EML 2017

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

Démonstration.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont deux fois dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en tant que fonctions usuelles.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est deux fois dérivable sur }]0,+\infty[\text{ comme somme de fonctions deux fois dérivables sur }]0,+\infty[.}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2}.}$$

□

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

Démonstration.

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > 0$.
  La fonction f' est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = +\infty$.
  Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$.
- De plus : $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$.
  Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$.
- $f'(1) = \mathrm{e}^1 - \dfrac{\mathrm{e}}{1} = \cancel{\mathrm{e}} - \cancel{\mathrm{e}} = 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	||	$+$		$+$	
Variations de f'	|| $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

□

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

Démonstration.
Soit $x \in]0,+\infty[$.

- La fonction f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Ainsi :
  - $\times$ si $x \in]0,1[$, alors $x < 1$ et $f'(x) < f'(1) = 0$.
  - $\times$ si $x > 1$, alors $f'(x) > f'(1) = 0$.

  Donc f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
- Déterminons la limite de f en 0. Comme : $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. On écrit :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) = \mathrm{e}^x \left(1 - \mathrm{e}\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}\right)$$

  Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$.
  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}\ln(1) = \mathrm{e}$.

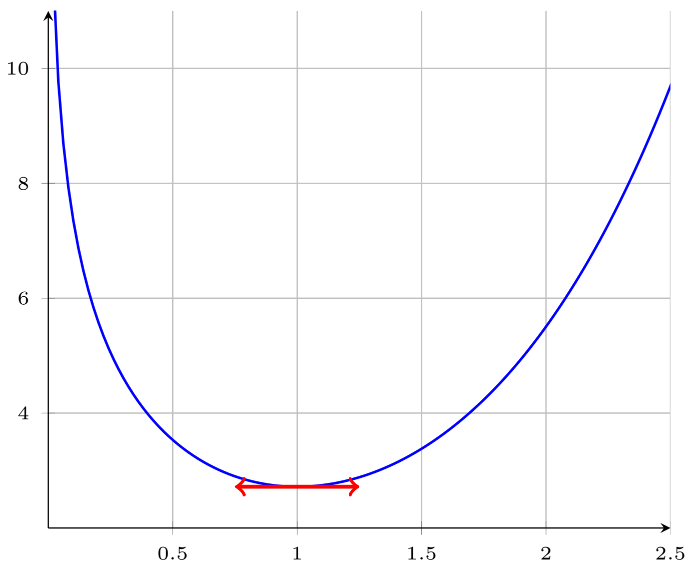
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

$\square$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.



Commentaire

On s'efforcera de faire les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes. D'ailleurs, il ne faut oublier de faire apparaître les tangentes horizontales et les points d'inflexion si on les a déterminés auparavant.

$\square$

4. a) Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ donc f' est dérivable sur $]0,+\infty[$.
De plus, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ainsi, la fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ car elle est la différence de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$u'(x) = f''(x) - 1 = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2} - 1 = \frac{x^2\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e} - x^2}{x^2} = \frac{x^2\ (\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$, la quantité $u'(x)$ est du signe de $x^2\ (\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}$.
Or, comme $x > 0$, alors $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1$. Comme de plus $x^2 > 0$ et $\mathrm{e} > 0$, on en déduit : $u'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \text{ est donc strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

- On a : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = -\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$u(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} - x = \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	‖	$+$
Variations de u	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

$\square$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Démonstration.

- On commence par remarquer :

$$f'(x) = x \;\Leftrightarrow\; f'(x) - x = 0 \;\Leftrightarrow\; u(x) = 0$$

  On cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

- La fonction u est :
  - × continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***4.a)***),
  - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

  Ainsi la fonction u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $u(]0, +\infty|)$.

$$u(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 0} u(x), \lim_{x \to +\infty} u(x) \right[=]-\infty, +\infty[$$

  Or $0 \in]-\infty, +\infty[$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

  $\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f'(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0, +\infty[.}$

- Tout d'abord :
  - × $u(\alpha) = 0$
  - × $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$
  - × $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \dfrac{e}{2} - 2 > 0$

    En effet, d'après les encadrements donnés par l'énoncé, on obtient :
    - $7,3 < e^2 < 7,4$, donc $5,3 < e^2 - 2 < 5,4$
    - $2,7 < e < 2,8$, donc $1,35 < \dfrac{e}{2} < 1,4$, d'où $-1,4 < -\dfrac{e}{2} < -1,35$

    Donc $3,9 < e^2 - 2 - \dfrac{e}{2} < 4,05$, d'où $u(2) > 3,9 > 0$.

  On en déduit :

$$u(1) < u(\alpha) < u(2)$$

  Or, d'après le théorème de la bijection, la bijection réciproque $u^{-1} :]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante.

  $\boxed{\text{En appliquant } u^{-1} \text{ de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : } 1 < \alpha < 2.}$

□

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **Initialisation** :
  $u_0 = 2$. Donc $u_0 \geqslant 2$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geqslant 2$).
  Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
  - La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$.
    Or $u_n \geqslant 2$, donc $u_n \in\ ]0, +\infty[$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
  - D'après la question ***2.***, e est le minimum de f sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire :
    $$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f(x) \geqslant \mathrm{e}$$
    En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in\ ]0, +\infty[$, on obtient :
    $$u_{n+1} \geqslant \mathrm{e} > 2$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 2.}$$ □

