HEC 2017

EXERCICE

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

Démonstration.

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2.}$$

□

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)***, $A^2 - I_2 = 0$.
  On en déduit que le polynôme $P(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de A. Le polynôme P admet donc 1 et -1 comme racines.
  Or, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.
  $$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}.}$$
- Vérifions que 1 est valeur propre de A.
  $$\det(A - I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 1 - 1 = 0$$
  Ainsi, $A - I_2$ n'est pas inversible. Donc 1 est valeur propre de A.
- Vérifions que -1 est valeur propre de A.
  $$\det(A + I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 - 1 = 0$$
  Donc $A + I_2$ n'est pas inversible. Donc -1 est valeur propre de A.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}.}$$

Commentaire

- Étant en présence d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on privilégie ici l'utilisation du déterminant. Cependant, on peut aussi rédiger à l'aide d'un calcul de rang. Par exemple :
  $$\mathrm{rg}(A + I_2) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) < 2 \quad \text{car } L_1 = L_2$$
- Au vu de la première question, introduire un polynôme annulateur est un bon réflexe. Cependant, on peut faire une démonstration directe.
  Détaillons la. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{array}{rcl} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) & \Leftrightarrow & A - \lambda\, I \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda\, I_2) = 0 \end{array}$$
  Or : $\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.
  On obtient bien : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

□

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Démonstration.
La matrice A est carrée d'ordre 2 et admet 2 valeurs propres **distinctes**.

