-2x)^{n-2} \ (-2) \\ & = & (1-2x)^{n-2} \ \left((1-2x) - 2(n-1) \ x\right) \\ & = & (1-2x)^{n-2} \ (1-2nx) \end{array}$$

  – Si $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2n}$ alors $f'(x) = 0$.
  – Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $1-2x > 0$ et ainsi $(1-2x)^{n-2} > 0$.
  La quantité $f'(x)$ est donc du signe de $1-2nx$.

- On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{2}$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2n}\right)$	$\searrow$	0

Avec $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2n} \left(1 - \cancel{2} \ \dfrac{1}{\cancel{2}n}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2n} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Commentaire

- Il est plus prudent de traiter le cas $n = 1$ à part. Dans ce cas, $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2}$ coïncident et la fonction f est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Le tableau de variations obtenu est ainsi un cas dégénéré du tableau obtenu lorsque $n \geqslant 2$.
- Si l'on se place du point de vue du jeu, ce cas n'a aucun intérêt pratique.
  En effet, si le joueur n'effectue qu'un lancer :
  × soit il obtient Face et est déclaré vainqueur puisqu'il a obtenu un nombre pair (0) de Pile. Dans ce cas, son gain est de $0 \times 10 = 0$.
  × soit il obtient Pile et est déclaré perdant puisqu'il a obtenu un nombre impair (1) de Pile. Dans ce cas, son gain est de $(-1) \times 10 = -10$.

  L'énoncé aurait pu écarter le cas $n = 1$ (« considérons par la suite un entier $n \geqslant 2$ ») : il est peu probable que le forain attire des clients assurés de ne jamais gagner d'argent en jouant.

□

b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Démonstration.
Le concepteur du jeu souhaite que les conditions $\mathbb{P}(A) \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$ soient vérifiées.
D'après la question ***4.***, ceci équivaut à :

$$p \leqslant \frac{1}{2}$$

On considère donc $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ dans cette question. La rentabilité est optimale lorsque le gain du joueur est le plus faible. Il s'agit donc de trouver la valeur de p qui rend minimale la quantité :

$$\mathbb{E}(G) = -10\ np\ (1 - 2p)^{n-1}$$

Autrement dit, la valeur de p pour laquelle la quantité $f(p) = p\ (1 - 2p)^{n-1}$ est maximale.

- Dans le cas $n = 1$, $f(p) = p$.

  $\boxed{\text{Si } n = 1, \text{ le concepteur doit choisir } p = \frac{1}{2} \text{ (la pièce est alors non truquée).}}$

- Dans le cas $n \geqslant 2$, f atteint son maximum pour $x = \dfrac{1}{2n}$ (*cf* question précédente).

  $\boxed{\text{Si } n \geqslant 2, \text{ le concepteur doit truquer la pièce de sorte que } p = \frac{1}{2n}.}$

□

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du $i^{\text{ème}}$ joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

Démonstration.
On procède comme en partie I. En particulier, on note X_i le nombre de Pile obtenus par le $i^{\text{ème}}$ joueur. On rappelle : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

- Le gain du joueur dépend du nombre de Pile obtenus :
  - × si le joueur obtient 0 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $0 \times 10 = 0$ euros.
  - × si le joueur obtient 1 Pile, il est déclaré perdant et touche : $1 \times (-10) = -10$ euros.
  - × si le joueur obtient 2 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $2 \times 10 = 20$ euros.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G(\Omega) = \{-10, 0, 20\}.}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rclclclcl}
\mathbb{P}\big([G = 0]\big) & = & \mathbb{P}\big([X = 0]\big) & = & \dbinom{2}{0} p^0(1-p)^2 & = & \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 & = & \dfrac{9}{16} \\[2ex]
\mathbb{P}\big([G = -10]\big) & = & \mathbb{P}\big([X = 1]\big) & = & \dbinom{2}{1} p^1(1-p)^1 & = & 2\ \dfrac{1}{4}\ \dfrac{3}{4} & = & \dfrac{6}{16} \\[2ex]
\mathbb{P}\big([G = 20]\big) & = & \mathbb{P}\big([X = 2]\big) & = & \dbinom{2}{2} p^2(1-p)^0 & = & \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 & = & \dfrac{1}{16}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([G = -10]\big) = \dfrac{6}{16},\ \mathbb{P}\big([G = 0]\big) = \dfrac{9}{16},\ \mathbb{P}\big([G = 20]\big) = \dfrac{1}{16}}$$