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $[2, +\infty[$ d'après la question ***1.a)***, et la fonction $x \mapsto x$ l'est aussi en tant que fonction polynomiale. La fonction g est donc dérivable sur $[2, +\infty[$ en tant que différence de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$.
- Pour tout $x \in [2, +\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 1$.
  D'après la question ***1.b)***, la fonction f' est croissante. Donc, pour tout $x \geqslant 2$:
  $$f'(x) \geqslant f'(2) = \mathrm{e}^2 - \frac{\mathrm{e}}{2} \geqslant 7,3 - 1,4 = 5,9 > 1$$
  On en déduit que pour tout $x \geqslant 2$, $g'(x) > 0$.
  On obtient le tableau de variations suivant :

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$g(2)$ $\nearrow$ $+\infty$

- Déterminons maintenant le signe de g. Comme g est croissante sur $[2, +\infty[$, on a :

$$\forall x \geqslant 2,\ g(x) \geqslant g(2)$$

Il ssufit alors de démontrer : $g(2) > 0$ pour pouvoir conclure. Calculons :

$$g(2) = f(2) - 2 = e^2 - e\ln(2) - 2$$

D'après les approximations de l'énoncé :

× $7,3 < e^2 < 7,4$

× $2,7 < e < 2,8$ et $0,6 < \ln(2) < 0,7$, donc :

$$1,62 = 2,7 \times 0,6 < e\ln(2) < 2,8 \times 0,7 = 1,96$$

D'où $-1,96 < -e\ln(2) < -1,62$.

Ainsi : $e^2 - e\ln(2) - 2 > 7,3 - 1,96 - 2 = 3,34 > 0$.
On en déduit : $g(2) > 0$.

$$\boxed{\forall x \in [2, +\infty[,\ g(x) > 0}$$

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$. Autrement dit, pour tout $x \geqslant 2$:

$$f(x) > x$$

- En appliquant cette inégalité à $x = u_n \geqslant 2$ (question ***5.***), on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc (strictement) croissante.}}$$

□

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

Démonstration.
On sait que la suite (u_n) est croissante (question ***6.b)***), donc :

− soit (u_n) est de plus majorée, et alors elle converge.

− soit (u_n) n'est pas majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que (u_n) est majorée.

- Dans ce cas, la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge vers un réel ℓ.
D'après la question ***5.***, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant 2$.
- D'autre part, par définition : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Par passage à la limite (f est continue sur $[2, +\infty[$), on obtient : $\ell = f(\ell)$, donc $g(\ell) = 0$.
Ceci est absurde car, d'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$, donc $\forall x \geqslant 2$, $g(x) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée et elle diverge vers } +\infty}$$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

× montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,

× montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable. □

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

Démonstration.

```
A = input('A=')
N = 0
u = 2
while u < A
    u = exp(u) - %e * ln(u)
    N = N + 1
end
disp(N)
```

□

9. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$.

Démonstration.

- Montrons que : $\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x$.
  La fonction $h : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $[2, +\infty[$.
  Sa courbe représentative est donc située en dessous de ses tangentes.
  En particulier, elle est sous sa tangente au point 2, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [2, +\infty[,\ \ h(x) \leqslant h'(2)(x-2) + h(2) = \frac{1}{2}(x-2) + \ln(2)$$

  Ainsi, pour tout $x \in [2, +\infty[$:

$$2\ln(x) \ \leqslant\ (x-2) + 2\ln(2) = x + 2(\ln(2) - 1) \leqslant x$$

  En effet, comme : $0,6 < \ln(2) < 0,7$, alors : $2(\ln(2) - 1) < 0$.

$$\boxed{\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x}$$

- Montrons que : $\forall x \in [2, +\infty[,\ x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$.

  Considérons la fonction $h : x \mapsto \dfrac{e^x}{3} - x$.
  La fonction h est dérivable sur $[2, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$.
  Soit $x \in [2, +\infty[$.

$$h'(x) = \frac{e^x}{3} - 1 = \frac{e^x - 3}{3}$$

  Comme $3 > 0$, la quantité $h'(x)$ est du signe de $e^x - 3$.
  Or, comme $x \geqslant 2$, par croissance de la fonction exp :

$$e^x \ \geqslant\ e^2 > 7,3$$

  Et ainsi, $e^x - 3 > 4,3 > 0$ et donc $h'(x) > 0$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$
Variations de h	$h(2) \nearrow +\infty$

De plus $h(2) = \dfrac{e^2}{3} - 2 = \dfrac{e^2-6}{3} > 0$ car $e^2 > 7,3$.
Or h est strictement croissante sur $[2,+\infty[$, donc pour tout $x \in [2,+\infty[$:

$$h(x) \geqslant h(2) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \in [2,+\infty[,\ x \leqslant \dfrac{e^x}{3}.}$$

Commentaire

Pour démontrer la première inégalité, il est bien évidemment possible de passer par l'étude de la fonction $x \mapsto x - 2\ln(x)$.

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-e}{2} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{e^x}{3}$$

En appliquant cette double inégalité à $x = u_n \in [2,+\infty$, on obtient :

$$2\ln(u_n) \leqslant u_n \leqslant \frac{e^{u_n}}{3}$$

- Comme $2\ln(u_n) \leqslant u_n$, alors $-e\ln(u_n) \geqslant -\dfrac{e}{2}u_n$.
- Comme $u_n \leqslant \dfrac{e^{u_n}}{3}$, alors $e^{u_n} \geqslant 3u_n$.

On en déduit :

$$u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e\ln(u_n) \geqslant 3u_n - \frac{e}{2}u_n = \frac{6-e}{2}u_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \frac{6-e}{2}u_n}$$

□

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***9.b)*** :

$$\begin{array}{rclcl}
u_{n+1} & \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; u_n & & \\
& \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; u_{n-1} & = & \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^2 u_{n-1} \\
& \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; u_{n-2} & = & \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^3 u_{n-2} \\
& \dots & & & \\
& \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; \dots \; \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} \; u_0 & = & \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1} u_0
\end{array}$$

  On peut démontrer rigoureusement ce résultat par récurrence (voir remarque en page suivante).
  Comme $u_0 = 2$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2 \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$.