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

□

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (`ans`) **Scilab** suivantes :

```
B = [0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P = [1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P) ⋆ B ⋆ P
```

```
ans  =
    1.   0.   0.
    0. - 1.   0.
    0.   0.   1.
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Scilab** précédente.

Démonstration.
Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D'après la séquence **Scilab**, $P^{-1}BP = D$, d'où $B = PDP^{-1}$.
Ainsi, B est semblable à une matrice diagonale.
Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de D.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}}$$

□

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

Démonstration.

- Le programme **Scilab** précédent nous fournit la diagonalisation de la matrice B :
$$B = PDP^{-1}$$
La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ constituée des colonnes de la matrice P est une base de vecteurs propres de B. Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, le $i^{\text{ème}}$ vecteur de $\mathcal{F}$ est un vecteur propre associé au coefficient diagonal $d_{i,i}$.
- On en déduit :
$$E_{-1}(B) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad E_1(B) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- Ainsi, $\dim(E_{-1}(B)) \geqslant 1$ et $\dim(E_1(B)) \geqslant 2$.
  Or, comme B est diagonalisable :
  $$\dim(E_{-1}(B)) + \dim(E_1(B)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$$
  On en déduit : $\dim(E_{-1}(B)) = 1$ et $\dim(E_1(B)) = 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } E_{-1}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_1(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

Commentaire

- On aurait aussi pu déterminer ces deux sous-espaces propres « à la main ».
- Détaillons la méthode. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-1}(B) & \Leftrightarrow & (B + I_3)\ X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} E_{-1}(B) & = & \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid X \in E_{-1}(B)\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -y \ \texttt{ET} \ z = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc :

  × génératrice de $E_{-1}(B)$,

  × libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

C'est donc une base de $E_{-1}(B)$.

- De même, on démontre : $E_1(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

□

3. a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

Démonstration.
Une matrice M de B_n est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont chaque coefficient vaut soit 0 soit 1.
Une telle matrice est entièrement déterminée par :
× le choix du coefficient m_{11} : 2 possibilités.
× ...
× le choix du coefficient m_{1n} : 2 possibilités.
× le choix du coefficient m_{21} : 2 possibilités.
× ...
× le choix du coefficient m_{2n} : 2 possibilités.
× ...
× le choix du coefficient m_{n1} : 2 possibilités.
× ...
× le choix du coefficient m_{nn} : 2 possibilités.
Il y a donc 2^{n^2} telles matrices.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Card}(B_n) = 2^{n^2}.}$$

□

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

Démonstration.
Une matrice M de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 est entièrement déterminée par :
× la position du 1 sur la $1^{\text{ère}}$ ligne : n possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne)
× la position du 1 sur la $2^{\text{ème}}$ ligne : $n-1$ possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
× la position du 1 sur la $3^{\text{ème}}$ ligne : $n-2$ possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
× ...
× la position du 1 sur la $n^{\text{ème}}$ ligne : 1 possibilité.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
Il existe donc $n\ (n-1)\ (n-2) \cdots 1 = n!$ telles matrices.

L'ensemble des matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 comporte exactement $n!$ éléments.

Commentaire

- Une matrice de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 peut être représentée par le n-uplet $(c_1, \ldots, c_n)$ où $c_i \in [\![1, n]\!]$ est le numéro de colonne où se situe le coefficient égal à 1 de la ligne i.
- Dans cette question, on demande donc de dénombrer l'ensemble des n-uplets d'éléments distincts (il n'y a qu'un 1 sur chaque ligne) de $[\![1, n]\!]$. Autrement dit, on s'intéresse aux n-arrangements de $[\![1, n]\!]$ ou encore aux permutations de $[\![1, n]\!]$.
Il y en a exactement $n!$

□

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :
– id l'endomorphisme identité de E ;
– F le noyau de l'endomorphisme $(u + \mathrm{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \mathrm{id})$;
– p la dimension de F et q la dimension de G.
On suppose que $u \circ u = \mathrm{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \mathrm{id})$ est incluse dans F.

Démonstration.
Il s'agit de montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = F$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = (u - \mathrm{id})(x) = u(x) - x$.
Démontrons que $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$.

$$\begin{array}{rcll} (u+\mathrm{id})(y) & = & u(y) + y & \\ & = & u(u(x) - x) + (u(x) - x) & \textit{(par définition de } y\textit{)} \\ & = & u(u(x)) - \cancel{u(x)} + \cancel{u(x)} - x & \textit{(par linéarité de } u\textit{)} \\ & = & \cancel{x} - \cancel{x} \ = \ 0_E & \textit{(car } u \circ u = \mathrm{id}\textit{)} \end{array}$$

Donc $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = F$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset F}$$

□

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.

Démonstration.
- D'après la question *4.a)*, $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})) = p.}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})) & + & \dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ n & & q & & \end{array}$$

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})) = n - q}$$

- En combinant ces deux résultats, on obtient : $n - q \leqslant p$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } p + q \geqslant n.}$$

□

On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \dots, f_p,\ g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de E.

Démonstration.
- On suppose ici que $\dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})) = p \geqslant 1$. En particulier : $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } -1 \text{ est valeur propre de } u \text{ et } F = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = E_{-1}(u).}$$

- De même, $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})) = q > 1$. En particulier : $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } 1 \text{ est valeur propre de } u \text{ et } G = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = E_1(u).}$$

- On a alors :
  × la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de $E_{-1}(u)$.
  En particulier, c'est donc une famille libre de $E_{-1}(u)$.
  × la famille $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de $E_1(u)$.
  En particulier, c'est donc une famille libre de $E_1(u)$.

  La famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est la concaténation de deux familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F} \text{ est une famille libre de } E.}$$

Commentaire

L'énoncé demande de « Justifier » que $\mathcal{F}$ est une base de G. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes. Ici, il est aussi possible de démontrer que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est libre en revenant à la définition. Ce raisonnement est tout aussi rigoureux mais plus long à mettre en place, ce qui provoque une perte de temps pénalisante pour la suite. Détaillons cette rédaction.

- Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$. On suppose :

$$\lambda_1 \cdot f_1 \quad + \quad \ldots \quad + \quad \lambda_p \cdot f_p \quad + \quad \mu_1 \cdot g_1 \quad + \quad \ldots \quad + \quad \mu_q \cdot g_q \quad = \quad 0_E \quad (*)$$

  En appliquant l'endomorphisme u de part et d'autre, on obtient par linéarité :

$$\begin{array}{rrcl} & u\big(\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_p \cdot f_p + \mu_1 \cdot g_1 + \ldots + \mu_q \cdot g_q\big) & = & u(0_E) \\ \text{puis} & \lambda_1 \cdot u(f_1) + \ldots + \lambda_p \cdot u(f_p) + \mu_1 \cdot u(g_1) + \ldots + \mu_q \cdot u(g_q) & = & 0_E \\ \text{et} & -\lambda_1 \cdot f_1 - \ldots - \lambda_p \cdot f_p + \mu_1 \cdot g_1 + \ldots + \mu_q \cdot g_q & = & 0_E \quad (**) \end{array}$$

  En effet :
  × pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \in F = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. Et ainsi :

$$\begin{array}{ccc} (u + \mathrm{id})(f_i) & = & 0_E \\ \shortparallel & & \\ u(f_i) + \mathrm{id}(f_i) & = & u(f_i) + f_i \end{array}$$

  On en déduit : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u(f_i) = -f_i$.
  × pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $g_j \in G = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$. Et ainsi : $(u - \mathrm{id})(g_j) = 0_E$.
  On obtient de même : $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $u(g_j) = g_j$.
- En sommant membre à membre les égalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\mu_1 \cdot g_1 + \ldots + \mu_q \cdot g_q = 0_E$$

  Or $(g_1, \ldots, g_q)$ est une base de G. En particulier, c'est une famille libre.
  On en déduit : $\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0_{\mathbb{R}}$.
- On reporte dans $(*)$ et on obtient : $\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_p \cdot f_p = 0_E$.
  Or $(f_1, \ldots, f_q)$ est une base de F. En particulier, c'est une famille libre.
