ESSEC II 2017

Étudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire. Le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales :

	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale	37%	62%
Ouvriers	1%	10%

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociales.

1. En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée (Profession libérale) et la plus défavorisée (Ouvriers).

2. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on déduit que l'inégalité a diminué.

3. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages *de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire*, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on déduit que l'inégalité a augmenté puisque le nombre de ceux qui n'ont pas accès à l'enseignement supérieur a proportionnellement plus diminué que celui de ceux qui y ont accès.

Comme on le voit chacune des façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la *concentration* d'une loi de probabilité pour contourner des paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins d'en être conscient.

Partie I - Indice de Gini

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2) \leqslant \lambda\, f(t_1) + (1-\lambda)\, f(t_2)$.
On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.
On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, continues et convexes sur $[0,1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0,1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

On pose $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\, dt = 2\int_0^1 (t - f(t))\, dt$. $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f.

1. ***a)*** Donnez une interprétation géométrique de la propriété de convexité.

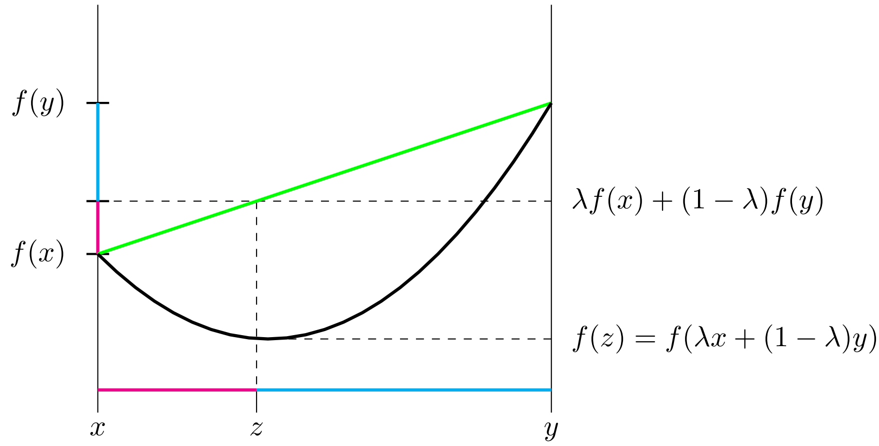
Démonstration.

Une fonction f est convexe si sa courbe représentative se situe en dessous de chacune de ses cordes.

Commentaire

Bien sûr, cette caractéristique est valide pour une orientation des axes usuelle.

On peut représenter graphiquement cette propriété grâce à la figure suivante :



Commentaire

Cette question est une question de cours. Il faut absolument répondre parfaitement pour mettre le correcteur en confiance.
On pouvait aussi utiliser la caractérisation de la convexité avec les tangentes : une fonction f est convexe si sa courbe représentative se situe au-dessus de chacune de ses tangentes.

□

b) Lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0,1]$ à l'aide de la dérivée f'.

Démonstration.

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, alors :
f convexe sur $[0,1] \quad \Leftrightarrow \quad f'$ croissante sur $[0,1]$.

Commentaire

Attention à ne pas donner ici la caractérisation pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, alors :

$$f \text{ convexe sur } [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in [0,1],\ f''(x) \geqslant 0$$

L'énoncé insistait bien sur le fait que la fonction f était seulement de classe $\mathcal{C}^1$.
D'ailleurs, dans la suite, on ne travaillera qu'avec des fonctions seulement **continues** sur $[0,1]$.

□

2. a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.

Démonstration.
Montrons que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$, c'est-à-dire que $-\tilde{f}$ est convexe sur $[0,1]$.
Soit $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} -\tilde{f}(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) &= f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) - (\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \\ &\leqslant \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2) - \lambda t_1 - (1-\lambda) t_2 && \textit{(car } f \textit{ est convexe sur } [0,1]\textit{)} \\ &= \lambda(f(t_1) - t_1) + (1-\lambda)(f(t_2) - t_2) \\ &= \lambda(-\tilde{f})(t_1) + (1-\lambda)(-\tilde{f}(t_2)) \end{aligned}$$

Donc la fonction $-\tilde{f}$ est convexe sur $[0,1]$.

$$\boxed{\text{La fonction } \tilde{f} \text{ est concave sur } [0,1].}$$

Commentaire

Attention encore une fois : la fonction f n'est pas supposée ici de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
Il n'y a donc pas d'autre choix que d'utiliser la définition de la convexité. □

b) Montrer que $I(f) = 1 - 2 \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.

Démonstration.

- La fonction $\tilde{f}$ est continue sur $[0,1]$ en tant que somme de fonctions continues sur $[0,1]$.
  Donc l'intégrale $I(f)$ est bien définie.
- On calcule alors :

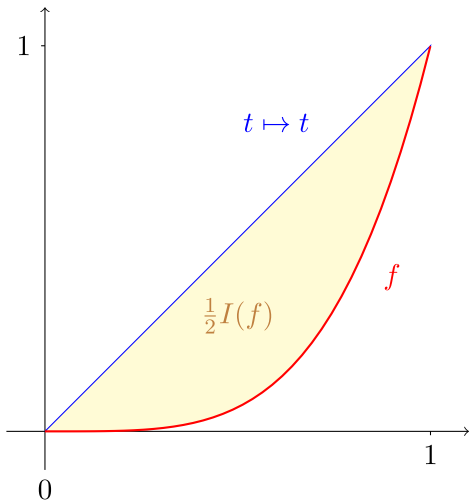
$$\begin{aligned} I(f) &= 2\int_0^1 (t - f(t)\ dt = 2\int_0^1 t\ dt - 2\int_0^1 f(t)\ dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt \\ &= 2 \times \frac{1}{2} - 2\int_0^1 f(t)\ dt = 1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt \end{aligned}$$

$$\boxed{I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt}$$

□

c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$ et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

Démonstration.
Dans l'ensemble du problème, on notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
La fonction $t \mapsto t$ correspond en fait à la corde de $\mathcal{C}_f$ sur $[0,1]$.



On sait que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t\ dt$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ mesurent respectivement l'aire sous la courbe de $t \mapsto t$ et l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } I(f) \text{ mesure le double de l'aire entre } \mathcal{C}_f \text{ et sa corde sur } [0,1].}$$

□

3. Un premier exemple.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

a) Montrer que f est un élément de E.

Démonstration.

- La fonction f est bien définie sur $[0,1]$.
- De plus : $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(1) = 1^2 = 1$.
- La fonction f est croissante sur $[0,1]$, donc :

$$\forall t \in [0,1],\ f(0) \leqslant f(t) \leqslant f(1)$$

  On obtient : $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$.
  Donc la fonction f est à valeurs dans $[0,1]$.
- La fonction f est bien continue sur $[0,1]$ (en tant que fonction polynomiale).
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1],\ f''(t) = 2 \geqslant 0$$

  Donc f est convexe.

$$\boxed{\text{Finalement : } f \in E.}$$

□

b) Calculer $I(f)$.