- Or, d'après la question ***5.*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2 > 0$.
  On obtient donc, par passage à l'inverse :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$$

- On a alors :
  × $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$
  × la série $\sum \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}$ avec $\left|\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right| < 1$.
  (en effet, $3 < 3,2 < 6-\mathrm{e} < 3,3 < 4$ donc $-1 < \dfrac{2}{4} < \dfrac{2}{6-\mathrm{e}} < \dfrac{2}{3} < 1$)
  Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série } \sum \frac{1}{u_n} \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi résoudre cette question de la façon suivante.
On sait que les termes de la suite (u_n) sont non nuls, donc, d'après la question ***9.b)*** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{2}{6-\mathrm{e}} \geqslant \frac{u_k}{u_{k+1}}$$

En effectuant le produit de ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient (tous les termes considérés sont positifs) :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2}{6-\mathrm{e}} \geqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{u_{k+1}} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n \geqslant \frac{u_0}{\cancel{u_1}} \frac{\cancel{u_1}}{\cancel{u_2}} \dots \frac{\cancel{u_{n-1}}}{u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{2}{u_n}$$

On conclut en utilisant le critère de comparaison de séries à termes positifs.

Commentaire

- La question portait ici sur l'application du critère de comparaison des séries à termes positifs. On pouvait se permettre de simplement citer le principe de récurrence. Détaillons quand même cette rédaction.
- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : u_n \geqslant 2 \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$
  - ▸ **Initialisation** :
    D'une part, $u_0 = 2$.
    D'autre part, $2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^0 = 2$.
    Donc $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$)
    D'après la question ***9.b)***, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.
    Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$. Donc :
    $$u_{n+1} \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\, u_n \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\, 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$$
    Donc $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$.

□

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ converge et calculer cette intégrale.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0,1]$.
- Soit $a \in]0,1]$.

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_a^1 f(x)\, dx & = & \displaystyle\int_a^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x))\, dx & \\ & = & \displaystyle\int_a^1 \mathrm{e}^x\, dx - \mathrm{e}\int_a^1 \ln(x)\, dx & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & \left[\, \mathrm{e}^x \,\right]_a^1 - \mathrm{e}\left[\, x\ln(x) - x \,\right]_a^1 & \\ & = & \mathrm{e} - \mathrm{e}^a - \mathrm{e}\,(\cancel{1\ln(1)} - 1 - (a\ln(a) - a)) & \\ & = & 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^a + \mathrm{e}\; a\ln(a) - \mathrm{e}\; a & \\ & \underset{a\to 0}{\longrightarrow} & 2\mathrm{e} - 1 & \end{array}$$

En effet, $\lim\limits_{a\to 0} \mathrm{e}^a = 1$, $\lim\limits_{a\to 0} \mathrm{e}\; a = 0$ et $\lim\limits_{a\to 0} a\ln(a) = 0$ par croissances comparées.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale impropre } \int_0^1 f(x)\, dx \text{ converge et } \int_0^1 f(x)\, dx = 2\mathrm{e} - 1.}$$

Commentaire

On peut retrouver la valeur de $\displaystyle\int_a^1 \ln(x)\ dx$ grâce à une intégration par parties (IPP) :

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \ln(x) & \quad & u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,1]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^1 \ln(x)\ dx &= [\ x\ln(x)\ ]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{x}x\ dx \\ &= -a\ln(a) - [\ x\ ]_a^1 \ = \ -a\ln(a) - 1 + a\end{aligned}$$

□

11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ converge-t-elle ?

Démonstration.
On a les informations suivantes :

× $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$.

× $\forall x \in [1,+\infty[$, $\mathrm{e}^x \geqslant 0$
D'après la question ***2.*** : $\forall x \in [1,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^x\ dx$ diverge.

Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ est divergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} f(x)\ dx \text{ diverge.}}$$

Commentaire

L'énoncé demande simplement la **nature** de l'intégrale. Il faut donc privilégier l'utilisation d'un critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives.
On pouvait également traiter cette question par calcul. Détaillons-le.

- La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$.
- Soit $A \in [1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_1^A f(x)\ dx &= \int_1^A (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x))\ dx \\ &= \int_1^A \mathrm{e}^x\ dx - \mathrm{e}\int_1^A \ln(x)\ dx \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= [\ \mathrm{e}^x\ ]_1^A - \mathrm{e}\,[\ x\ln(x) - x\ ]_1^A \\ &= \mathrm{e}^A - \mathrm{e} - \mathrm{e}(A\ln(A) - A - (\cancel{1\ln(1)} - 1)) \\ &= \mathrm{e}^A\left(1 - \mathrm{e}\frac{A\ln(A)}{\mathrm{e}^A} - \frac{A}{\mathrm{e}^A} - \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}^A}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

En effet, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}^A} = 0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A\ln(A)}{\mathrm{e}^A} = 0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{\mathrm{e}^A} = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^A = +\infty$.

□

12. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question ***9.a)***.

Démonstration.