  On en déduit : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0_{\mathbb{R}}$.
- Finalement : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q) \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, espace vectoriel de dimension n. Ainsi :
$$\text{Card}(\mathcal{F}) = p + q \leqslant n = \dim(E)$$
Or, d'après la question précédente : $p + q \geqslant n$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } p + q = n.}$$
- En résumé :
  × la famille $\mathcal{F}$ est libre.
  × $\text{Card}(\mathcal{F}) = n = \dim(E)$.
$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q) \text{ est donc une base de } E.}$$
□

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

Démonstration.
- Tout d'abord :
$$\begin{aligned} u(g_1 - f_1) &= u(g_1) - u(f_1) && \textit{(par linéarité de } u\textit{)} \\ &= 1 \cdot g_1 - (-1) \cdot f_1 && \textit{(car } g_1 \in E_1(u) \textit{ et } f_1 \in E_{-1}(u)\textit{)} \\ &= g_1 + f_1 \end{aligned}$$
- On démontre de même : $u(g_1 + f_1) = u(g_1) + u(f_1) = g_1 - f_1$.
$$\boxed{u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1 \quad \text{et} \quad u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1}$$
□

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

Démonstration.
On considère $\mathscr{B}'$ la famille :
$$\mathscr{B}' = (g_1 - f_1,\ g_1 + f_1,\ g_2 - f_2,\ g_2 + f_2, \ldots,\ g_p - f_p,\ g_p + f_p,\ g_{p+1},\ g_{p+2}, \ldots,\ g_q)$$
(qui est bien définie car $p < q$)
- Montrons tout d'abord que $\mathscr{B}'$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_p, \gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_q) \in \mathbb{R}^n$. Supposons :
$$\lambda_1 \cdot (g_1 - f_1) + \mu_1 \cdot (g_1 + f_1) + \ldots + \lambda_p \cdot (g_p - f_p) + \mu_p \cdot (g_p + f_p) + \gamma_{p+1} \cdot g_{p+1} + \ldots + \gamma_q \cdot g_q = 0_E$$
En réordonnant :
$$(\mu_1 - \lambda_1) \cdot f_1 + \ldots + (\mu_p - \lambda_p) \cdot f_p + (\mu_1 + \lambda_1) \cdot g_1 + \ldots + (\mu_p + \lambda_p) \cdot g_p + \gamma_{p+1} \cdot g_{p+1} + \ldots + \gamma_q \cdot g_q = 0_E$$
Or, d'après la question ***4.c)***, $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E.
C'est donc une famille libre. Ainsi :
$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in [\![1, p]\!], & \mu_i - \lambda_i = 0 \\ \forall i \in [\![1, p]\!], & \mu_i + \lambda_i = 0 \\ \forall j \in [\![p+1, q]\!], & \gamma_j = 0 \end{array} \right.$$
Or, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \mu_i & - & \lambda_i & = & 0 \\ \mu_i & + & \lambda_i & = & 0 \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} \mu_i & - & \lambda_i & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_i & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_i & & = 0 \\ & \lambda_i & = 0 \end{array} \right.$$
(par remontées successives)

Ainsi : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_p = \gamma_{p+1} = \ldots = \gamma_q = 0$.
$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' \text{ est libre.}}$$

- On a alors :
  - × la famille $\mathscr{B}'$ est libre.
  - × $\text{Card}(\mathscr{B}') = n = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B}' \text{ est une base de } E.}$$

- Déterminons la matrice de u dans cette base.
  Pour plus de lisibilité, notons : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i = g_i - f_i$ et $s_i = g_i + f_i$.
  On démontre, par le même raisonnement que dans la question précédente :
  $$\forall i \in [\![1,p]\!],\ u(g_i - f_i) = g_i + f_i \quad \text{ et } \quad u(g_i + f_i) = g_i - f_i$$
  La base $\mathscr{B}'$ s'écrit alors : $\mathscr{B}' = (r_1,\ s_1,\ \dots,\ r_i,\ s_i, \dots,\ r_p,\ s_p,\ g_{p+1},\ \dots,\ g_q)$ et :
  $$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in [\![1,p]\!], & u(r_i) = s_i \\ \forall i \in [\![1,p]\!], & u(s_i) = r_i \\ \forall j \in [\![p+1,q]\!], & u(g_j) = g_j \end{array} \right.$$
  On en déduit la matrice représentative de u dans la base $\mathscr{B}'$:
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} u(r_1) & u(s_1) & \dots & u(r_i) & u(s_i) & \dots & u(r_p) & u(s_p) & u(g_{p+1}) & \dots & u(g_q) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ r_1 \\ s_1 \\ \vdots \\ r_i \\ s_i \\ \vdots \\ r_p \\ s_p \\ g_{p+1} \\ \vdots \\ g_q \end{array}$$

$$\boxed{\text{Dans la base } \mathscr{B}', \text{ la matrice de } u \text{ appartient à } B_n.}$$

Commentaire

Cette question est difficile car elle demande de prendre beaucoup d'initiatives.

- Il faut tout d'abord se rendre compte que la base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ ne convient pas. En effet, comme :
  $$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in [\![1,p]\!], & u(f_i) = -f_i \\ \forall i \in [\![1,q]\!], & u(g_i) = g_i \end{array} \right.$$
  la matrice représentative de u dans $\mathcal{F}$ contient des -1 (en plus des 0 et des 1).
- L'idée est alors de créer une base sur laquelle u a pour effet d'échanger les éléments de cette base. Cette idée est guidée par la question précédente dans laquelle on démontre : $u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1$ et $u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1$.

□

Commentaire

Prenons un peu de recul sur le thème développé dans cet exercice.

- Dans cet exercice, on s'intéresse aux endomorphismes involutifs de E, c'est à dire aux applications $s \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifient :

$$s \circ s = \mathrm{id}$$

(cette égalité démontre que s est bijectif de réciproque s)
Les cas les plus simples de telles applications sont : $s = \mathrm{id}$ et $s = -\mathrm{id}$.

- Lors de l'étude de s, on considère généralement les espaces vectoriels suivants :
  × $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$: c'est l'ensemble des vecteurs invariants par s.
  En effet, si $x \in F$, alors : $(s - \mathrm{id})(x) = 0$ et donc $s(x) = x$.
  × $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$: c'est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s.
  En effet, si $x \in G$, alors : $(s + \mathrm{id})(x) = 0$ et donc $s(x) = -x$.

  (on prend ici les notations classiques - dans l'énoncé, les rôles de F et G sont échangés)

  Dès lors, on comprend pourquoi un endomorphisme involutif $s \in \mathscr{L}(E)$ est appelé **symétrie** par rapport à F parallèlement à G.

- On peut aussi étudier les symétries dans le cadre de la réduction.
On suppose que $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$. Alors :

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) = E_1(s) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) = E_{-1}(s)$$

On peut démontrer :

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$$

Cette égalité signifie que tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$.
Autrement dit :

$$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}),\ x = y + z$$

Considérons alors la famille $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_{-1}$ obtenue en concaténant une base $\mathscr{B}_1$ de $E_1(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et une base $\mathscr{B}_{-1}$ de $E_{-1}(s) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$.
Cette famille est libre par construction.
De plus, elle est génératrice de E par la décomposition précédente $E = F + G$ (tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G).

Finalement $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres et s s'écrit dans cette base comme matrice diagonale dont la diagonale ne contient que des 1 et des -1.

- La notion de symétrie n'est pas au programme de la voie ECE.
Toutefois, on peut faire l'étude de tels endomorphismes avec des outils au programme.
C'est donc un candidat idéal pour faire un sujet de concours.

- Cette notion est très liée à la notion de **projecteurs** qui ne sont autres que les endomorphismes idempotents de E, c'est à dire les applications $p \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifient :

$$p \circ p = p$$

Ceci n'est pas non plus au programme mais revient régulièrement pour les raisons citées au-dessus.

PROBLÈME

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.

Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. a) Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $]0, 1]$.

Démonstration.

- La fonction $G_{a,b}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ car elle est la composée $G_{a,b} = g_2 \circ g_1$ où :
  - × $g_1 : x \mapsto -ax - \dfrac{b}{2}x^2$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ car polynomiale,
    - telle que : $g_1([0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : x \mapsto \exp(x)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$G'_{a,b}(x) = (-a - bx)\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) \quad = \quad - \quad \underbrace{(a + bx)}_{> 0} \quad \underbrace{\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)}_{> 0} \quad < \ 0$$

  La fonction $G_{a,b}$ est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $G_{a,b}$ est :
  - × continue sur $[0, +\infty[$,
  - × strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

  Ainsi, $G_{a,b}$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $G_{a,b}([0, +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} G_{a,b}(x), G_{a,b}(0)]$.
  Enfin : $G_{a,b}(0) = \exp(0) = 1$.
  Et : $\lim\limits_{x \to +\infty} G_{a,b}(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G_{a,b} \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur }]0, 1].}$$

□

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \frac{b}{2}x^2 = y$.

Démonstration.
Soit $y > 0$. Notons : $P(x) = \frac{b}{2}\ x^2 + ax - y$.
- Calculons le discriminant du polynôme P :

$$\Delta = a^2 - 4 \times \frac{b}{2} \times (-y) = a^2 + 2by \ > \ 0$$