Commentaire

Comme on l'a mentionné précédemment, l'égalité :

$$\mathbb{P}\big([G = 0]\big) + \mathbb{P}\big([G = -10]\big) + \mathbb{P}\big([G = 20]\big) = 1$$

permet de vérifier que l'on ne s'est pas trompé dans les calculs.

- La v.a.r. G admet une espérance et une variance car c'est une v.a.r. finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(G) & = & \displaystyle\sum_{x \in G(\Omega)} x\ \mathbb{P}\big([G = x]\big) \\[2ex]
& = & -10\ \mathbb{P}\big([G = -10]\big) + 0\ \mathbb{P}\big([G = 0]\big) + 20\ \mathbb{P}\big([G = 20]\big) \\[2ex]
& = & -10\ \dfrac{6}{16} + 20\ \dfrac{1}{16} \ = \ -\dfrac{40}{16} \ = \ -\dfrac{5}{2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = -\dfrac{5}{2}}$$

- Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G^2) &= \sum_{x \in G(\Omega)} x^2 \, \mathbb{P}\big([G = x] \big) \\
&= (-10)^2 \, \mathbb{P}\big([G = -10] \big) + 0^2 \, \mathbb{P}\big([G = 0] \big) + 20^2 \, \mathbb{P}\big([G = 20] \big) \\
&= 100 \, \frac{6}{16} + 400 \, \frac{1}{16} \ = \ \frac{1000}{16} \ = \ \frac{125}{2}
\end{aligned}$$

- On obtient alors $\mathbb{V}(G)$ par la formule de Kœnig-Huygens.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(G) &= \mathbb{E}(G^2) - \big(\mathbb{E}(G)\big)^2 \\
&= \frac{125}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \\
&= \frac{125}{2} - \frac{25}{4} \ = \ \frac{225}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(G) = \frac{225}{4}}$$

□

2. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et $\mathbb{V}(J) = 11250$.

Démonstration.

- Le gain algébrique cumulé des joueurs sur une journée est donné par la v.a.r. : $\sum\limits_{i=1}^{200} G_i$.
  Sur la journée, le gain algébrique du forain est l'opposé de celui des joueurs.

$$\boxed{\text{Ainsi : } J = -\sum_{i=1}^{200} G_i.}$$

Commentaire

On rappelle que les gains des joueurs et du forain sont des gains algébriques et peuvent donc être négatifs ou positifs. Par exemple, sur la journée :
- × si les joueurs ont touché 100 alors le forain touche -100 (ce qui représente une perte cumulée de 100 euros).
- × si les joueurs ont touché -100 (ce qui correspond à une perte cumulée de 100 euros), le forain a touché 100.

- La v.a.r. J admet une espérance comme somme de v.a.r. admettant une espérance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(J) &= \mathbb{E}\left(-\sum_{i=1}^{200} G_i\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{200} \mathbb{E}(G_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \cancel{-}\sum_{i=1}^{200} \frac{\cancel{-}5}{2} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 200 \, \frac{5}{2} \ = \ 500
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(J) = 500}$$

- On fait l'hypothèse raisonnable d'indépendance des v.a.r. X_i, ce qui permet d'établir, par le lemme des coalitions que les v.a.r. $G_i = 10\ (-1)^{X_i}\ X_i$ sont elles aussi indépendantes.
  La v.a.r. J admet une variance comme somme de v.a.r. indépendantes admettant une variance.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(J) & = & \mathbb{V}\left(-\sum\limits_{i=1}^{200} G_i\right) & \\ & = & (-1)^2\ \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{200} G_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{200} \mathbb{V}(G_i) & \textit{(car les v.a.r. } G_i \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{200} \dfrac{225}{4} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 200\ \dfrac{225}{4}\ =\ 11250 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(J) = 11250}$$