- Soit $x \in [2, +\infty[$.
  D'après la question ***9.a)***, $2\ln(x) \leqslant x$. Donc :
  $$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) \geqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}.$$
  Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}}$. Or :
  $$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{x}{2} = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{\mathrm{e}}{2}\,\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$$
  car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissances comparées. Donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$.
  Et comme $\mathrm{e}^{-x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, alors $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- On sait donc :
  × $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
  × $\forall x \in [2, +\infty[$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} \geqslant 0$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant strictement supérieur à 1. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{x}{2}}\, dx$ converge.
- On sait alors :
  × $\forall x \in [2, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}}$.
  × D'après la question ***2.*** : $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) \neq 0$.
  Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $[2, +\infty[$ qui ne s'annule pas.
  × L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{x}{2}}\, dx$ converge.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale } \int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx \text{ converge.}}$$

□

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$, définie, pour tout (x,y) de $]1,+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy.$$

13. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question **4.** de la partie **I**.

Démonstration.

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$, donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[^2$.
- Soit $(x,y) \in]1,+\infty[^2$.

$$\partial_1(F)(x,y) = f'(x) - y \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(x,y) = f'(y) - x$$

- Donc (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_1(F)(x,y) = 0 \\ \partial_2(F)(x,y) = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(x) - y = 0 \\ f'(y) - x = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = f'(x) \\ x = f'(y) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} xy = xf'(x) \\ xy = yf'(y) \end{array} \right. \qquad \textit{(car } x > 0 \textit{ et } y > 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} xy = xf'(x) \\ xf'(x) = yf'(y) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = f'(x) \\ xf'(x) = yf'(y) \end{array} \right. \qquad (*)
\end{aligned}$$

- On introduit la fonction $v : x \mapsto xf'(x)$. Montrons qu'elle est injective.
  Soit $x \in]1,+\infty[$.

  $$v(x) = xf'(x) = x\left(\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x}\right) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}$$

  La fonction v est dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

  $$\forall x \in]1,+\infty[, \quad v'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$$

  Donc la fonction v est strictement croissante.
  En particulier, la fonction v est injective.
- Reprenons alors le système $(*)$. Par injectivité de v :

  $$\left\{ \begin{array}{l} y = f'(x) \\ v(x) = v(y) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = f'(x) \\ x = y \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = f'(x) \\ x = y \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ x = y \end{array} \right.$$

  En effet, d'après la question ***4.b)***, l'équation $x = f'(x)$ admet le réel α comme unique solution sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
  On obtient alors :

  $$\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ x = y \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \end{array} \right.$$

  $$\boxed{\text{La fonction } F \text{ admet un point critique et un seul et il s'agit de } (\alpha,\alpha).}$$

$\square$

14. a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α, α).

Démonstration.

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[^2$.
- Soit $(x, y) \in \,]1, +\infty[^2$.

$$\nabla^2(F)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(x,y) & \partial^2_{1,2}(F)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(F)(x,y) & \partial^2_{2,2}(F)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''(x) & -1 \\ -1 & f''(y) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc } \nabla^2(F)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix}.}$$

□

b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α, α) ? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

Démonstration.
Déterminons les valeurs propres de $\nabla^2(F)(\alpha, \alpha)$.
On cherche donc les valeurs de λ pour lesquelles $\nabla^2(F)(\alpha, \alpha) - \lambda \, I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire pour lesquelles $\det(\nabla^2(F)(\alpha, \alpha) - \lambda \, I_2) = 0$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(\nabla^2(F)(\alpha,\alpha) - \lambda\, I_2) = \det \begin{pmatrix} f''(\alpha) - \lambda & -1 \\ -1 & f''(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} = (f''(\alpha) - \lambda)^2 - 1 = (f''(\alpha) - \lambda - 1)(f''(\alpha) - \lambda + 1)$$

Donc les valeurs propres de $\nabla^2(F)(\alpha, \alpha)$ sont $f''(\alpha) - 1$ et $f''(\alpha) + 1$.

Or pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $f''(x) = e^x + \dfrac{e}{x^2} > e^x \geqslant 1$. Donc $f''(\alpha) - 1 > 0$ et $f''(\alpha) + 1 > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } F \text{ admet un minimum local en } (\alpha, \alpha).}$$

□

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.
Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)\ P'$$

Par exemple : $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Commentaire

L'énoncé prend partie de noter indifféremment P et $P(X)$, ce qui permet d'alléger les notations. En contrepartie, ce choix peut amener à des confusions sur les objets manipulés. Afin d'éviter ces confusions, on évitera, dans ce corrigé, d'utiliser l'abus de notation autorisé par l'énoncé.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Montrons que a est une application linéaire.
  Soit $(P_1, P_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} \big(a(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)(X) & = & \big(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2\big)(X) - X\ \big(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2\big)'(X) \\ & = & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot P_2(X) - X\ \big(\lambda_1 \cdot P_1'(X) + \lambda_2 \cdot P_2'(X)\big) \\ & = & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot P_2(X) - \lambda_1 \cdot XP_1'(X) - \lambda_2 \cdot XP_2'(X) \\ & = & \lambda_1 \cdot (P_1(X) - XP_1'(X)) + \lambda_2 \cdot (P_2(X) - XP_2'(X)) \\ & = & \lambda_1 \cdot (a(P_1))(X) + \lambda_2 \cdot (a(P_2))(X) \\ & = & \big(\lambda_1 \cdot a(P_1) + \lambda_2 \cdot a(P_2)\big)(X) \end{array}$$

  Et ainsi : $a(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 \cdot a(P_1) + \lambda_2 \cdot a(P_2)$.