- On en déduit que P admet exactement deux racines notées r_+ et r_- :

$$r_+ = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2\frac{b}{2}} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b} \qquad \text{et} \qquad r_- = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2\frac{b}{2}} = -\frac{a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$$

- Or $b > 0$ et $y > 0$ donc $a^2 + 2by > a^2$ et $\sqrt{a^2 + 2by} > \sqrt{a^2} = |a| = a$.
  On en déduit que $r_+ > 0$.
  D'autre part, $r_- < 0$ car $a > 0$, $\sqrt{a^2 + 2by} > 0$ et $b > 0$.

$$\boxed{\text{L'équation } ax + \frac{b}{2}x^2 = y \text{ admet deux solutions : } r_+ > 0 \text{ et } r_- < 0.}$$

□

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.
Quelle est, pour tout $u \in [0, 1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1 - u)$?

Démonstration.
Soit $u \in [0, 1[$.
- On remarque tout d'abord que $1 - u \in]0, 1]$. Notons alors : $v = G_{a,b}^{-1}(1 - u)$.
  Par définition de $G_{a,b}$ et $G_{a,b}^{-1}$:

$$\begin{array}{rrcl} & v & = & G_{a,b}^{-1}(1-u) \\ \Leftrightarrow & G_{a,b}(v) & = & 1-u \\ \Leftrightarrow & \exp\left(-av - \frac{b}{2}v^2\right) & = & 1-u \\ \Leftrightarrow & -av - \frac{b}{2}v^2 & = & \ln(1-u) \\ \Leftrightarrow & av + \frac{b}{2}v^2 & = & -\ln(1-u) \end{array}$$

- Notons alors : $y = -\ln(1 - u)$. Comme $1 - u \in]0, 1]$, $\ln(1 - u) \in] - \infty, 0]$ et donc $y \geqslant 0$.
  On retombe alors sur l'équation de la question précédente dont la résolution est valable pour $y = 0$ (car on a toujours dans ce cas $\Delta > 0$).
  Cette équation admet pour solution :

$$r_+ = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1-u)}}{b} \ \geqslant 0 \quad \text{et} \quad r_- < 0$$

- Or, comme $G_{a,b}^{-1}$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$, on en déduit :

$$v = G_{a,b}^{-1}(1-u) \ \Leftrightarrow \ v = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1-u)}}{b}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } u \in [0,1[,\ G_{a,b}^{-1}(1-u) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1-u)}}{b}.}$$

□

2. ***a)*** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

Démonstration.

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 G_{a,b}(x)\ dx$ est bien définie comme intégrale sur le segment $[0,1]$ de la fonction $G_{a,b}$ continue sur $[0,1]$.
- × Or : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}\ x^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

  En effet :
  $$x^2\ G_{a,b}(x) = x^2\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}\ x^2\right) = \frac{x^2}{(\mathrm{e}^a)^x} \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{b}{2}x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\times 0 = 0$$
  par croissances comparées.

  × $\forall x \in [1,+\infty[,\ G_{a,b}(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.

  × L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2>1)$.

  Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$ est elle aussi convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 G_{a,b}(x)\ dx \text{ est convergente.}}$$

□

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}b\left(x+\dfrac{a}{b}\right)^2\right)$.
Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

Démonstration.

- On rappelle qu'une v.a.r. X suit la loi normale de paramètres (m,σ^2) si :

  a) $X(\Omega) = \mathbb{R}$,

  b) X admet pour densité la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\ \sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ (définie sur $\mathbb{R}$).
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}b\left(x+\frac{a}{b}\right)^2\right) \\
&= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}b\left(\frac{bx+a}{b}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}\ \sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{b}\ \frac{\cancel{b}(x+\frac{a}{b})}{\cancel{b}}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}\ \sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{a}{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } f \text{ est la densité d'une v.a.r. } X \text{ qui suit la loi } \mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right). \\ \text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) = -\dfrac{a}{b} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{b}.\end{array}}$$

□

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Déduire de la question ***2.b)***, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} -ax - \frac{b}{2}\ x^2 &= -\frac{1}{2}\ b\ \left(2\ \frac{a}{b}\ x + x^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ b\ \left(\left(x + \frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a^2}{b^2}\right) = -\frac{1}{2}\ b\ \left(x + \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} G_{a,b}(x) &= \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x + \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b}\right) \\ &= \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x + \frac{a}{b}\right)^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x + \frac{a}{b}\right)^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times f(x) \end{aligned}$$

- Et ainsi :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \int_0^{+\infty} f(x)\ dx$$

- On rappelle : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) \ \Leftrightarrow\ X^* = \dfrac{X - (-\frac{a}{b})}{\frac{1}{\sqrt{b}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

  On effectue alors le changement de variable $u = \dfrac{x + \frac{a}{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}$, autrement dit $\boxed{u = \sqrt{b}\ \left(x + \frac{a}{b}\right)}$:

  $u = \sqrt{b}\ \left(x + \dfrac{a}{b}\right)$ (et donc $x = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ u - \dfrac{a}{b}$)
  $\hookrightarrow du = \sqrt{b}\ dx$ et $dx = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ du$
  - $x = 0 \ \Rightarrow\ u = \dfrac{a}{\sqrt{b}}$
  - $x = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty$

  Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{b}}u - \dfrac{a}{b}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{a}{\sqrt{b}}, +\infty[$.

Et donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\, dx &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x+\frac{a}{b}\right)^2\right)\ dx \\
&= \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\ u^2\right)\ \frac{1}{\sqrt{b}}\ du \ = \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\ du \\
&= \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \varphi(u)\ du \ = \ 1 - \int_{+\infty}^{\frac{a}{\sqrt{b}}} \varphi(u)\ du \ = \ 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) \ = \ \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)}$$

Commentaire

On utilise ici la propriété : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$

dans le cas particulier où $m = -\dfrac{a}{b}$ et $\sigma^2 = \dfrac{1}{b}$ (propriété à connaître !). □

3. Pour tout $a>0$ et pour tout $b>0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\ \exp\left(-ax-\dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a,b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

Démonstration.
On vérifie les trois propriétés des densités de probabilité.

(i) La fonction $f_{a,b}$ est :
- × continue sur $]-\infty,0[$ car constante sur cet intervalle,
- × continue sur $]0,+\infty[$ comme composée et produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.

(ii) D'autre part, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_{a,b}(x)\geqslant 0$ car :
- × si $x \geqslant 0$: $f_{a,b}(x) = (a+bx)\exp\left(-ax-\dfrac{b}{2}x^2\right) > 0$ (car $a>0$ et $b>0$),
- × si $x<0$: $f_{a,b}(x) = 0 \geqslant 0$.

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx$ car $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
La fonction $f_{a,b}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
Soit $A\in[0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A f_{a,b}(x)\ dx &= \int_0^A (a+bx)\ \exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)\ dx \\
&= -\left[\ \exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)\ \right]_0^A \\
&= -\left(\exp\left(-aA-\frac{b}{2}A^2\right) - \exp(0)\right) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-aA}\times \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}A^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx$ est convergente et vaut 1.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_{a,b}(x)\ dx$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_{a,b}(x)\ dx$.
- La fonction $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x f_{a,b}(x)\ dx$$

- Soit $A \in [0,+\infty[$.
La fonction $x \mapsto x\ f_{a,b}(x)$ est continue par morceaux sur $[0,A]$.
On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & f_{a,b}(x) & v(x) & = & -G_{a,b}(x) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A x\ f_{a,b}(x)\ dx &= \Big[-x\ G_{a,b}(x) \Big]_0^A + \int_0^A G_{a,b}(x)\ dx \\ &= -(A\ G_{a,b}(A) - 0) + \int_0^A G_{a,b}(x)\ dx \end{aligned}$$

De plus, par croissances comparées :

$$A\ G_{a,b}(A) = A\ \exp\left(-aA - \frac{b}{2}\ A^2\right) = \frac{A}{(\mathrm{e}^a)^A} \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{b}{2}A^2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$$

Et, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$ est convergente d'après la question ***2.a)*** :

$$\int_0^A x\ f_{a,b}(x)\ dx \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une espérance et que } \mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx.}$$

□

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.c)*** :

$$\forall u \in [0,1[,\ G_{a,b}^{-1}(1-u) = \frac{-a+\sqrt{a^2-2b\ \ln(1-u)}}{b}$$

On remarque :