Démonstration.
D'après la question ***2.b)*** :

$$I(f) \ = \ 1 - 2 \int_0^1 t^2 \, dt \ = \ 1 - 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \ = \ 1 - \frac{2}{3} \ = \ \frac{1}{3}$$

$$\boxed{I(f) = \frac{1}{3}}$$

Commentaire

Ces questions ***3.a)*** et ***3.b)*** testent la compréhension des notions et notations introduites par l'énoncé.
Ce sont souvent des questions simples qu'il faut repérer et rédiger soigneusement.

□

4. Propriétés de l'indice de Gini.

a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geqslant 0$.

Démonstration.

- La fonction f est convexe sur $[0,1]$.
  Sa courbe représentative est donc située en-dessous de sa corde sur $[0,1]$.
- Or, la corde sur $[0,1]$ de $\mathcal{C}_f$ est le segment reliant les points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$.
  Donc, comme $f \in E$, c'est le segment reliant les points $(0,0)$ et $(1,1)$.
  La corde de $\mathcal{C}_f$ sur $[0,1]$ est la représentation de la fonction $t \mapsto t$ sur le segment $[0,1]$.

- On obtient alors :
$$\forall t \in [0,1],\ f(t) \leqslant t \quad \text{donc} \quad f(t) - t \leqslant 0$$
Ainsi : $\tilde{f}(t) = t - f(t) \geqslant 0$.
- Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant) :
$$\int_0^1 (f(t) - t)\ dt \leqslant 0$$
$$\boxed{\text{D'où : } I(f) = 2 \int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt \geqslant 0.}$$

Commentaire

Le sujet adopte une approche géométrique de la convexité dès le début. On privilégiera donc des réponses de ce type.
On pouvait néanmoins aussi résoudre cette question de la manière suivante.
Soit $t \in [0,1]$.
- On applique l'inégalité de convexité de l'énoncé avec :
$$t_1 = 1, \quad t_2 = 0, \quad \lambda = t$$
On obtient alors :
$$f(t \times 1 + (1-t) \times 0) \ \leqslant\ t\, f(1) + (1-t) f(0)$$
Or : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
D'où : $f(t) \leqslant t$. Donc : $\tilde{f}(t) = t - f(t) \geqslant 0$.
- On conclut alors de la même manière que précédemment en utilisant la croissance de l'intégrale.

□

b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration.
- Tout d'abord :
$$I(f) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2 \int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 0 \ \Leftrightarrow\ \int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 0$$
- De plus, la fonction $\tilde{f}$ est :
  - × continue sur $[0,1]$, en tant que somme de fonctions continues sur $[0,1]$;
  - × positive sur $[0,1]$, d'après la question précédente.

  Donc :
$$\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ f(t) = t$$
$$\boxed{I(f) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t) = t}$$

□

c) Montrer que pour tout f élément de E, $I(f) < 1$.

Démonstration.
Soit $f \in E$.

- D'après la question ***2.b)*** :

$$I(f) < 1 \ \Leftrightarrow\ 1 - 2\int_0^1 f(t)\ dt < 1 \ \Leftrightarrow\ 2\int_0^1 f(t)\ dt > 0 \ \Leftrightarrow\ \int_0^1 f(t)\ dt > 0$$

- Comme f est à valeurs positives (elle est à valeurs dans $[0,1]$), on a déjà : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \geqslant 0$.
- De plus, la fonction f est :
  × continue sur $[0,1]$;
  × positive sur $[0,1]$.
  Donc :
  $$\int_0^1 f(t)\ dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ f(t) = 0$$
  Cette dernière assertion est fausse car $f(1) = 1$.
  Donc : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \neq 0$. D'où : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt > 0$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall f \in E,\ I(f) < 1.}$$

□

d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

(i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par montrer : $f_n \in E$.

- La fonction f_n est bien définie sur $[0,1]$.
- De plus, comme $n > 0$: $f_n(0) = 0^n = 0$ et $f_n(1) = 1^n = 1$.
- La fonction f_n est croissante sur $[0,1]$, donc :
  $$\forall t \in [0,1],\ f_n(0) \leqslant f_n(t) \leqslant f_n(1)$$
  On obtient : $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1$.
  Donc la fonction f_n est à valeurs dans $[0,1]$.
- La fonction f_n est bien continue sur $[0,1]$.
- Elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et :
  $$\forall t \in [0,1],\ f_n''(t) = n(n-1) \geqslant 0$$
  Donc f_n est convexe.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_n \in E.}$$

D'après la question ***2.b)*** :

$$I(f_n) \;=\; 1-2\int_0^1 t^n\,dt \;=\; 1-2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \;=\; 1-\frac{2}{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I(f_n) = 1-\frac{2}{n+1}}$$

Commentaire

On remarque que l'on retrouve bien le résultat obtenu en question ***3.*** pour $n = 2$. □

(ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leqslant A < 1$, il existe f appartenant à E telle que $I(f) > A$.

Démonstration.
Soit $A \in [0,1[$.

- D'après la question précédente : $I(f_n) = 1-\dfrac{2}{n+1}$.
- Donc :

$$\begin{aligned} I(f_n) > A \;&\Leftrightarrow\; 1-\frac{2}{n+1} > A \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{n+1} < 1-A \\ &\Leftrightarrow\; \frac{n+1}{2} > \frac{1}{1-A} \qquad \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow\; n+1 > \frac{2}{1-A} \;\Leftrightarrow\; n > \frac{2}{1-A}-1 \end{aligned}$$

On choisit alors $N = \lceil \dfrac{2}{1-A} - 1 \rceil$, et on obtient : $I(f_N) > A$.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } A \in [0,1[, \text{ il existe } f \in E \text{ tel que } I(f) > A.}$$

Commentaire

On pouvait aussi se servir de la définition de la limite d'une suite, comme détaillé ci-dessous.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} I(f_n) = 1$
- Donc, par définition de la limite d'une suite :

$$\text{pour tout } A \in [0,1[, \text{ il existe } N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } I(f_N) > A.$$

□

5. **Minoration de l'indice de Gini**

a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0,1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.

Démonstration.
La fonction $\tilde{f}$ est continue sur le **segment** $[0,1]$.
Elle est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle est majorée et son maximum est atteint pour un certain réel de $[0,1]$.
Donc il existe $a \in [0,1]$ tel que : $\tilde{f}(a) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.

Trois cas se présentent alors.

- Si $a \in]0,1[$. Alors on choisit $t_0 = a$.
Et on a effectivement montré qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que : $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.
- Si $a = 0$.
  × Alors :
  $$\tilde{f}(a) = \tilde{f}(0) = 0 - f(0) = 0$$
  × Donc, comme a est un maximum de $\tilde{f}$ sur $[0,1]$, on obtient :
  $$\forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) \leqslant \tilde{f}(a) = 0$$
  × Or, d'après la question *4.* : $\forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) \geqslant 0$.
  On en déduit :
  $$\forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0 \quad \textit{(donc } f(t) = t\textit{)}$$
  Le maximum de $\tilde{f}$ est donc 0 et il est atteint en chaque réel du segment $[0,1]$.
  On peut donc choisir n'importe quel réel de $]0,1[$ pour t_0.
  Par exemple, on choisit : $t_0 = \dfrac{1}{2} \in]0,1[$.
- Si $a = 1$. Alors, en raisonnant comme pour le cas $a = 0$, on obtient :
  $$\forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0$$
  On choisit donc encore : $t_0 = \dfrac{1}{2} \in]0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe toujours } t_0 \in]0,1[\text{ tel que : } \tilde{f}(t_0) = \max_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t).}$$

□

b) Montrer que pour tout t de $[0,t_0]$, $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t}{t_0}$.