- Montrons que $a(E) \subset E$. Autrement dit, montrons que pour tout $P \in E$, $a(P) \in E$.
  Soit $P \in E$. Alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} (a(P))(X) & = & P(X) - XP'(X) \\ & = & \alpha + \beta X + \gamma X^2 - X(\beta + 2\gamma X) \\ & = & -\gamma X^2 + \alpha \end{array}$$

  Ainsi, $a(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 : $a(P) \in E$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } a \text{ est un endomorphisme de } E.}$$ □

2. a) Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Pour éviter les confusions, on notera $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad P_2(X) = X^2$$

- $\big(a(P_0)\big)(X) = P_0(X) - X \times P_0'(X) = 1 - 0 = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$a(P_0) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\big(a(P_1)\big) = P_1(X) - X \times P_1'(X) = X - X = 0$. On en déduit :

$$a(P_1) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\big(a(P_2)\big)(X) = P_2(X) - X \times P_2'(X) = X^2 - 2X^2 = -X^2 = -P_2(X)$. On en déduit :

$$a(P_2) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Déterminer le rang de la matrice A.

Démonstration.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2}$$

□

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\dim(\mathrm{Im}(a)) = \mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 = \dim(E)$.
  Donc $\mathrm{Im}(A) \neq E$. Ainsi l'endomorphisme a n'est pas surjectif.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } a \text{ n'est pas bijectif.}}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim(\mathrm{Ker}(a)) & + & \mathrm{rg}(a) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

  D'où : $\dim(\mathrm{Ker}(a)) = 1$.

D'après la question précédente : $a(P_1) = 0$. Ainsi $P_1 \in \text{Ker}(a)$.
La famille (P_1) est une famille libre, car elle est constituée d'un polynôme non nul.
Comme $\text{Card}((P_1)) = 1 = \dim(\text{Ker}(a))$, on en déduit que (P_1) est une base de $\text{Ker}(a)$.

$$\boxed{\text{Ker}(a) = \text{Vect}\,(P_1)}$$

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\text{Im}(a) = \text{Vect}\,(a(P_0),\ a(P_1),\ a(P_2)) = \text{Vect}\,(P_0,\ 0,\ -P_2) = \text{Vect}\,(P_0,\ P_2)$$

Ainsi :
× la famille (P_0, P_2) engendre $\text{Im}(a)$.
× $\text{Card}\big((P_0, P_2)\big) = 2 = \dim\big(\text{Im}(a)\big)$.
La famille (P_0, P_2) est donc une base de $\text{Im}(a)$.

$$\boxed{\text{Im}(a) = \text{Vect}\,(P_0, P_2)}$$

Commentaire

- On peut aussi utiliser le spectre de A pour déterminer si a est bijectif.
Détaillons cette méthode.

La matrice A est diagonale. Ainsi, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux et : $\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$. Or, comme A est la matrice représentative de l'endomorphisme a dans la base $\mathscr{B}$:

$$\text{Sp}(a) = \text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$$

Le réel 0 étant valeur propre de a, l'endomorphisme a n'est pas bijectif.

- Il est possible de déterminer $\text{Ker}(a)$ par le calcul. Détaillons cette méthode.

Soit $P \in E$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2$.
Ainsi $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et :

$$P \in \text{Ker}(a) \ \Leftrightarrow\ a(P) = 0_E \ \Leftrightarrow\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & 0 & & = & 0 \\ & & - \ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} \text{Ker}(a) & = & \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \in E \mid x = 0 \text{ et } z = 0\} \\ & = & \{y \cdot P_1 \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\,(P_1) \end{array}$$

□

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

Démonstration.

- Notons $g : E \to E$ l'endomorphisme de E qui à tout $Q \in E$ associe $g(Q) = Q + Q' + Q''$.
  Il s'agit de démontrer que b est bijective, de réciproque g. Pour ce faire, on démontre :

$$b \circ g = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad g \circ b = \mathrm{id}_E$$

- Soit $P \in E$.

$$\begin{array}{rcll}
(b \circ g)(P) & = & b\big(g(P)\big) & \\
& = & b(P + P' + P'') & \\
& = & b(P) + b(P') + b(P'') & \textit{(par linéarité de } b\textit{)} \\
& = & (P - \cancel{P'}) + (\cancel{P'} - \cancel{P''}) + (\cancel{P''} - P''') & \\
& = & P - P''' & \\
& = & P & \textit{(}P''' = 0 \textit{ car } P \textit{ est un polynôme de degré au plus } 2\textit{)}
\end{array}$$

  On en déduit : $b \circ g = \mathrm{id}_E$.
  De même :

$$\begin{array}{rcl}
(g \circ b)(P) & = & g\big(P - P'\big) \\
& = & (P - P') + (P - P')' + (P - P')'' \\
& = & P - P' + P' - P'' + P'' - P''' \ = \ P - P''' \ = \ P
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les applications } g \text{ et } b \text{ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.} \\ \text{On en déduit notamment : } \forall Q \in E,\ b^{-1}(Q) = g(Q) = Q + Q' + Q''.\end{array}}$$

Commentaire

- Rigoureusement, tant que l'on n'a pas démontré que b est bijective, on ne peut utiliser la notation b^{-1}. C'est pourquoi on introduit l'application g en début de démonstration.
- L'énoncé fournit explicitement l'endomorphisme g. Dans ce cas, pour démontrer que b est bijectif et que $b^{-1} = g$, il suffit de vérifier les égalités :

$$b \circ g = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad g \circ b = \mathrm{id}_E$$

- L'espace vectoriel E étant de dimension finie, il est même possible de ne démontrer qu'une des deux égalités précédentes. Plus précisément, si b et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel **de dimension finie** E :

$$b \circ g = \mathrm{id}_E \ \Rightarrow \ \left\{\begin{array}{l} b \text{ et } g \text{ sont bijectives,} \\ b^{-1} = g \ \text{ et } \ g^{-1} = b \end{array}\right.$$

  (la propriété réciproque est évidemment vérifiée)
- On peut énoncer un résultat similaire dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Plus précisément, si A et B sont des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$AB = I_n \ \Rightarrow \ \left\{\begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ sont inversibles,} \\ A^{-1} = B \ \text{ et } \ B^{-1} = A \end{array}\right.$$

□

5. a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

Démonstration.