$$-\ln(1-u) = y \ \Leftrightarrow\ \ln(1-u) = -y \ \Leftrightarrow\ 1-u = \mathrm{e}^{-y} \ \Leftrightarrow\ u = 1-\mathrm{e}^{-y}$$

Si $y \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-y} \in \,]0,1]$ et donc $u \in [0,1[$.
On peut donc appliquer la formule précédente et on obtient :

$$G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-y}) = \frac{-a+\sqrt{a^2+2b\ y}}{b}$$

- Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, $Y(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi, d'après ce qui précède : $X = G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y})$.

On a alors, pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) & = & \mathbb{P}\left(\left[G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y}) \ \geqslant\ x\right]\right) & \\
 & = & \mathbb{P}\left(\left[\mathrm{e}^{-Y} \ \leqslant\ G_{a,b}(x)\right]\right) & \textit{(par stricte décroissance de } G_{a,b} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
 & = & \mathbb{P}\left([-Y \ \leqslant\ \ln(G_{a,b}(x))]\right) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,1]\textit{)} \\
 & = & \mathbb{P}\left([Y \ \geqslant\ -\ln(G_{a,b}(x))]\right) & \\
 & = & 1-\mathbb{P}\left([Y \ <\ -\ln(G_{a,b}(x))]\right) & \\
 & = & 1-F_y(-\ln(G_{a,b}(x))) & \textit{(car } Y \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\
 & = & \cancel{1}-\left(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-(-\ln(G_{a,b}(x)))}\right) & \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } -\ln(G_{a,b}(x)) \geqslant 0\textit{)} \\
 & = & \mathrm{e}^{\ln(G_{a,b}(x))} \ = \ G_{a,b}(x) &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ \mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de traiter cette question même sans avoir traité la question ***1.c)***. Précisons ci-dessous cette rédaction :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{-a+\sqrt{a^2+2bY}}{b} \geqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[-a+\sqrt{a^2+2bY} \geqslant bx\right]\right) && \textit{(car } b>0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{a^2+2bY} \geqslant a+bx\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[a^2+2bY \geqslant (a+bx)^2\right]\right) && \textit{(par stricte croissance de la fonction élévation au carré sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[2bY \geqslant (a+bx)^2-a^2\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[Y \geqslant \frac{1}{2b}\left((a+bx)^2-a^2\right)\right]\right) && \textit{(car } 2b>0\textit{)}
\end{aligned}$$

On remarque alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2b}\left((a+bx)^2-a^2\right) &= \frac{1}{2b}\left((\cancel{a^2}+2ab\,x+b^2x^2)-\cancel{a^2}\right) \\
&= a\,x+\frac{b}{2}\,x^2
\end{aligned}$$

Et, en reprenant le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) &= \mathbb{P}\left(\left[Y \geqslant a\,x+\frac{b}{2}\,x^2\right]\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\left[Y < a\,x+\frac{b}{2}\,x^2\right]\right) \\
&= \cancel{1}-\left(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-(a\,x+\frac{b}{2}\,x^2)}\right) && \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a\,x+\frac{b}{2}\,x^2 \geqslant 0\textit{)} \\
&= \exp\left(-a\,x-\frac{b}{2}\,x^2\right) \;=\; G_{a,b}(x)
\end{aligned}$$

- En réalité, il s'agit de deux présentations différentes d'une seule et même démonstration. Il s'agit simplement « d'inverser » l'inégalité : $X \geqslant x$, c'est-à-dire d'isoler Y.
  - × dans la première rédaction, on sait que $X = G_{a,b}^{-1}(Y)$ et il suffit donc d'appliquer $G_{a,b}$ de part et d'autre. On aboutit tout de suite à l'inégalité : $Y \geqslant a\,x+\dfrac{b}{2}\,x^2$.
    (notée $Y \geqslant -\ln(G_{a,b}(x))$ dans la démonstration)
  - × dans la deuxième rédaction, on prend moins de recul : on part de la définition de X donnée par l'énoncé et, par opérations successives, on tombe encore une fois sur l'inégalité : $Y \geqslant a\,x+\dfrac{b}{2}\,x^2$.

□

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

Démonstration.

- Notons $g : x \mapsto \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2b\ x}}{b}$. Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \big(g(Y)\big)\ (\Omega) \\ & = & g\ \big(Y(\Omega)\big) \\ & = & g\ \big([0,+\infty[\big) \end{array}$$

Or, comme g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$:

$$g\ \big([0,+\infty[\big) = \ [g(0), \lim_{x\to+\infty} g(x)[= \ [0,+\infty[$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } X(\Omega) = [0,+\infty[.}$$

- Déterminons alors la fonction de répartition de X.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

× Si $x < 0$ alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 0$$

× Si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([X > x]) & \\ & = & 1 - G_{a,b}(x) & \textit{(en reprenant la démonstration précédente} \\ & & & \textit{en remplaçant } [X \geqslant x] \textit{ par } [X > x]\textit{)} \end{array}$$

En résumé :

$$F_X \ : \ x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - G_{a,b}(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$$

- La fonction F_X est :

1) continue sur $\mathbb{R}$ puisque :

× $x \mapsto 1 - G_{a,b}(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ car $G_{a,b}$ l'est.

× $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty, 0[$.

× $\lim\limits_{x\to 0} (1 - G_{a,b}(x)) = 1 - 1 = 0 = F_X(0) = \lim\limits_{x\to 0} 0$.

2) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ car :

× $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$,

× $x \mapsto 1 - G_{a,b}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ car $G_{a,b}$ l'est.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- On obtient une densité f_X de X en dérivant sur les intervalles ouverts.
  On **pose** de plus : $f_X(0) = (a + b \times 0)\ \exp(0) = a$.

$$f_X \ : \ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } f_X \text{ coïncide avec } f_{a,b}\text{. On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b).}$

Commentaire

- L'énoncé demande de déterminer, en question ***4.a)*** : $\mathbb{P}([X \geqslant x])$. Le caractère large de l'inégalité est étonnant puisque pour déterminer la fonction de répartition de X on se sert de l'égalité :

$$\mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([X > x])$$

- Ce choix est validé après coup puisqu'on démontre, **après avoir déterminé** F_X, que X est une v.a.r. à densité et donc : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = \mathbb{P}([X > x])$.
- La même remarque peut être faite en question ***7.***. Par contre, la question ***8.a)*** ne détaillant pas précisément la méthode à suivre, on en profitera pour déterminer $\mathbb{P}([U_n > x])$, ce qui est bien plus judicieux (d'autant plus que la v.a.r. U_n étudiée n'est pas à densité !).

□

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1-U)$.

Démonstration.

- Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$, alors $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
  On note alors : $Y = -\ln(1-U)$. On obtient ainsi $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
- Or, comme vu en question ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y}) \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$$

- On remarque enfin :

$$\mathrm{e}^{-Y} = \mathrm{e}^{-(-\ln(1-U))} = \mathrm{e}^{\ln(1-U)} = 1 - U$$

$\boxed{\text{On en déduit que } G_{a,b}^{-1}(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b).}$

Commentaire

- Rappelons que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ alors $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
  C'est un attendu du programme qu'on demande souvent de démontrer dans les énoncés. Rappelons ici la démonstration.
- Notons $g : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)$. Tout d'abord :

$$V(\Omega) \ = \ \big(g(U)\big)\ (\Omega) \ = \ g\ \big(U(\Omega)\big) \ = \ g\ \big([0,1[\big) \ = \ [0,+\infty[$$

  En effet, comme g est continue et strictement croissante sur $[0,1[$:

$$g\ \big([0,1[\big) \ = \ [g(0), \lim_{x\to 1} g(x)[\ = \ [0,+\infty[$$

- Déterminons la fonction de répartition de V.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x < 0$, alors $[V \leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [0,+\infty[$. Donc :

$$F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant X]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × Si $x \geqslant 0$.

$$\begin{array}{rcll} F_V(x) & = & \mathbb{P}([V \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-U) \geqslant -\lambda x]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \\ & = & F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

- Il est possible de faire une démonstration identique à celle de la question ***4.a)***. En reprenant la 2ème rédaction et en posant : $Y = \ln(1-U)$, on obtient, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \geqslant x]) & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[Y < a\ x + \dfrac{b}{2}\ x^2\right]\right) \ = \ 1-\mathbb{P}\left(\left[-\ln(1-U) < a\ x + \dfrac{b}{2}\ x^2\right]\right) & \\ & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[\ln(1-U) > -a\ x - \dfrac{b}{2}\ x^2\right]\right) & \\ & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[1-U > \exp\left(-a\ x - \dfrac{b}{2}\ x^2\right)\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[U < 1-\exp\left(-a\ x - \dfrac{b}{2}\ x^2\right)\right]\right) & \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \exp\left(-a\ x - \dfrac{b}{2}\ x^2\right)\right) \ = \ G_{a,b}(x) & \end{array}$$

  et on conclut en utilisant la question ***4.b)***.

□

5. La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
1 function x = grandlinexp(a,b,n)
2     u = rand(n,1)
3     y = ...........
4     x = (-a + sqrt(a^2 + 2 * b * y)) / b
5 endfunction
```

a) Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?

Démonstration.

L'instruction `rand(n,1)` renvoie un vecteur colonne de taille $\mathtt{n} \times 1$ contenant le résultat de la simulation de `n` v.a.r. aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi $\mathcal{U}([0,1])$. □

b) Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

Démonstration.
D'après la question ***4.c)***, il suffit d'écrire :

```
3     y = - log(1 - u)
```

□

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
1 for k = 1:6
2     mean(grandlinexp(0, 1, 10^k)
3 end
```

Démonstration.

- Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(0,1)$.
  Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère $(X_1, \dots, X_m)$ un m-échantillon de la v.a.r. X.
  Autrement dit, on considère $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et toutes de même loi $\mathcal{E}_\ell(0,1)$. On note alors :
  $$\overline{X_m} \ = \ \frac{X_1 + \ldots + X_m}{m}$$
  la v.a.r. donnant la moyenne empirique associée à v.a.r. X.
- Pour chaque `k`, l'instruction `mean(grandlinexp(0, 1, 10^k))` permet de simuler la v.a.r. $\overline{X_{10^k}}$.
- En vertu de la loi faible des grands nombres, la v.a.r. $\overline{X_{10^k}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à $\mathbb{E}(X)$.
- L'entier `k` prenant des valeurs de plus en plus grandes (on considère une simulation de $\overline{X_{10}}$, puis $\overline{X_{100}}$, ..., puis $\overline{X_{1000000}}$), on peut penser que le résultat sera de plus en plus proche de $\mathbb{E}(X)$.

Les six valeurs générées par la boucle **Scilab** fourniront des valeurs de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$. □

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ dont les paramètres $a>0$ et $b>0$ sont inconnus.
Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une « cohorte » de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n=\min(X_1,X_2,\dots,X_n),\quad H_n=\min(h,X_1,X_2,\dots,X_n)\quad\text{et}\quad U_n=nH_n.$$

7. Calculer pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n\geqslant x])$.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

Démonstration.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord : $M_n(\Omega)\subset[0,+\infty[$. En effet : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega)=[0,+\infty[$.
- Soit $x\in\mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - si $x<0$ alors $[M_n\geqslant x]=\Omega$ car $M_n(\Omega)\subset[0,+\infty[$.
    Ainsi : $\mathbb{P}([M_n\geqslant x])=\mathbb{P}(\Omega)=1$.
  - si $x\geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}([M_n\geqslant x]) &=& \mathbb{P}([\min(X_1,\dots,X_n)\geqslant x]) & \\ &=& \mathbb{P}([X_1\geqslant x]\ \cap\ \dots\ \cap\ [X_n\geqslant x]) & \\ &=& \mathbb{P}([X_1\geqslant x])\ \times\ \dots\ \times\ \mathbb{P}([X_n\geqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\ &=& G_{a,b}(x)\ \times\ \dots\ \times\ G_{a,b}(x) & \textit{(d'après la question 4.a))} \\ &=& (G_{a,b}(x))^n & \end{array}$$

  Enfin, comme $\mathbb{P}([M_n\leqslant x])=1-\mathbb{P}([M_n>x])$ (on peut remplacer, sans modification du résultat, $[M_n\geqslant x]$ par $[M_n>x]$ dans la démonstration ci-dessus), on obtient :

$$F_{M_n}\ :\ x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-(G_{a,b}(x))^n & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

- La fonction F_{M_n} (*cf* ***4.b)***) est :
  1) continue sur $\mathbb{R}$,
  2) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
  On en déduit que M_n est une v.a.r. à densité.
- On obtient une densité f_{M_n} de M_n en dérivant F_{M_n} sur les intervalles ouverts.
  On choisit de plus : $f_{M_n}(0)=-n\ (G_{a,b}(0))^{n-1}\ G'_{a,b}(0)$. On obtient :

$$f_{M_n}\ :\ x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ -n\ (G_{a,b}(x))^{n-1}\ G'_{a,b}(x) & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

Or :

$$\begin{aligned}
-n\ (G_{a,b}(x))^{n-1}\ G'_{a,b}(x) &= -n\ \left(\exp\left(-ax-\tfrac{b}{2}\ x^2\right)\right)^{n-1}\ (-a-bx)\ \exp\left(-ax-\tfrac{b}{2}\ x^2\right) \\
&= n\ (a+bx)\ \left(\exp\left(-ax-\tfrac{b}{2}\ x^2\right)\right)^{n} \\
&= ((na)+(nb)x)\ \exp\left(-(na)x-\tfrac{(nb)}{2}\ x^2\right) \ = \ f_{na,nb}(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } M_n \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(na,nb).}$$

□

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\exp\left(-ax-\dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0 \leqslant x < nh \\ 1 & \text{si } x \geqslant nh \end{cases}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Commençons par déterminer $U_n(\Omega)$.
  Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
H_n &= \min(h, X_1, X_2, \dots, X_n) \\
&= \min(h, \min(X_1, X_2, \dots, X_n)) \\
&= \min(h, M_n)
\end{aligned}$$

  On en déduit : $H_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$.

$$\boxed{U_n(\Omega) \subset [0,+\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $x<0$ alors $[U_n > x] = \Omega$ car $U_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$.
  Ainsi, $\mathbb{P}([U_n > x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  × si $x \in [0, nh[$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U_n > x]) &= \mathbb{P}([nH_n > x]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[H_n > \tfrac{x}{n}\right]\right) && \textit{(puisque } n>0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\min(h, M_n) > \tfrac{x}{n}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[h > \tfrac{x}{n}\right] \cap \left[M_n > \tfrac{x}{n}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[h > \tfrac{x}{n}\right]\right) \times \mathbb{P}\left(\left[M_n > \tfrac{x}{n}\right]\right) && \textit{(car la v.a.r. constante } h \textit{ et la v.a.r. } M_n \textit{ sont indépendantes)} \\
&= 1 \times \mathbb{P}\left(\left[M_n > \tfrac{x}{n}\right]\right) && \textit{(car } [x<nh]=\Omega \textit{ puisque } x \in [0,nh[\textit{)} \\
&= \left(G_{a,b}(\tfrac{x}{n})\right)^n && \textit{(d'après la question 7)}
\end{aligned}$$

  × si $x \geqslant nh$ alors (en reprenant la démonstration ci-dessus) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U_n > x]) &= \mathbb{P}\left(\left[h > \tfrac{x}{n}\right]\right) \times \mathbb{P}\left(\left[M_n > \tfrac{x}{n}\right]\right) \\
&= 0 \times \mathbb{P}\left(\left[M_n > \tfrac{x}{n}\right]\right) \ = \ 0 && \textit{(car } [x<nh]=\varnothing \textit{ puisque } x \geqslant nh\textit{)}
\end{aligned}$$

- Enfin, comme $\mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([U_n > x])$, on obtient :

$$\boxed{F_{U_n} \ : \ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n & \text{si } x \in [0, nh[\\ 1 & \text{si } x \geqslant nh \end{cases}}$$

Il suffit alors de remarquer :

$$\left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \exp\left(-a\frac{x}{n} - \frac{b}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n = \exp\left(-a\cancel{n}\frac{x}{\cancel{n}} - \frac{b}{2}\cancel{n}\frac{x^2}{n^{\cancel{2}}}\right) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right) \quad \square$$

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

Démonstration.
La fonction F_{U_n} est :

$\times$ continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]nh, +\infty[$ car constante sur chacun de ces intervalles.

$\times$ continue sur $]0, nh[$ car $G_{a,b}$ l'est sur $[0, +\infty[$.

$\times$ continue en 0 puisque :

1) $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$,

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - (G_{a,b}(0))^n = 1 - 1^n = 0$,

3) $F_{U_n}(0) = 0$.

$\times$ non continue en nh. En effet :

$$\lim_{x \to (nh)^-} F_{U_n}(x) = \lim_{x \to nh} 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{nh}{n}\right)\right)^n = 1 - \exp\left(-anh - \frac{b}{2\cancel{n}}n^{\cancel{2}}\ h^2\right) < 1$$

et $F_{U_n}(nh) = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_{U_n} \text{ est continue uniquement sur }]-\infty, nh[\text{ et sur }]nh, +\infty[.} \quad \square$$

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

Démonstration.

D'après la question précédente, F_{U_n} n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, U_n n'est pas une variable à densité. $\square$

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si $x < 0$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{U_n}(x) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

- Si $x \geqslant 0$ alors, pour n suffisamment grand (plus précisément pour tout $n > \left\lceil \frac{x}{h} \right\rceil$) :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{U_n}(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right)\right) = 1 - \exp(-ax)$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a).}$$

□

9. Soit $\alpha \in]0,1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = 1-\alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y \leqslant c]) = \frac{\alpha}{2}$$

Démonstration.

- Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et que les réels c et d doivent être strictement positifs :

$$\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = F_Y(d) - F_Y(c) = (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-d}) - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-c}) = \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d}$$

$$\mathbb{P}([Y \leqslant c]) = F_Y(c) = 1 - \mathrm{e}^{-c}$$

- On obtient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathrm{e}^{-c} & - & \mathrm{e}^{-d} & = & 1-\alpha \\ -\mathrm{e}^{-c} & & & = & -1+\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} & - & \mathrm{e}^{-d} & = & -\dfrac{\alpha}{2} \\ -\mathrm{e}^{-c} & & & = & -1+\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{-d} = \dfrac{\alpha}{2} \\ \mathrm{e}^{-c} = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -d = \ln\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ -c = \ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) \end{array}\right.$$

Ainsi, $c = -\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ car $1 - \frac{\alpha}{2} \in]0,1[$ puisque $\alpha \in]0,1[$.

De même, $d = -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ car $\frac{\alpha}{2} \in]0,1[$.

$$\boxed{c = -\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad d = -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Commentaire

On pouvait bien évidemment faire les calculs de probabilité à l'aide d'une densité de probabilité :

$$\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = \int_c^d f_Y(x)\,dx = \int_c^d 1 \times \mathrm{e}^{-x}\,dx = \left[\,-\mathrm{e}^{-x}\,\right]_c^d = -(\mathrm{e}^{-d} - \mathrm{e}^{-c}) = \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d}$$

$$\mathbb{P}([Y \leqslant c]) = \int_{-\infty}^c f_Y(x)\,dx = \int_0^c \mathrm{e}^{-x}\,dx = \left[\,-\mathrm{e}^{-x}\,\right]_0^c = -(\mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{0}) = 1 - \mathrm{e}^{-c}$$

□

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}\ ,\ \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\left(a \in \left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]\right) & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{U_n} \leqslant a \leqslant \dfrac{d}{U_n}\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left([c \leqslant a\ U_n \leqslant d]\right) & \textit{(car } U_n > 0\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) & \textit{(car } a > 0\textit{)} \\