Démonstration.

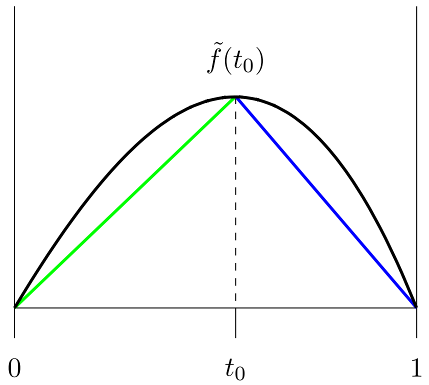
- La fonction $\tilde{f}$ est concave sur $[0,t_0]$.
Sa courbe représentative est donc située au-dessus de sa corde sur $[0,t_0]$.
- Or la corde sur $[0,t_0]$ de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ est le segment reliant les points $(0,\tilde{f}(0))$ et $(t_0,\tilde{f}(t_0))$.
Donc, c'est le segment reliant $(0,0)$ et $(t_0,\tilde{f}(t_0))$.
Montrons que $y = \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t}{t_0}$ est l'équation de la droite (D) passant par ces deux points.
  × La fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t}{t_0}$ est bien une fonction affine.
  × Ensuite : $\tilde{f}(t_0)\, \dfrac{0}{t_0} = 0$.
  Donc (D) passe bien par le point $(0,0)$.
  × Enfin : $\tilde{f}(t_0)\, \dfrac{t_0}{t_0} = \tilde{f}(t_0)$.
  Donc (D) passe bien par le point $(t_0,\tilde{f}(t_0))$.

  La corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[0,t_0]$ est donc la représentation de la fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t}{t_0}$ sur $[0,t_0]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [0,t_0],\ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\, \frac{t}{t_0}}$$

Commentaire

- Comme à la question ***4.a)***, on pouvait appliquer l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec :
$$t_1 = t_0, \quad t_2 = 0, \quad \lambda = \frac{t}{t_0}$$
(on a bien $\lambda \in [0, 1]$ car $t \in [0, t_0]$)
On obtient alors :
$$\tilde{f}\left(\frac{t}{\cancel{t_0}} \times \cancel{t_0} + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \times 0\right) \geqslant \frac{t}{t_0}\, \tilde{f}(t_0) + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \tilde{f}(0)$$
Or : $\tilde{f}(0) = 0$. D'où : $\tilde{f}(t) \geqslant \dfrac{t}{t_0} \tilde{f}(t_0)$.
- On peut représenter la situation graphiquement :



Le segment vert représente la corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[0, t_0]$ et le segment bleu représente la corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[t_0, 1]$.

□

c) Montrer que pour tout t de $[t_0, 1]$, $\tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$.

Démonstration.

- La fonction $\tilde{f}$ est concave $[t_0, 1]$.
Sa courbe représentative est donc située au-dessus de sa corde sur $[t_0, 1]$.
- Or la corde sur $[t_0, 1]$ de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ est le segment reliant les points $(t_0, \tilde{f}(t_0))$ et $(1, \tilde{f}(1))$.
Donc, d'après la question ***5.a)***, c'est le segment reliant $(t_0, \tilde{f}(t_0))$ et $(1, 0)$.
Montrons que $y = \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$ est l'équation de la droite (d) passant par ces deux points.
  - × La fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$ est bien une fonction affine.
  - × Ensuite : $\tilde{f}(t_0)\, \dfrac{t_0-1}{t_0-1} = \tilde{f}(t_0)$.
Donc (d) passe bien par le point $(t_0, \tilde{f}(t_0))$.
  - × Enfin : $\tilde{f}(t_0)\, \dfrac{1-1}{t_0-1} = 0$.
Donc (d) passe bien par le point $(1, 0)$.

La corde de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ sur $[t_0, 1]$ est donc représentée par la fonction $t \mapsto \tilde{f}(t_0) \cdot \dfrac{t-1}{t_0-1}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [t_0, 1],\ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\, \frac{t-1}{t_0-1}}$$

Commentaire

Comme à la question ***4.a)***, on pouvait aussi appliquer l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec :

$$t_1 = t_0, \quad t_2 = 1, \quad \lambda = \frac{t-1}{t_0-1}$$

(on a bien $\lambda \in [0,1]$ car $t \in [t_0, 1]$)

$\square$

d) En déduire que $I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0)$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)*** :

$$\forall t \in [0, t_0], \ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\, \frac{t}{t_0}$$

Donc, par croissance de l'intégration (les bornes sont bien ordonnées) :

$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\, dt \geqslant \int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\, \frac{t}{t_0}\, dt$$

Or :

$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\, \frac{t}{t_0}\, dt = \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0} \int_0^{t_0} t\, dt = \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{t_0} = \frac{\tilde{f}(t_0)}{2\, t_0} (t_0^2 - 0^2) = \frac{\tilde{f}(t_0)\, t_0}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\, dt \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)\, t_0}{2}.}$$

- De même, d'après la question ***5.c)*** :

$$\forall t \in [t_0, 1], \ \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0)\, \frac{t-1}{t_0-1}$$

Donc, par croissance de l'intégration (les bornes sont bien ordonnées) :

$$\int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t)\, dt \geqslant \int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t_0)\, \frac{t-1}{t_0-1}\, dt$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t_0)\, \frac{t-1}{t_0-1}\, dt &= \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1} \int_{t_0}^{1} (t-1)\, dt = \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1} \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_{t_0}^{1} \\
&= \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1} \left(\frac{1^2}{2} - 1 - \left(\frac{t_0^2}{2} - t_0 \right) \right) = \frac{\tilde{f}(t_0)}{2(t_0-1)} (-t_0^2 + 2t_0 - 1) \\
&= -\frac{\tilde{f}(t_0)}{2(t_0-1)} (t_0^2 - 2t_0 + 1) = -\frac{\tilde{f}(t_0)}{2\cancel{(t_0-1)}} (t_0-1)^{\cancel{2}} \\
&= \frac{\tilde{f}(t_0)(1-t_0)}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_{t_0}^{1} \tilde{f}(t)\, dt \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)(1-t_0)}{2}.}$$

- Par relations de Chasles :

$$\begin{array}{rcl} I(f) & = & 2 \displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt \\ & = & 2 \displaystyle\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\ dt + 2 \displaystyle\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)\ dt \\ & \geqslant & \tilde{f}(t_0)\, t_0 + \tilde{f}(t_0)(1-t_0) \ = \ \tilde{f}(t_0) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0).}$$

□

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30% de la population possèdent 9% de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.

Partie II - Le cas à densité

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(v)\ dv$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x. On suppose de plus que $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\, g(v)\ dv$ est convergente et on note m sa valeur qui représente donc la richesse moyenne de la population.