- Comme B est la matrice représentative de b dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Sp}(b) \ = \ \mathrm{Sp}(B)$$

On commence donc par déterminer cette matrice B.

× $\big(b(P_0)\big)(X) = P_0(X) - P_0'(X) = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$b(P_0) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_1)\big)(X) = P_1(X) - P_1'(X) = X - 1 = -P_0(X) + P_1(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_2)\big)(X) = P_2(X) - P_2'(X) = X^2 - 2X = -2\ P_1(X) + P_2(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = 0 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- La matrice B est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux et $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(b) = \mathrm{Sp}(B) = \{1\}.}$$

□

b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

Démonstration.
Montrons par l'absurde que b n'est pas diagonalisable.
Supposons que b est diagonalisable, alors $B = \mathrm{Mat}_B(b)$ l'est aussi.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B telles que $B = PDP^{-1}$.
Or 1 est la seule valeur propre de B. Ainsi $D = I$ et :

$$B = PDP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que } b \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
  - × montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,
  - × montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.

□

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- $(c(P_0))(X) = 2X \times P_0(X) - (X^2 - 1) \times P_0'(X) = 2X = 0 \cdot P_0(X) + 2 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X)$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $(c(P_1))(X) = 2X \times P_1(X) - (X^2 - 1) \times P_1'(X) = X^2 + 1 = 1 \cdot P_0(X) + 0 \cdot P_1(X) + 1 \cdot P_2(X)$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $(c(P_2))(X) = 2X \times P_2(X) - (X^2 - 1) \times P_2'(X) = 2X = 0 \cdot P_0(X) + 2 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X)$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

Démonstration.

$$\mathrm{rg}(c) = \mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

On en déduit $\dim(\mathrm{Im}(c)) = \mathrm{rg}(c) = 2 \neq 3 = \dim(E)$.
Donc : $\mathrm{Im}(c) \neq E$, ce qui implique que l'endomorphisme c n'est pas surjectif.

$$\boxed{\text{Ainsi l'endomorphisme } c \text{ n'est pas bijectif.}}$$

□

8. a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre trois, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

Démonstration.

- Déterminons les valeurs propres de C.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On cherche les réels λ tels que la matrice $C - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est-à-dire tels que $\text{rg}(C - \lambda I_3) < 3$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{rg}(C - \lambda\, I_3) & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\[1em]
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\[1em]
& \overset{L_2 \leftarrow 2L_2 + \lambda L_1}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\[1em]
& \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}\right) \\[1em]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda^2) L_2}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & q(\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

  où $q(\lambda) = 2\lambda + \lambda(2 - \lambda^2) = \lambda(2 + (2 - \lambda^2)) = \lambda(4 - \lambda^2) = \lambda(2 - \lambda)(2 + \lambda)$.
  La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
  Elle est non inversible ssi l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\text{rg}(C - \lambda\, I_3) < 3 \;\Leftrightarrow\; q(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \{0, 2, -2\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : Sp}(C) = \{-2, 0, 2\}.}$$

- Déterminons $E_0(C)$, le sous-espace propre de C associé à la valeur propre 0.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_0(C) & \Leftrightarrow & CX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[0.5em]
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[1em]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcr} y & = & 0 \\ x & = & -z \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_0(C) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = 0 \text{ et } x = -z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ = \ \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

- Déterminons $E_2(C)$, le sous-espace propre de C associé à la valeur propre 2.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(C) & \iff & (C - 2\, I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & 2z \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & & & = & -2z \\ & & y & = & 2z \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 2z \end{array} \right. \end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_2(C) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } y = 2z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

- Déterminons $E_{-2}(C)$, le sous-espace propre de C associé à la valeur propre -2.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-2}(C) & \Longleftrightarrow & (C + 2\, I_3)X = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & -2z \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & 2z \\ & & y & = & -2z \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & z \\ y & = & -2z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(C) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } y = -2z \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- En résumé :
  - × $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
  - × C admet 3 valeurs propres **distinctes** : -2, 0, 2.

  On en déduit que la matrice C est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible (R est la concaténation des vecteurs bases des sous-espaces propres de C), et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de C, telles que $C = RDR^{-1}$.

  $$\boxed{\text{En posant } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient bien : } C = RDR^{-1}.}$$

$\square$

b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

Démonstration.

- D'après la question ***8.a)***, la matrice C est diagonalisable.
  Or c'est une matrice représentative de c dans la base $\mathscr{B}$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } c \text{ est diagonalisable.}}$$

- Une base de E constituée de vecteurs propres est alors la concaténation des bases des sous-espaces propres de c que l'on a déterminés à la question précédente.
  De plus :

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2),$$

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2),$$

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2)$$

  Donc :

  $$E_0(c) = \mathrm{Vect}\left(P_0 - P_2\right), \qquad E_2(c) = \mathrm{Vect}\left(P_0 + 2P_1 + P_2\right), \qquad E_{-2}(c) = \mathrm{Vect}\left(P_0 - 2P_1 + P_2\right)$$

  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une base de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } c \text{ est alors} \\ (P_0 - 2 \cdot P_1 + P_2, P_0 - P_2, P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2).\end{array}}$$

□

Partie IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.