& \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.d)}}\textit{)}
\end{array}$$

On constate enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) & = & F_Z\left(\dfrac{d}{a}\right) - F_Z\left(\dfrac{c}{a}\right) & \\
& = & (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a\frac{d}{a}}) - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a\frac{c}{a}}) & \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a)\textit{)} \\
& = & \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d} & \\
& = & 1 - \alpha & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{P}\left(a \in \left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha \text{ ce qui démontre que } \left[\dfrac{c}{U_n}\ ,\ \dfrac{d}{U_n}\right] \text{ est un intervalle de confiance asymptotique de } a \text{, de niveau de confiance } 1-\alpha.}$$

Commentaire

- Avec une telle rédaction, il est difficile de comprendre pourquoi on a introduit la loi $\mathcal{E}(1)$ dans la question précédente. Pour bien comprendre ce point, on peut utiliser la propriété :
$$Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a) \ \Leftrightarrow\ aZ \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$$
Ainsi, on peut écrire dans la rédaction précédente :
$$\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) = \mathbb{P}\left([c \leqslant aZ \leqslant d]\right) = \mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d}$$
où $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
- Attention toutefois : si la transformée affine d'une v.a.r. est bien au programme, la transformée affine d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle n'est pas explicitement mentionnée. Il faudrait donc démontrer la propriété précédente ! C'est assez simple :
  - × $(aZ)(\Omega) = [0, +\infty[$ car $Z(\Omega) = [0, +\infty[$ et $a > 0$.
  - × Ainsi, si $x < 0$, $\mathbb{P}([aZ \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  Et si $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}([aZ \leqslant x]) = \mathbb{P}(\left[Z \leqslant \dfrac{x}{a}\right]) = F_Z\left(\dfrac{x}{a}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-a\ \frac{x}{a}} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
  On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{E}(1)$.

$\square$

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit S_i et D_i les variables aléatoires telles que :

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\overline{S}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ et $\overline{D}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$.

10. a) Justifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h)$ et calculer $\mathbb{E}(S_i D_i)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Comme $S_i(\Omega) = \{0, 1\}$, la v.a.r. S_i suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_i \geqslant h]) = G_{a,b}(h)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } S_i \text{ admet une espérance et : } \mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h).}$$

- De même, $(S_i D_i)(\Omega) = \{0, 1\}$. Plus précisément :

$$S_i D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \text{ et } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Donc la v.a.r. $S_i\, D_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_i \leqslant 1]) = \mathbb{P}([h \leqslant X_i \leqslant 1]) = 0$$

  En effet, $[h \leqslant X_i \leqslant 1] = \varnothing$ puisque $h \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(S_i D_i) = 0.}$$

□

b) Pour quels couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On raisonne comme dans la question précédente.

- Comme $D_i(\Omega) = \{0, 1\}$, , la v.a.r. S_i suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_i \leqslant 1]) = 1 - G_{a,b}(1)$$

$$\boxed{\text{Ainsi la v.a.r. } D_i \text{ admet une espérance et : } \mathbb{E}(D_i) = 1 - G_{a,b}(1).}$$

  De plus, $\mathbb{E}(D_i) \neq 0$ puisque $G_{a,b}(1) \in \,]0, 1[$ (d'après la question ***1.a)***).

- On en déduit que D_i et S_i ne sont pas indépendantes puisque, d'après ce qui précède :

$$\mathbb{E}(S_i D_i) \;=\; 0 \;\neq\; \mathbb{E}(S_i)\, \mathbb{E}(D_i)$$

- Considérons maintenant $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$. Comme X_i et X_j sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_i = 0] \cap [D_j = 0]) &= \mathbb{P}([X_i < h] \cap [X_j > 1]) \;=\; \mathbb{P}([X_i < h]) \times \mathbb{P}([X_j > 1]) \\ &= \mathbb{P}([S_i = 0]) \times \mathbb{P}([D_j = 0]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_i = 0] \cap [D_j = 1]) &= \mathbb{P}([X_i < h] \cap [X_j \leqslant 1]) \;=\; \mathbb{P}([X_i < h]) \times \mathbb{P}([X_j \leqslant 1]) \\ &= \mathbb{P}([S_i = 0]) \times \mathbb{P}([D_j = 1]) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([S_i = 1] \cap [D_j = 0]) & = & \mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_j > 1]) \ = \ \mathbb{P}([X_i \geqslant h]) \times \mathbb{P}([X_j > 1]) \\ & = & \mathbb{P}([S_i = 1]) \times \mathbb{P}([D_j = 0]) \\ \mathbb{P}([S_i = 1] \cap [D_j = 1]) & = & \mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_j \leqslant 1]) \ = \ \mathbb{P}([X_i \geqslant h]) \times \mathbb{P}([X_j \leqslant 1]) \\ & = & \mathbb{P}([S_i = 1]) \times \mathbb{P}([D_j = 1]) \end{array}$$

On en déduit que S_i et D_j sont indépendantes.

$$\boxed{S_i \text{ et } D_j \text{ sont indépendantes si et seulement si } i \neq j.}$$

Commentaire

- Rappelons : X et Y indépendantes $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$
  On se sert dans la démonstration de la contraposée de cet énoncé à savoir :
  $$\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y) \Rightarrow X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}$$
- Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence. Autrement dit :
  $$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y) \quad \cancel{\Rightarrow} \quad X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

□

c) Déduire des questions précédentes l'expression de la covariance $\mathrm{Cov}(\overline{S_n}, \overline{D_n})$ de $\overline{S_n}$ et $\overline{D_n}$ en fonction de n, $G_{a,b}(h)$ et $G_{a,b}(1)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Démonstration.

- D'après ce qui précède, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$\mathrm{Cov}(S_i, D_j) \ = \ \mathbb{E}(S_i D_j) - \mathbb{E}(S_i)\ \mathbb{E}(D_j) \ = \ 0 \qquad \textit{(car } S_i \textit{ et } D_j \textit{ sont indépendantes)}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}(S_i, D_i) & = & \mathbb{E}(S_i D_i) - \mathbb{E}(S_i)\ \mathbb{E}(D_i) \\ & = & 0 - G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1)) \\ & = & -G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1)) \end{array}$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) & = & \mathrm{Cov}\left(\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i, \overline{D_n}\right) & \textit{(par définition de } \overline{S_n}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n}\ \mathrm{Cov}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i, \overline{D_n}\right) & \textit{(par linéarité à gauche)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(S_i, \overline{D_n}\right) & \textit{(par linéarité à gauche)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(S_i, \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} D_j\right) & \textit{(par définition de } \overline{D_n}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(S_i, D_j) & \textit{(par linéarité à droite)} \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{Cov}(S_i, D_j) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i = j}} \text{Cov}(S_i, D_j) + \cancel{\frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \text{Cov}(S_i, D_j)} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \text{Cov}(S_i, D_i) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(-G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\ n\ \left(-G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))\right) \ = \ -\frac{G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) = -\frac{G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))}{n}}$$

- Comme $G_{a,b}(h) > 0$ et $1 - G_{a,b}(1) > 0$, $\text{Cov}(\overline{S_n}, \overline{D_n}) < 0$.
  Revenons à la définition de S_i et D_i pour comprendre ce signe.
  × $S_i = 1$ (0 sinon) si le $i^{\text{ème}}$ individu de la cohorte est encore en vie après h années,
  × $D_i = 1$ (0 sinon) si le $i^{\text{ème}}$ individu de la cohorte est mort au cours de la première année.
  Ainsi, $\overline{S_n}$ représente la proportion d'individus encore en vie après h années et $\overline{D_n}$ représente la proportion d'individus morts au cours de la première année.

Lorsqu'une de ces deux proportions augmente, l'autre à tendance à diminuer. Le signe négatif de la quantité était donc prévisible.

  □

11. a) Montrer que $\overline{S_n}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

Démonstration.

- La v.a.r. $\overline{S_n}$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire des *v.a.r.* $S_1, \ldots, S_n$ qui admettent toutes une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\overline{S_n}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(S_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} G_{a,b}(h) && \textit{(d'après la question } \textbf{10.a)}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\ n\ G_{a,b}(h) \ = \ G_{a,b}(h)
\end{aligned}$$

Donc : $b(\overline{S_n}) = \mathbb{E}(\overline{S_n}) - G_{a,b}(h) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \overline{S_n} \text{ est un estimateur sans biais de } G_{a,b}(h).}$$

- La v.a.r. $\overline{S_n}$ admet un moment d'ordre 2 en tant que combinaison linéaire des *v.a.r.* $S_1, \dots, S_n$ qui sont **indépendantes** (car les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ le sont) et admettent toutes un moment d'ordre 2 puisqu'elles sont finies.
Ainsi, $\overline{S_n}$ admet un risque quadratique et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll}
r(\overline{S_n}) & = & \mathbb{V}(\overline{S_n}) + \left(\cancel{b(\overline{S_n})}\right)^2 & \\
& = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n^2}\, \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} S_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(S_i) & \textit{(par indépendance des v.a.r. } S_1, \dots, S_n\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2}\, n\, \mathbb{V}(S_1) & \textit{(les v.a.r. } X_i \textit{ étant toutes de même loi, il en est de même des v.a.r. } S_i\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n}\, \mathbb{V}(S_1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 & \textit{(car } \mathbb{V}(S_1) \textit{ est une constante)}
\end{array}$$

$$\boxed{\overline{S_n} \text{ est un estimateur convergent de } G_{a,b}(h).}$$

□

b) De quel paramètre, $\overline{D_n}$ est-il un estimateur sans biais et convergent ?

Démonstration.

- Montrons que $\overline{D_n}$ est un estimateur sans biais de $1 - G_{a,b}(1)$.