6. a) Montrer que $m > 0$.

Démonstration.
La fonction $v \mapsto v\, g(v)$ est :
- × continue sur $]0, +\infty[$, en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$;
- × **strictement** positive sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc, par positivité de l'intégrale : } m = \int_0^{+\infty} v\, g(v)\ dv > 0.}$$

□

b) Montrer que G est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. On notera G^{-1} son application réciproque.

Démonstration.
- La fonction g est nulle en dehors de $]0, +\infty[$. Donc, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\int_{-\infty}^x g(v)\ dv \ = \ \int_0^x g(v)\ dv \ = \ G(x)$$

On en déduit que la fonction G coïncide sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction de répartition associée à la densité g.
En particulier, la fonction G :
- × est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- × est croissante sur $\mathbb{R}_+$,
- × vérifie : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = 1$.

- La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$.
  Donc, en tant que primitive de g, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
  De plus, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:
$$G'(x) = g(x) > 0$$
  D'où G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (car $g(0) = 0$ et donc : $\forall x > 0$, $g(x) > g(0)$).
- En résumé, la fonction G est :
  × continue sur $[0, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

  Ainsi, G réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $G([0, +\infty[)$.
$$G([0, +\infty[) = \left[G(0), \lim_{x \to +\infty} G(x) \right[= [0, 1[$$
$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur } [0, 1[.}$$
□

c) Quel est le sens de variation de G^{-1} sur $[0, 1[$?

Démonstration.
D'après le théorème de la bijection, la fonction G^{-1} est continue sur $[0, 1[$ et strictement monotone sur $[0, 1[$, de même sens de variation que G.
$$\boxed{\text{La fonction } G^{-1} \text{ est donc strictement croissante sur } [0, 1[.}$$
□

7. *a)* À l'aide du changement de variable $u = G(v)$, établir que pour tout $t \in [0, 1[$,
$$\int_0^t G^{-1}(u) \, du = \int_0^{G^{-1}(t)} v \, g(v) \, dv$$

Démonstration.
- La fonction G^{-1} est continue sur $[0, 1[$.
  Donc, en particulier, pour tout $t \in [0, 1[$, G^{-1} est continue sur le segment $[0, t]$.
$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in [0, 1[, \text{ l'intégrale } \int_0^t G^{-1}(u) \, du \text{ est bien définie.}}$$
- Soit $t \in \,]0, 1[$. Soit $a > 0$.
  On effectue le changement de variable $\boxed{u = G(v)}$, où G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, t] \subset \,]0, +\infty[$ (d'après la question ***6.b)***).

  $u = G(v)$ (et donc $v = G^{-1}(u)$)
  $\hookrightarrow du = g(v) \, dv$
  - $v = G^{-1}(a) \;\Rightarrow\; u = G(G^{-1}(a)) = a$
  - $v = G^{-1}(t) \;\Rightarrow\; u = G(G^{-1}(t)) = t$

On obtient finalement :

$$\int_a^t G^{-1}(u)\,du \;=\; \int_{G(G^{-1}(a))}^{G(G^{-1}(t))} G^{-1}(u)\,du \;=\; \int_{G^{-a}}^{G^{-1}(t)} G^{-1}(G(v))\,g(v)\,dv \;=\; \int_{G^{-1}(a)}^{G^{-1}(t)} v\,g(v)\,dv$$

Or : $\lim\limits_{a\to 0} G^{-1}(a) = G^{-1}(0) = 0$.

De plus, d'après l'énoncé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\,g(v)\,dv$ converge en 0.

$$\boxed{\text{Donc : } \forall t \in [0,1[,\ \int_0^t G^{-1}(u)\,du = \int_0^{G^{-1}(t)} v\,g(v)\,dv.}$$

$\square$

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 G^{-1}(u)\,du$ converge et donner sa valeur.

Démonstration.
D'après la question ***6.b)*** : $\lim\limits_{t\to 1^-} G^{-1}(t) = +\infty$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\,g(v)\,dv$ converge.

D'après la question précédente, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 G^{-1}(u)\,du$ converge et :

$$\int_0^1 G^{-1}(u)\,du = \int_0^{+\infty} v\,g(v)\,dv = m$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 G^{-1}(u)\,du \text{ converge et vaut } m.}$$

$\square$

8. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(t) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^t G^{-1}(u)\,du$ pour tout $t \in [0,1[$ et $f(1) = 1$.

a) (i) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

Démonstration.

- La fonction G^{-1} est continue sur $[0,1[$.
  Donc elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
  On obtient alors :
  $$\forall t \in [0,1[,\ f(t) = \frac{1}{m}(F(t) - F(0))$$
  Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ en tant que transformée affine d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
  En particulier, f est continue sur $[0,1[$.
- De plus, d'après la question précédente :
  $$\lim_{t\to 1^-} f(t) = \frac{1}{\cancel{m}} \times \cancel{m} = 1 = f(1)$$
  Donc f est continue en 1.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ est continue sur } [0,1].}$$

$\square$

(ii) Montrer que f est convexe sur $[0,1[$. **On admettra qu'en fait f est convexe sur** $[0,1]$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
  De plus, comme F est une primitive de G^{-1}, on obtient, pour tout $t \in [0,1[$:
  $$f'(t) = \frac{1}{m}\, F'(t) = \frac{1}{m}\, G^{-1}(t)$$
- Or, d'après la question ***6.c)***, la fonction G^{-1} est strictement croissante sur $[0,1[$.
  Donc, comme $\dfrac{1}{m} > 0$, f' est strictement croissante sur $[0,1[$.

$$\boxed{\text{D'où, d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}},\ f \text{ est convexe sur } [0,1[.}$$

□

(iii) En déduire que f est un élément de E.

Démonstration.

- D'après la question ***8.a)(i)***, la fonction f est continue sur $[0,1]$.
- D'après la question ***8.a)(ii)***, la fonction f est convexe sur $[0,1]$.
- $f(0) = \dfrac{1}{m} \displaystyle\int_0^0 G^{-1}(u)\ du = 0$
- $f(1) = 1$
- D'après la question précédente : $f' = \dfrac{1}{m}\, G^{-1}$.
  Or la fonction G^{-1} est à valeurs dans $[0,+\infty[$.
  D'où : $\forall t \in [0,1[,\ f'(t) \geqslant 0$. Ainsi f est croissante sur $[0,1[$, donc sur $[0,1]$ par continuité.
  Soit $t \in [0,1]$. On a alors :
  $$f(0) \ \leqslant\ f(t) \ \leqslant\ f(1)$$
  Donc : $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$. Ainsi f est à valeurs dans $[0,1]$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f \in E.}$$

□

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité
$$I(f) = -1 + \frac{2}{m} \int_0^{\infty} v\, g(v)\, G(v)\ dv$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***2.b)*** :
  $$I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t)\ dt$$
  On s'intéresse donc au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.
- Soit $a \in [0,1[$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\left|\begin{array}{rclcrclcl} u(t) & = & f(t) & \quad & u'(t) & = & f'(t) & = & \dfrac{1}{m}\, G^{-1}(t) \\[2ex] v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t & & \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^a f(t)\ dt &= [\ t\, f(t)\ ]_0^a - \frac{1}{m} \int_0^a t\, G^{-1}(t)\ dt \\ &= a\, f(a) - \frac{1}{m} \int_0^a t\, G^{-1}(t)\ dt \quad (*) \end{aligned}$$

On sait déjà : $\lim\limits_{a \to 1^-} a\, f(a) = 1 \times f(1) = 1$.