Démonstration.
Soit $P \in E$.

$$\begin{array}{rcl}
(f(P))(X) & = & (b \circ a(P))(X) - (a \circ b(P))(X) \\
& = & b(P(X) - XP'(X)) - a(P(X) - P'(X)) \\
& = & (P(X) - XP'(X)) - (P(X) - XP'(X))' - \Big((P(X) - P'(X)) - X\ (P(X) - P'(X))'\Big) \\
& = & \cancel{P(X)} - XP'(X) - \Big(\cancel{P'(X)} - (\cancel{P'(X)} + XP''(X))\Big) \\
& & - \Big(\cancel{P(X)} - P'(X) - XP'(X) + XP''(X)\Big) \\
& = & -\cancel{XP'(X)} + \cancel{XP''(X)} + P'(X) + \cancel{XP'(X)} - \cancel{XP''(X)} \\
& = & P'(X)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in E,\ f(P) = P'.}$$

□

10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

Démonstration.
Soit $P \in E$.
Tout d'abord, d'après la question ***9*** : $f(P) = P'$.
De plus, comme P est un polynôme de degré au plus 2, on en déduit : $(f \circ f \circ f)(P) = P''' = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $P \in E$, on en déduit : $f \circ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
en passant à l'écriture matricielle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(E)}) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^3) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^3 = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b \circ a - a \circ b))^3 = (BA - AB)^3$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (BA - AB)^3 = 0.}$$

□

Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note : B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »,
R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
function s = EML(n)
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k = 1:n
        x = rand()
        if ... then
            ...
        else
            ...
        end
    end
endfunction
```

Démonstration.

- Le programme consiste, au fur et à mesure des tirages :
  - × à mettre à jour les variables `b` et `r`, désignant respectivement le nombre de boules bleues et le nombre de boules rouges présentes dans l'urne.
  - × à comptabiliser le nombre `s` de boules rouges tirées.
- L'instruction `rand()` permet de simuler une v.a.r. de loi uniforme sur $]0, 1[$.
  Le résultat obtenu (stocké dans la variable `x`) va permettre de simuler le tirage :
  - × si $\texttt{x} \in \left]0, \frac{\texttt{b}}{\texttt{b+r}}\right[$, on considère qu'on a tiré une boule bleue dans l'urne. Dans ce cas :
    on ajoute une boule bleue dans l'urne : `b = b+1`.
    on ne modifie pas le nombre de boules rouges de l'urne.
    on ne modifie pas le nombre de boules rouges tirées.
    ($\frac{\texttt{b}}{\texttt{b+r}}$ est la proportion de boules bleues dans l'urne)
  - × si $\texttt{x} \in \left[\frac{\texttt{b}}{\texttt{b+r}}, 1\right[$, on considère qu'on a tiré une boule rouge dans l'urne. Dans ce cas :
    on ajoute une boule rouge dans l'urne : `r = r+1`.
    on ne modifie pas le nombre de boules bleues de l'urne.
    on met à jour le nombre de boules rouges tirées : `s = s+1`.
    ($1 - \frac{\texttt{b}}{\texttt{b+r}} = \frac{\texttt{r}}{\texttt{b+r}}$ est la proportion de boules rouges dans l'urne)

En résumé, on obtient :

```
7  if x < b / (b+r) then
8      b = b + 1
9  else
10     r = r + 1
11     s = s + 1
12 end
```

Commentaire

- Pour être en accord avec le nombre de lignes utilisées dans le programme on pouvait remplacer les lignes 10 et 11 par :

```
10     r = r + 1; s = s + 1
```

- Les variables `r` et `s` évoluent de la même façon : elles sont incrémentées d'une unité à chaque tirage d'une boule rouge. Ainsi, la relation : $\texttt{s} = \texttt{r} - 2$ est vérifiée à chaque tour de boucle (on parle d'invariant de boucle) et donc aussi à la fin du programme. □

2. On exécute le programme suivant :

```
1 n = 10
2 m = 0
3 for i = 1:1000
4     m = m + EML(n)
5 end
6 disp(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

Démonstration.

- La fonction `EML` permet de simuler la v.a.r. S_n (introduite plus tard dans l'énoncé) égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.
- Le programme consiste à simuler (à l'aide de l'appel `EML(10)`) de simuler un grand nombre de fois ($N = 1000$ est ce grand nombre) la v.a.r. S_{10}.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(v_1, \dots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(V_1, \dots, V_N)$ de la v.a.r. S_{10}.
  (cela signifie que les v.a.r. V_1, ..., V_N sont indépendantes et sont de même loi que S_{10})
- La variable `m`, initialisée à 0, est mise à jour à chaque tour de boucle i par l'ajout de la dernière valeur v_i créée. De sorte que, à l'issue de la boucle, la variable `m` contient : $\sum\limits_{i=1}^{N} v_i$.
- Enfin, en ligne 6, l'instruction `disp(m/1000)` permet de réaliser l'affichage de la division par 1000 de la valeur contenue dans `m`. C'est donc la valeur : $\dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} v_i$ qui est affichée.
  Il s'agit de la moyenne empirique des N simulations de la v.a.r. S_{10}.
- Or, en vertu de la loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \ \simeq \ \mathbb{E}(S_{10})$$

Le programme fournit une approximation de $\mathbb{E}(S_{10})$. Le résultat obtenu : $\mathbb{E}(S_{10}) \simeq 6.657$ signifie qu'on obtient en moyenne un peu moins de 7 boules rouges lorsque l'on procède à 10 tirages successifs (en respectant le protocole de l'énoncé) dans l'urne.