Commentaire

- Insistons sur le fait que l'opérateur variance n'est pas linéaire. Cela provient notamment de son comportement vis à vis de la multiplication externe.
  Plus précisément, si X est une v.a.r. qui admet une variance :
  $$\mathbb{V}(aX) \ = \ a^2\ \mathbb{V}(X)$$
- Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes qui admettent une variance, alors :
  $$\mathbb{V}(X+Y) \ = \ \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$
  Pour autant, cela ne signifie pas que la variance est linéaire (le premier point est toujours vérifié). En particulier, dans le cas de l'indépendance, insistons sur la formule :
  $$\mathbb{V}(X-Y) \ = \ \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$
  Cette formule est une source classique d'erreur.
  Rappelons donc : $\mathbb{V}(X-Y) \cancel{=} \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)$.
- Il faut garder en tête que, par définition : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)$.
  Ainsi, $\mathbb{V}(X)$ est forcément un réel positif puisque c'est l'espérance de la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))^2$ qui ne prend que des valeurs positives.

□

3. Justifier que : $\mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([|J-500| \geqslant 400]\big)$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([|J-500| \geqslant 400]\big) & = & \mathbb{P}\big([J-500 \leqslant -400] \cup [J-500 \geqslant 400]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([J-500 \leqslant -400]\big) + \mathbb{P}\big([J-500 \geqslant 400]\big) & \textit{(par incompatibilité des événements)} \\ & = & \mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) + \mathbb{P}\big([J \geqslant 900]\big) \ \geqslant \ \mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([|J-500| \geqslant 400]\big).}$$

Commentaire

- Rappelons que si $x \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon \geqslant 0$:

$$|x| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ -\varepsilon < x < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ (-\varepsilon < x) \ \texttt{ET} \ (x < \varepsilon)$$

- Par négation de cette propriété on obtient la propriété utilisée dans la question précédente :

$$|x| \geqslant \varepsilon \ \Leftrightarrow \ (-\varepsilon \geqslant x) \ \texttt{OU} \ (x \geqslant \varepsilon) \ \Leftrightarrow \ (x \leqslant -\varepsilon) \ \texttt{OU} \ (x \geqslant \varepsilon)$$

□

4. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que : $\mathbb{P}([J \leqslant 100]) \leqslant \dfrac{9}{128}$.

Démonstration.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que pour toute v.a.r. X qui admet une variance :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}\big([|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon] \big) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $X = J$ qui admet une variance (d'après la question **2.**) et à $\varepsilon = 400 > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\big([|J - \mathbb{E}(J)| \geqslant 400] \big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(J)}{400^2} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{P}\big([|J - 500| \geqslant 400] \big) & & \dfrac{11250}{400 \times 400} \end{array}$$

Puis par calcul :

$$\frac{11250}{400 \times 400} = \frac{50 \times 225}{400 \times 400} = \frac{225}{8 \times 100} = \frac{9 \times 25}{8 \times 4 \times 100} = \frac{9}{8 \times 4 \times 4} = \frac{9}{128}$$

- Enfin, on obtient l'inégalité souhaitée à l'aide de la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([J \leqslant 100] \big) \ \leqslant \ \mathbb{P}\big([|J - 500| \geqslant 400] \big) \ \leqslant \ \frac{9}{128}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([J \leqslant 100] \big) \ \leqslant \ \frac{9}{128}}$$

□

5. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([J > 100] \big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big([J \leqslant 100] \big) \ \geqslant \ 1 - \frac{9}{128}$$

Ainsi, le risque que le gain du forain ne dépasse 100 euros sur la journée est de $\dfrac{9}{128}$.
Comme $128 \geqslant 100$:

$$\frac{9}{128} \ \leqslant \ \frac{9}{100}$$

$$\boxed{\text{Les exigences de rentabilité sont bien réalisées : avec un risque inférieur à 10\%, le forain gagne plus de 100 euros dans la journée.}}$$

□