On s'intéresse donc au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a t\, G^{-1}(t)\ dt$.

- Comme en question ***7.a)***, on effectue le changement de variable $\boxed{t = G(v)}$, où G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$.

$$\left|\begin{array}{l} t = G(v) \text{ (et donc } v = G^{-1}(t)) \\ \hookrightarrow dt = g(v)\ dv \\ \bullet\ v = 0 \ \Rightarrow\ t = G(0) = 0 \\ \bullet\ v = G^{-1}(a) \ \Rightarrow\ t = G(G^{-1}(a)) = a \end{array}\right.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^a t\, G^{-1}(t)\ dt &= \int_0^{G(G^{-1}(a))} t\, G^{-1}(t)\ dt \\ &= \int_0^{G^{-1}(a)} G(v)\, G^{-1}(G(v))\, g(v)\ dv \\ &= \int_0^{G^{-1}(a)} G(v)\, v\, g(v)\ dv \end{aligned}$$

- On en déduit, avec $(*)$:

$$\int_0^{G^{-1}(a)} v\, g(v)\, G(v)\ dv = m \left(af(a) - \int_0^a f(t)\ dt \right)$$

Or : $\lim\limits_{a \to 1^-} a\, f(a) = 1$.

De plus $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ converge, car f est continue sur $[0,1]$.

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\, g(v)\, G(v)\ dv$ converge (car : $\lim\limits_{a \to 1^-} G^{-1}(a) = +\infty$).

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} I(f) &= 1 - 2 \int_0^1 f(t)\ dt \\ &= 1 - 2 \left(1 - \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} v\, g(v)\, G(v)\ dv \right) \\ &= -1 + \frac{2}{m} \int_0^{+\infty} v\, g(v)\, G(v)\ dv \end{aligned}$$

$$\boxed{I(f) = -1 + \frac{2}{m} \int_0^{+\infty} v\, g(v)\, G(v)\ dv}$$

□

9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Expliciter $G(x)$ pour $x > 0$.

Démonstration.
On rappelle que G coïncide sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction de répartition associée à la densité g.
La fonction G coïncide donc ici sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction de répartition d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

$$\boxed{\forall x > 0,\ G(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

□

b) Expliciter $G^{-1}(u)$ pour $u \in [0, 1[$.

Démonstration.
Soit $u \in [0, 1[$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} G^{-1}(u) = x \quad &\Leftrightarrow \quad u = G(x) \ \Leftrightarrow \ u = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \ \Leftrightarrow \ 1 - u = \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(1-u) = -\lambda x \ \Leftrightarrow \ -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u) = x \qquad \textit{(car } \lambda \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall u \in [0, 1[,\ G^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)}$$

□

c) Donner la valeur de m.

Démonstration.
On note X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
On rappelle que g est une densité de X. Donc :

$$m = \int_0^{+\infty} v\, g(v)\ dv = \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.}$$

□

d) Soit $t \in [0, 1[$. Montrer que $f(t) = -\displaystyle\int_0^t \ln(1-u)\ du$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, 1[$.
Par définition de f (question ***8.***) :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{m} \int_0^t G^{-1}(u)\ du \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} \int_0^t -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)\ du \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.b)}} \textit{ et } \textbf{\textit{9.c)}}\textit{)} \\ &= -\int_0^t \ln(1-u)\ du \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, 1[,\ f(t) = -\int_0^t \ln(1-u)\ du}$$

□

e) En déduire que pour tout t élément de $[0,1[$, on a $f(t) = (1-t)\ln(1-t) + t$.

Démonstration.
On note $h : t \mapsto (1-t)\ \ln(1-t) + t$.
Pour montrer que f coïncide avec h, vérifions que h est l'unique primitive de $t \mapsto -\ln(1-t)$ qui s'annule en 0.

- $h(0) = (1-0)\ \ln(1-0) + 0 = 0$
- La fonction h est dérivable sur l'intervalle $[0,1[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $[0,1[$.
  Soit $t \in [0,1[$.

$$h'(t) = -\ln(1-t) - \cancel{(1-t)}\frac{1}{\cancel{1-t}} + 1 = -\ln(1-t) - \cancel{1} + \cancel{1} = -\ln(1-t)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f : t \mapsto (1-t)\ln(1-t) + t.}$$

Commentaire

- Il était également possible (bien que plus long et périlleux) d'effectuer une intégration par parties. Détaillons cette méthode.
  Soit $x \in [0,1[$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\left|\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} u(t) & = & \ln(1-t) & u'(t) & = & -\dfrac{1}{1-t} \\[2ex] v'(t) & = & -1 & v(t) & = & 1-t \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \displaystyle\int_0^x -\ln(1-t)\ dt \\[2ex] & = & \Big[\ (1-t)\ln(1-t)\ \Big]_0^x + \displaystyle\int_0^x \cancel{(1-t)}\frac{1}{\cancel{1-t}}\ dt \\[2ex] & = & (1-x)\ln(1-x) + \displaystyle\int_0^x 1\ dt \ = \ (1-x)\ln(1-x) + \Big[\ t\ \Big]_0^x \\[2ex] & = & (1-x)\ln(1-x) + x \end{array}$$

- On remarque le choix non usuel d'une primitive de $v' : t \mapsto -1$.
  On choisit ici $v : t \mapsto 1-t$ plutôt que $v : t \mapsto -t$ dans un soucis de simplification des calculs ultérieurs.

$\square$

f) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\ dt$ et la calculer.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto (1-t)\ln(1-t)$ est continue sur $[0,1[$.
- Soit $a \in [0,1[$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(1-t) & & u'(t) & = & -\dfrac{1}{1-t} \\ v'(t) & = & 1-t & & v(t) & = & -\dfrac{1}{2}(1-t)^2 \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^a (1-t)\ln(1-t)\ dt & = & \left[-\dfrac{1}{2}(1-t)^2 \ln(1-t) \right]_0^a - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^a (1-t)^{\cancel{2}} \dfrac{1}{\cancel{1-t}}\ dt \\ & = & -\dfrac{1}{2}(1-a)^2 \ln(1-a) - \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{2}(1-t)^2 \right]_0^a \\ & = & -\dfrac{1}{2}(1-a)^2\ln(1-a) + \dfrac{1}{4}((1-a)^2 - 1) \end{array}$$

- De plus : $\displaystyle\lim_{a \to 1^-} (1-a)^2 = 0$.
- On a aussi : $\displaystyle\lim_{a\to 1^-} (1-a) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^2\ln(x) = 0$ (par croissances comparées).
  D'où : $\displaystyle\lim_{a \to 1^-} (1-a)^2\ln(1-a) = 0$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\ dt \text{ converge et vaut } -\dfrac{1}{4}.}$$

□

g) En déduire la valeur de $I(f)$.

Démonstration.