La v.a.r. $\overline{D_n}$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire des *v.a.r.* $D_1, \dots, D_n$ qui admettent toutes une espérance. De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(\overline{D_n}) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(D_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (1 - G_{a,b}(1)) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.b)}}\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n}\, n\, (1 - G_{a,b}(1)) \ = \ 1 - G_{a,b}(1) &
\end{array}$$

Donc : $b(\overline{D_n}) = \mathbb{E}(\overline{D_n}) - \left(1 - G_{a,b}(1)\right) = 0$.

$$\boxed{\overline{D_n} \text{ est un estimateur sans biais de } 1 - G_{a,b}(1).}$$

- Montrons que $\overline{D_n}$ est un estimateur convergent de $1 - G_{a,b}(1)$.
La v.a.r. $\overline{D_n}$ admet un moment d'ordre 2 comme combinaison linéaire des v.a.r. $D_1, \ldots, D_n$ qui sont **indépendantes** (car les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ le sont) et admettent toutes un moment d'ordre 2 puisqu'elles sont finies.
Ainsi, $\overline{D_n}$ admet un risque quadratique et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned} r(\overline{D_n}) &= \mathbb{V}(\overline{D_n}) + \left(\cancel{b(\overline{D_n})}\right)^2 = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\,\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(D_i) && \textit{(par indépendance des v.a.r. } D_1, \ldots, D_n\textit{)} \\ &= \frac{1}{n^2}\, n\, \mathbb{V}(D_1) && \textit{(les v.a.r. } X_i \textit{ étant toutes de même loi, il en est de même des v.a.r. } D_i\textit{)} \\ &= \frac{1}{n}\,\mathbb{V}(D_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } \mathbb{V}(D_1) \textit{ est une constante)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{D_n} \text{ est un estimateur convergent de } 1 - G_{a,b}(1).}$$

Commentaire

Le caractère « convergent » est une qualité recherchée pour un estimateur. Il permet notamment de classer entre eux les estimateurs d'un même paramètre.
Considérons par exemple un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathcal{B}(\theta)$, où $\theta \in]0,1[$ est inconnu, et les estimateurs $T_n = X_n$ et $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
On cherche en fait à savoir si on obtient une estimation plus précise de θ en augmentant la taille de notre échantillon. C'est ce qu'indique le caractère convergent.

- Pour T_n, on sait : $T_n(\Omega) = X_n(\Omega) = \{0,1\}$. Donc $|T_n - \theta|(\Omega) = \{\theta, 1-\theta\}$. Donc

$$\mathbb{P}(|T_n - \theta| \geqslant \min(\theta, 1-\theta)) = 1$$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|T_n - \theta| \geqslant \min(\theta, 1-\theta)]) \neq 0$.
Donc T_n n'est pas un estimateur convergent de θ.

- Pour $\overline{X_n}$, comme cet estimateur est sans biais (se démontre grâce à la linéarité de l'espérance), on obtient :

$$\begin{aligned} r_\theta(\overline{X_n}) = \mathbb{V}(\overline{X_n}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) && \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(\theta(1-\theta)) \\ &= \frac{\theta(1-\theta)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc $\overline{X_n}$ est un estimateur convergent de θ.

L'estimation de θ donnée par $\overline{X_n}$ va donc être de plus en plus précise, contrairement à celle de T_n, qui n'est pas un estimateur convergent.
Dans cet exemple, le meilleur estimateur est donc $\overline{X_n}$.

□

Commentaire

On rappelle qu'il existe deux manières de montrer qu'un estimateur T_n est convergent pour un paramètre θ.

1) La définition : T_n est un estimateur convergent de θ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

2) L'utilisation du risque quadratique :

$$\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n \text{ est un estimateur convergent de } \theta.$$

C'est la méthode employée pour la question ***11.***.
Cette méthode est à privilégier lorsque l'estimateur T_n est sans biais.

12. On pose : $z(a,b) = \ln(G_{a,b}(1))$ et $r(a,b) = \ln(G_{a,b}(h))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \ln\left(1 - \overline{D}_n + \dfrac{1}{n}\right)$ et $R_n = \ln\left(\overline{S}_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

On admet que Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a,b)$ et $r(a,b)$ respectivement.

a) Soit ε, λ et μ des réels strictement positifs.

(i) Justifier l'inclusion suivante :

$$[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda |Z_n - z(a,b)| + \mu |R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon] .$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.
Supposons : $\omega \in [|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))| \geqslant \varepsilon]$.
Autrement dit : $|(\lambda Z_n(\omega) - \mu R_n(\omega)) - (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))| \geqslant \varepsilon$.
Or :

$$\begin{aligned}
& |\ (\lambda Z_n(\omega) - \mu R_n(\omega)) \ - \ (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))\ | \\
= \ & |\ \lambda Z_n(\omega) - \lambda\, z(a,b) - \mu R_n(\omega) + \mu\, r(a,b))\ | \\
= \ & |\ \lambda(Z_n(\omega) - z(a,b)) \ - \ \mu(R_n(\omega) - r(a,b))\ | \\
\leqslant \ & |\ \lambda(Z_n(\omega) - z(a,b))\ | \ + \ |\ \mu(R_n(\omega) - r(a,b))\ | & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
= \ & \lambda\,|\ (Z_n(\omega) - z(a,b))\ | \ + \ \mu\,|\ (R_n(\omega) - r(a,b))\ | & \textit{(car } \lambda > 0 \textit{ et } \mu > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Donc : $\lambda\,|\ (Z_n(\omega) - z(a,b))\ | \ + \ \mu\,|\ (R_n(\omega) - r(a,b))\ | \geqslant \varepsilon$.
Autrement dit : $\omega \in [\lambda |Z_n - z(a,b)| + \mu |R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon]$.

$$\boxed{\text{D'où : } [|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda |Z_n - z(a,b)| + \mu |R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon].}$$

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'inclusion de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que si le premier événement est réalisé (il existe ω réalisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) alors le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement). $\square$

(ii) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right).$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a déjà :

$$\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([\lambda|Z_n - z(a,b)| + \mu|R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon]) \quad (\star)$$

- On note :

$$\begin{aligned} A &= [\lambda|Z_n - z(a,b)| + \mu|R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon] \\ B &= \left[\lambda|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ C &= \left[\mu|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \end{aligned}$$

  Si on parvient à démontrer : $A \ \subset\ B \cup C$, alors par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A) \ \leqslant\ \mathbb{P}(B \cup C)$$

  Et comme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \cup C) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\leqslant \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

  En utilisant la propriété $(\star)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon]) &\leqslant \mathbb{P}(A) && \textit{(d'après } (\star)\textit{)} \\ &\leqslant \mathbb{P}(B \cup C) \\ &\leqslant \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

  ce qui permet de conclure la question.

- Il reste alors à montrer : $A \ \subset\ B \cup C$. Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \omega \in A \ \Rightarrow\ \omega \in B \cup C$$

  ce qui équivaut par contraposée à :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \texttt{NON}(\omega \in B \cup C) \ \Rightarrow\ \texttt{NON}(\omega \in A)$$

  Soit $\omega \in \Omega$. Supposons donc : $\texttt{NON}(\omega \in B \cup C)$.
  Ainsi : $\omega \in \overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$, ou encore :

$$\lambda|Z_n(\omega) - z(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \mu|R_n(\omega) - r(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Alors, en sommant membre à membre :

$$\lambda|Z_n(\omega) - z(a,b)| + \mu|R_n(\omega) - r(a,b)| < \varepsilon$$

  D'où :

$$\omega \ \in\ [\lambda|Z_n(\omega) - z(a,b)| + \mu|R_n(\omega) - r(a,b)| < \varepsilon] \ =\ \overline{A}$$

  De plus : $\omega \in \overline{A} \ \Leftrightarrow\ \texttt{NON}(\omega \in A)$.
  On a donc bien démontré : $A \ \subset\ B \cup C$.

$$\boxed{\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right).}$$

Commentaire

On utilise dans cette question la formule du crible : pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

On peut distinguer 3 corollaires usuels de cette formule.

1) <u>En toute généralité</u> :

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

car une probabilité est toujours positive.
C'est le corollaire utilisé dans cette question.
On remarquera bien que celui-ci est valable pour tout type d'événements A et B.

2) <u>Si A et B sont incompatibles</u> :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

En effet, si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

3) <u>Si A et B sont indépendants</u> :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

En effet, si A et B sont indépendants, alors : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

$\square$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = \dfrac{2}{h-1} Z_n - \dfrac{2}{h(h-1)} R_n$.
Montrer que B_n est un estimateur convergent du paramètre b.

Démonstration.
On pose $\lambda = \dfrac{2}{h-1}$ et $\mu = \dfrac{2}{h(h-1)}$.
On remarque que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, car $h \geqslant 2$, et $B_n = \lambda Z_n - \mu R_n$.
D'après la question précédente et puisqu'une probabilité est toujours positive, on obtient :

$$0 \leqslant \mathbb{P}([|B_n - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right)$$

Or :

- × par hypothèse, Z_n est un estimateur convergent de $z(a,b)$.
  D'où : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) = 0$.
- × de plus, R_n est un estimateur convergent de $r(a,b)$.
  D'où : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right) = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([|B_n - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) = 0$$

c'est-à-dire que B_n est un estimateur convergent de $\lambda z(a,b) - \mu r(a,b)$.

Or :

$$\begin{aligned}
\lambda z(a,b) - \mu r(a,b) &= \frac{2}{h-1}\ln\left(G_{a,b}(1)\right) - \frac{2}{h(h-1)}\ln\left(G_{a,b}(h)\right) \\
&= \frac{2}{h-1}\left[\ln\left(\exp\left(-a-\frac{b}{2}\right)\right) - \frac{1}{h}\ln\left(\exp\left(-ah-\frac{b}{2}h^2\right)\right)\right] \\
&= \frac{2}{h-1}\left[\left(-a-\frac{b}{2}\right) - \frac{1}{h}\left(-ah-\frac{b}{2}h^2\right)\right] \\
&= \frac{2}{h-1}\left[-\cancel{a}-\frac{b}{2}+\cancel{a}+\frac{b}{2}h\right] \\
&= \frac{\cancel{2}}{\cancel{h-1}}\left[\frac{b}{\cancel{2}}\cancel{(h-1)}\right] \\
&= b
\end{aligned}$$

$$\boxed{B_n \text{ est un estimateur convergent de } b.}$$

Commentaire

On utilise ici la définition d'un estimateur convergent et non la propriété nécessitant le risque quadratique.

□