- Par définition :

$$I(f) \ = \ 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\ dt \ = \ 2\int_0^1 (t - f(t))\ dt$$

Cette intégrale est bien définie car la fonction $t \mapsto t - f(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ (la fonction f est continue sur $[0,1]$).

- De plus, d'après la question ***9.e)***, pour tout $t \in [0,1[$:

$$t - f(t) \ = \ \cancel{t} - \Big((1-t)\ln(1-t) + \cancel{t}\Big) \ = \ -(1-t)\ln(1-t)$$

- On en déduit, avec la question précédente :

$$I(f) \ = \ -2\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\ dt \ = \ -2\left(-\dfrac{1}{4}\right) \ = \ \dfrac{1}{2}$$

$$\boxed{I(f) = \dfrac{1}{2}}$$

□

Partie III - Application à une population

Une population de N personnes est divisée en deux classes (typiquement hommes et femmes) et en n catégories (par exemple socio-professionnelles), suivant le tableau à double entrée suivant où tous les x_i et y_i pour i dans $[\![1, n]\!]$ sont des entiers naturels.
On suppose en outre que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$.

Classes \ Catégories	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_n	Total
I	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	X
II	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n	Y
Total	n_1	n_2	n_3	$\cdots$	n_i	$\cdots$	n_n	N

où on a donc posé $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ et $X + Y = N$. On suppose en outre que $Y > 0$.
Pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$, on adopte les notations suivantes :

$$p_i = \frac{n_i}{N}, \ q_i = \frac{x_i}{X}, \ r_i = \frac{y_i}{Y}$$

On note aussi $\varepsilon_i = \dfrac{x_i}{n_i}$, et $\varepsilon = \dfrac{X}{N}$, et on suppose que les catégories sont numérotées de telle sorte que :

$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_n$$

10. On pose $\Omega = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, ensemble des catégories dans la population.

a) Montrer que $P = (p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $Q = (q_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $R = (r_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des distributions de probabilités.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
  D'après l'énoncé : $x_i \in \mathbb{N}^*$ et $y_i \in \mathbb{N}$.
  Donc : $n_i = x_i + y_i \in \mathbb{N}^*$. En particulier : $n_i > 0$.
  De plus : $N = X + Y$, avec $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > 0$ et $Y > 0$.
  Donc $N > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i = \frac{n_i}{N} > 0.}$$

- On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \right) = \frac{1}{N}(X+Y) = \frac{N}{N} = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc } P \text{ est une loi de probabilité.} \\ \text{De même, } Q \text{ et } R \text{ sont des lois de probabilité.}\end{array}}$$

□

b) Montrer que : $\dfrac{q_1}{p_1} \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{q_n}{p_n}$ $(*)$

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
$$\frac{q_i}{p_i} = \frac{\frac{x_i}{X}}{\frac{n_i}{N}} = \frac{N}{X}\,\frac{x_i}{n_i} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$$
- Or, d'après l'énoncé :
$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_n$$
- De plus : $\varepsilon = \dfrac{X}{n} > 0$.
En effet, d'après la question précédente : $X > 0$ et $N > 0$.
- On obtient donc :
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \frac{q_1}{p_1} \leqslant \cdots \leqslant \frac{q_n}{p_n}}$$

□

c) Montrer que : $\dfrac{r_1}{p_1} \geqslant \cdots \geqslant \dfrac{r_n}{p_n}$.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
$$\frac{r_i}{p_i} = \frac{\frac{y_i}{Y}}{\frac{n_i}{N}} = \frac{N}{Y}\,\frac{y_i}{n_i} = \frac{N}{Y}\,\frac{n_i - x_i}{n_i} = \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_i)$$
- Or, d'après l'énoncé :
$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_n$$
Donc :
$$1-\varepsilon_1 \geqslant 1-\varepsilon_2 \geqslant \cdots \geqslant 1-\varepsilon_n$$
- De plus : $\dfrac{N}{Y} > 0$. En effet : $N > 0$ et $Y > 0$.
- On obtient donc :
$$\frac{N}{Y}(1-\varepsilon_1) \geqslant \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_2) \geqslant \ldots \geqslant \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \frac{r_1}{p_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{r_n}{p_n}}$$

□

d) Montrer que pour i appartenant à $[\![1,n]\!]$, $r_i = \dfrac{n_i - x_i}{N - X} = \dfrac{p_i - \varepsilon q_i}{1-\varepsilon}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

- Tout d'abord : $r_i = \dfrac{y_i}{Y} = \dfrac{n_i - x_i}{N - X}$
- De plus :
$$\frac{p_i - \varepsilon\, q_i}{1-\varepsilon} = \frac{\frac{n_i}{N} - \frac{\cancel{X}}{N}\,\frac{x_i}{\cancel{X}}}{1 - \frac{X}{N}} = \frac{\frac{n_i - x_i}{\cancel{N}}}{\frac{N-X}{\cancel{N}}} = \frac{n_i - x_i}{N - X}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ r_i = \frac{n_i - x_i}{N-X} = \frac{p_i - \varepsilon\, q_i}{1-\varepsilon}}$$

□

11. Dans un premier temps, nous allons construire une application appartenant à E, qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.

On pose $P_0 = Q_0 = 0$, et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum\limits_{h=1}^{i} p_h$ et $Q_i = \sum\limits_{h=1}^{i} q_h$. On définit alors l'application φ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

a) On suppose **dans cette question** $n = 3$.
Représenter dans un repère orthonormé φ lorsque $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

Démonstration.
D'après l'énoncé :

× $p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $q_1 = \dfrac{1}{3}$. Donc : $(P_1, Q_1) = (p_1, q_1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$.

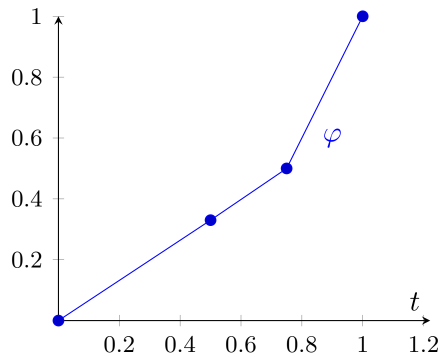
× $p_2 = \dfrac{1}{4}$ et $q_2 = \dfrac{1}{6}$. Donc : $(P_2, Q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.

× $p_3 = \dfrac{1}{4}$ et $q_3 = \dfrac{1}{2}$. Donc : $(P_3, Q_3) = (p_1 + p_2 + p_3, q_1 + q_2 + q_3) = (1, 1)$.

On peut résumer ces informations dans le tableau suivant :

i	0	1	2	3
P_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
Q_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Comme la fonction φ est affine sur chaque segment $[P_i, P_{i+1}]$, il suffit alors de relier les points précédents par des segments. On obtient la figure suivante :



□

b) Montrer que, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est $u_i = \frac{q_i}{p_i}$ pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Le coefficient directeur de la droite passant par (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est donné par :

$$\frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{\sum\limits_{h=1}^{i} q_h - \sum\limits_{h=1}^{i-1} q_h}{\sum\limits_{h=1}^{i} p_h - \sum\limits_{h=1}^{i-1} p_h} = \frac{q_i}{p_i}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i = \frac{q_i}{p_i}}$$

□

c) Montrer que si $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $t \in [P_i, P_{i+1}]$, on a $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

× Le coefficient directeur de la droite représentant φ sur $[P_i, P_{i+1}]$ est : $u_{i+1} = \dfrac{q_{i+1}}{p_{i+1}}$.
Donc l'expression de la fonction φ est de la forme $t \mapsto u_{i+1}\, t + b$, avec $b \in \mathbb{R}$.

× De plus, $\varphi(P_i) = Q_i$. Donc :
$$Q_i = u_{i+1} \times P_i + b$$
D'où : $b = Q_i - u_{i+1}\, P_i$

Donc, pour tout $t \in [P_i, P_{i+1}]$:
$$\varphi(t) = u_{i+1}\, t + (Q_i - u_{i+1}\, P_i) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$$
$$\boxed{\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in [P_i, P_{i+1}],\ \varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i}$$
□

d) **En admettant** que les inégalités $(*)$ de la question ***10.b)*** permettent d'affirmer que φ est convexe, justifier que φ appartient à E.

Démonstration.

- La fonction φ est définie sur $[0, 1]$ car, comme P est une loi de probabilité : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $0 \leqslant P_i \leqslant 1$.
- La fonction φ est à valeurs dans $[0, 1]$ car :
  × comme Q est une loi de probabilité : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $0 \leqslant Q_i \leqslant 1$.
  × la fonction φ est de plus affine sur chaque intervalle $[P_i, P_{i+1}]$.
  Donc, sur cet intervalle : $0 \leqslant Q_i \leqslant \varphi(t) \leqslant Q_{i+1} \leqslant 1$.
- L'énoncé affirme que φ est convexe sur $[0, 1]$.
- Par construction, φ est continue sur $[0, 1]$ (elle est même affine par morceaux).
- $\varphi(0) = \varphi(P_0) = Q_0 = 0$.
- $\varphi(1) = \varphi(P_n) = Q_n = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \varphi \in E}$$
□

e) Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $\displaystyle\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.
D'après la question ***11.c)*** : $\forall t \in [P_i, P_{i+1}]$, $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$. Donc :
$$\begin{aligned}\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt &= \int_{P_i}^{P_{i+1}} (u_{i+1}(t - P_i) + Q_i)\ dt \\ &= u_{i+1} \int_{P_i}^{P_{i+1}} (t - P_i)\ dt + \int_{P_i}^{P_{i+1}} Q_i\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)}\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt & = & u_{i+1} \left[\dfrac{(t-P_i)^2}{2} \right]_{P_i}^{P_{i+1}} + Q_i\ [\ t\ ]_{P_i}^{P_{i+1}} \\[2ex]
& = & u_{i+1} \dfrac{(P_{i_1}-P_i)^2}{2} + Q_i(P_{i+1}-P_i) \\[2ex]
& = & \dfrac{Q_{i+1}-Q_i}{\cancel{P_{i+1}-P_i}} \dfrac{(P_{i+1}-P_i)^{\cancel{2}}}{2} + Q_i(P_{i+1}-P_i) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11.b)}}\textit{)} \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{2}(Q_{i+1}-Q_i)(P_{i+1}-P_i) + Q_i(P_{i+1}-P_i) \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{2}(P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}-Q_i+2Q_i) \\[2ex]
& = & \dfrac{1}{2}(P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i)
\end{array}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt = \frac{1}{2}(P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i)}$$

$\square$

f) Exprimer $I(\varphi)$ sous la forme d'une somme en fonction de $P_0, P_1, ..., P_n, Q_0, ...Q_n$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.b)*** :

$$I(\varphi) \ = \ 1 - 2 \int_0^1 \varphi(t)\ dt \ = \ 1 - 2 \int_{P_0}^{P_n} \varphi(t)\ dt$$

- De plus, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{P_0}^{P_n} \varphi(t)\ dt \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\ dt \ = \ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } I(\varphi) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i).}$$

$\square$

12. Nous allons maintenant étudier l'application correspondante pour la classe II.

On pose $P_0 = R_0 = 0$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum\limits_{h=1}^{i} p_h$ et $R_i = \sum\limits_{h=1}^{i} r_h$. De même, on définit pour i élément de $[\![0, n]\!]$, $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$. On considère l'application ψ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\psi(P_i) = R_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

a) Montrer que la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est $v_i = \frac{r_i}{p_i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Le coefficient directeur de la droite passant par (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est donné par :

$$\frac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} \ = \ \frac{\sum\limits_{h=1}^{i} r_h - \sum\limits_{h=1}^{i-1} r_h}{\sum\limits_{h=1}^{i} p_h - \sum\limits_{h=1}^{i-1} p_h} \ = \ \frac{r_i}{p_i}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ v_i = \frac{r_i}{p_i}}$$

$\square$

b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0,1]$, par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1-t)$.

(i) On suppose **dans cette question** $n = 3$.
Représenter dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de ψ et ψ^* lorsque $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $R = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Par définition de ψ^* :

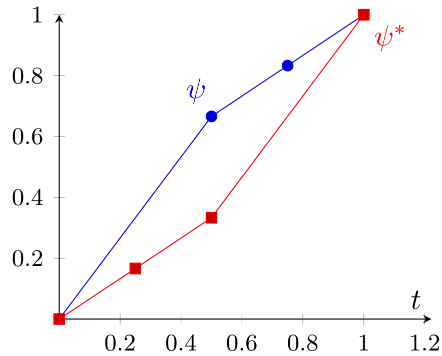
$$\psi^*(\Pi_i) = 1 - \psi(1 - \Pi_i) = 1 - \psi(P_{n-i}) = 1 - R_{n-i}$$

Détaillons, par exemple, le calcul de $\psi^*(\Pi_2)$.

- Tout d'abord : $\Pi_2 = 1 - P_{3-2} = 1 - P_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
- De plus : $\psi^*(\Pi_2) = 1 - R_{3-2} = 1 - R_1 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

On procède ensuite comme en question ***11.a)*** et on obtient le tableau et la figure suivants :

i	0	1	2	3
P_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
R_i	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1
Π_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1



□

(ii) Montrer que ψ^* est convexe sur $[0,1]$.

Démonstration.

- Comme en question ***11.d)***, on admet que les inégalités de ***10.c)*** permettent d'affirmer que ψ est concave sur $[0,1]$.
- Montrons que ψ^* est alors convexe sur $[0,1]$.
  Soit $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda\, \psi^*(t_1) + (1-\lambda)\psi^*(t_2) & = & \lambda(1 - \psi(1-t_1)) + (1-\lambda)(1 - \psi(1-t_2)) \\ & = & \cancel{\lambda} - \lambda\, \psi(1-t_1) + 1 - \cancel{\lambda} + (1-\lambda)\psi(1-t_2) \\ & = & 1 - \Big(\lambda\, \psi(1-t_1) + (1-\lambda)\psi(1-t_2)\Big) \end{array}$$

- Or $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$, donc $(1-t_1, 1-t_2) \in [0,1]^2$.
  D'où, par concavité de ψ :

$$\lambda\, \psi(1-t_1) + (1-\lambda)\psi(1-t_2) \ \leqslant\ \psi(\lambda\,(1-t_1) + (1-\lambda)t_2)$$

  De plus :

$$\psi(\lambda\,(1-t_1) + (1-\lambda)(1-t_2)) \ = \ \psi(\cancel{\lambda} - \lambda\, t_1 + 1 - \cancel{\lambda} - (1-\lambda)t_2) \ = \ \psi\Big(1 - (\lambda\, t_1 + (1-\lambda)t_2)\Big)$$

- On obtient alors :

$$\lambda\,\psi^*(t_1) + (1-\lambda)\psi^*(t_2) \ \geqslant\ 1 - \psi\Big(1 - (\lambda\,t_1 + (1-\lambda)t_2)\Big)$$

D'où, par définition de ψ^* :

$$\psi^*(\lambda\,t_1 + (1-\lambda)t_2) \ \leqslant\ \lambda\,\psi^*(t_1) + (1-\lambda)\psi^*(t_2)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \psi^* \text{ est convexe sur } [0,1].}$$

□

(iii) Montrer que ψ^* est affine sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Démonstration.
On note σ la fonction $t \mapsto 1 - t$.
Par définition de ψ^* :

$$\psi^* = \sigma \circ \psi \circ \sigma$$

Or :

× la fonction σ est une bijection affine de $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ sur $[P_{n-i}, P_{n-i+1}]$,

× la fonction ψ est affine sur $[P_{n-i}, P_{n-i+1}]$.

Ainsi, sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$, la fonction ψ^* est une composition de trois fonctions affines.

$$\boxed{\text{Donc } \psi^* \text{ est affine sur } [\Pi_{i-1}, \Pi_i].}$$

□

(iv) Montrer que la pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ est v_{n-i+1} pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
D'après la question ***12.b)(i)***, le coefficient directeur de ψ^* sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ est donné par :

$$\frac{\psi^*(\Pi_i) - \psi^*(\Pi_{i-1})}{\Pi_i - \Pi_{i-1}} \ = \ \frac{\cancel{1} - R_{n-i} - (\cancel{1} - R_{n-(i-1)})}{\cancel{1} - P_{n-i} - (\cancel{1} - P_{n-(i-1)})} \ = \ \frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{P_{n-i+1} - P_{n-i}} \ = \ \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} \ = \ v_{n-i+1}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1, n]\!], \text{ la pente de } \psi^* \text{ sur } [\Pi_{i-1}, \Pi] \text{ est donc } v_{n-i+1}.}$$

□

On dit dans cette situation que les fonctions φ et ψ^* sont **adjointes** l'une de l'autre. C'est leur comparaison que Gini a proposé de considérer pour « mesurer les inégalités » entre la population de catégorie I et celle de catégorie II.
Une égalité entre les fonctions adjointes signale notamment l'absence totale d'inégalité sociale.
La dernière question précise quelque peu ce point.

13. a) Montrer que si $\varphi = \psi^*$ alors pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$:

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}$$

Démonstration.

- Si $\varphi = \psi^*$, alors ces fonctions sont égales en tout point. En particulier :

  × pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i = \Pi_i$;

  × pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, sur chaque intervalle $[P_i, P_{i+1}]$, $\mathcal{C}_\varphi$ et $\mathcal{C}_{\psi^*}$ ont même pente.

Donc, d'après les questions ***11.b)*** et ***12.b)(iv)*** :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ u_i = v_{n-i+1}$$

- De plus, d'après les questions ***11.b)*** et ***10.b)*** :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ u_i = \frac{q_i}{p_i} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$$

- Enfin, d'après les questions ***12.b)(iv)*** et ***10.c)*** :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ v_{n-i+1} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = \frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \varphi = \psi^*, \text{ alors : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}.}$$

$\square$

b) Montrer que si $\varphi = \psi^*$, alors pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$, $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$.

Démonstration.
Supposons $\varphi = \psi^*$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

- D'après la question précédente : $\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \dfrac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}$ (1).
- On applique cette égalité à $i = n-i+1 \in [\![1,n]\!]$. On obtient alors :

$$\frac{\varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_{\cancel{n}-(\cancel{n}-i+\cancel{1})+\cancel{1}}}{1-\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_i}{1-\varepsilon} \quad (2)$$

- En sommant (1) et (2), on en déduit :

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon_i}{1-\varepsilon}$$

Donc : $(1-\varepsilon)(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}) = \varepsilon(1-\varepsilon_i + 1 - \varepsilon_{n-i+1}) = \varepsilon(2-\varepsilon_i-\varepsilon_{n-i+1})$.
D'où : $(1-\varepsilon)(\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1}) = 2\varepsilon - \varepsilon(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1})$.
Ainsi : $(1-\cancel{\varepsilon}-(-\cancel{\varepsilon}))(\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1}) = 2\varepsilon$.

$$\boxed{\text{Si } \varphi = \psi^*, \text{ alors : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon.}$$

$\square$

c) Déduire que si $\varphi = \psi^*$, on a pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$, $\varepsilon_i(1-2\varepsilon) = \varepsilon(1-2\varepsilon)$.

Démonstration.
Supposons $\varphi = \psi^*$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

- D'après ***13.b)*** : $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$. Donc : $\varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon - \varepsilon_i$.
- D'après ***13.a)*** : $\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \dfrac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}$. Donc : $(1-\varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1-\varepsilon_{n-i+1})$.

On obtient donc :

$$(1-\varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1-(2\varepsilon-\varepsilon_i)) = \varepsilon(1-2\varepsilon) + \varepsilon\,\varepsilon_i$$

D'où :

$$(1-\varepsilon)\varepsilon_i - \varepsilon\,\varepsilon_i = \varepsilon(1-2\varepsilon)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \varphi = \psi^*, \text{ alors : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \varepsilon_i(1-2\varepsilon) = \varepsilon(1-2\varepsilon).}$$

$\square$

d) On suppose que $\varepsilon \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que si $\varphi = \psi^*$, alors pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i = \varepsilon$.
Interpréter ce résultat.

Démonstration.
Supposons $\varphi = \psi^*$.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
  D'après la question précédente : $\varepsilon_i(1 - 2\varepsilon) = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)$.
  Or $\varepsilon \neq \dfrac{1}{2}$, donc $1 - 2\varepsilon \neq 0$. D'où : $\varepsilon_i = \varepsilon$

  $$\boxed{\text{Si } \varphi = \psi^*, \text{ alors : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \varepsilon_i = \varepsilon.}$$

- Lorsque $\varphi = \psi^*$, chaque catégorie présente le même coefficient $\varepsilon_i = \varepsilon$, c'est-à-dire la même proportion $\dfrac{x_i}{n_i} = \varepsilon$ et *a fortiori* la même proportion $\dfrac{y_i}{n_i} = 1 - \varepsilon$.
  Donc le pourcentage de femmes (ou plus généralement de personnes de classe I) est le même dans toutes les catégories socio-professionnelles.

  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Autrement dit, on n'observe aucune inégalité sociale entre la classe I (les femmes)} \\ \text{et la classe II (les hommes).}\end{array}}$$

$\square$