Commentaire

Comme $6.657 \simeq \frac{2}{3} \times 10$, on peut faire l'hypothèse que : $\mathbb{E}(S_n) = \frac{2}{3} \times n$.
Ceci semble être le cas puisque la question ***9.*** demande justement de démontrer cette égalité. □

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \geqslant 2$, $[Y = n] = R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n$.
  D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([Y = n]) \\
= \ &\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) \\
= \ &\mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-2}}(R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}}(B_n) \\
= \ &\frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \ldots \times \frac{\cancel{n}}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \\
= \ &\frac{2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

- On a utilisé dans l'écriture précédente, pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, l'égalité :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{k+1}{k+2}$$

  En effet, si l'événement $R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1}$ est réalisé c'est qu'on a tiré une boule rouge lors de chacun des $k-1$ premiers tirages. Juste avant le $k^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est alors constituée de :
  × $2 + (k-1) = k+1$ boules rouges,
  × une seule boule bleue,
  × $(k+1) + 1 = k+2$ boules en tout.
- On note enfin que l'utilisation de la formule des probabilités composées est valide puisque : $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}) = \dfrac{2}{n+1} \neq 0$.
- Si $n = 1$, $[Y = 1] = B_1$. Ainsi : $\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{3}$.
  Or : $\dfrac{2}{(1+1)(1+2)} = \dfrac{2}{2 \times 3} = \dfrac{1}{3}$.
  On en déduit que l'égalité de l'énoncé est vérifiée pour $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

□

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  En effet, la première boule bleue peut apparaître lors de n'importe quel tirage.
- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n \, \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ est absolument convergente. Ceci revient à démontrer la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$ puisque :
  $\times$ c'est une série à termes positifs,
  $\times$ on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul.
- Enfin :
  $$\frac{n}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \ (\geqslant 0)$$
  Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente.
  Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n \, \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ est elle aussi divergente.

  $$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ n'admet donc pas d'espérance.}}$$
- La v.a.r. Y n'admet pas de moment d'ordre 1, donc elle n'admet pas de moments aux ordres supérieurs.

  $$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ n'admet pas de variance.}}$$

$\square$

4. Déterminer la loi de Z. La v.a.r. admet-elle une espérance ? une variance ?

Démonstration.

- Tout d'abord : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  En effet, la première boule rouge peut apparaître lors de n'importe quel tirage.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $n \geqslant 2$, $[Z = n] = B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n$.
  En raisonnant comme dans la question précédente, on trouve, à l'aide de la formule des probabilités composées :
  $$\begin{aligned}
  & \mathbb{P}([Z = n]) \\
  = \ & \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n) \\
  = \ & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}}(R_n) \\
  = \ & \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \ldots \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{2}{n+2} \\
  = \ & \frac{1 \times 2 \times \ldots \times (n-1)}{3 \times 4 \times \ldots \times (n+1)} \, \frac{2}{n+2} = 2 \, (n-1)! \, \frac{2}{2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n+1) \times (n+2)} \\
  = \ & 4 \, \frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}
  \end{aligned}$$
- Si $n = 1$, $[Z = 1] = R_1$. Donc : $\mathbb{P}([Z = 1]) = \mathbb{P}(R_1) = \dfrac{2}{3}$.
  On en déduit que la formule précédente est vérifiée pour $n = 1$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([Z = n]) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}.}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. La v.a.r. Z admet un moment d'ordre k si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$ est absolument convergente. Ceci revient à démontrer la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n^k}{n(n+1)(n+2)}$, car elle est à termes positifs.
- Enfin :

$$\frac{n^k}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^3} = \frac{1}{n^{3-k}} \ (\geqslant 0)$$

Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3-k}}$ est une série de Riemann d'exposant $3-k$.
Elle est donc convergente si et seulement si $3-k > 1$ soit $k < 2$.
Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente si et seulement si $k < 2$.

Ainsi, la v.a.r. Z admet un moment d'ordre 1 (et donc une espérance) mais n'admet pas de moment d'ordre 2 (et donc de variance).

□

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$$

□

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.
- De plus : $[X_1 = 1] = R_1$ et $[X_1 = 0] = B_1$.
Initialement, l'urne contient 2 boules rouges et une boule bleue. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)\text{. On en déduit : } \mathbb{E}(X_1) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{V}(X_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.}$$

□

7. a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
- Soit $i \in [\![0, 1]\!]$ et soit $j \in [\![0, 1]\!]$. Comme $\mathbb{P}([X_1 = i]) \neq 0$:

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}_{[X_1 = i]}([X_2 = j])$$

- Si $i = 0$:
  - × $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2 = 0]) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$.
  - × $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2 = 1]) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$.

  En effet, si l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé, c'est qu'on a tiré une boule bleue au premier tirage. Lors du deuxième tirage, l'urne contient alors 2 boules rouges et 2 boules bleues.
- Si $i = 1$, on obtient de même :
  - × $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 0]) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$.
  - × $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$.

  En effet, si l'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé, c'est qu'on a tiré une boule rouge au premier tirage. Lors du deuxième tirage, l'urne contient alors 3 boules rouges et 1 boule bleue.
- En résumé, la loi du couple (X_1, X_2) est donnée par le tableau suivant.

$y \in X_2(\Omega)$ / $x \in X_1(\Omega)$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

□

b) En déduire la loi de X_2.

Démonstration.

- La famille $([X_1 = 0], [X_1 = 1])$ forme un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

- Enfin :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = 1 - \mathbb{P}([X_2 = 0]) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right).}$$

Commentaire

On note au passage que les v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi.

Commentaire

Cela correspond à sommer les colonnes du tableau précédent. Plus précisément :

$x \in X_1(\Omega)$ \ $y \in X_2(\Omega)$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}([X_2 = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

□

c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
On remarque :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9} = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}([X_2 = 0])$$

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

Ce résultat semble logique : le résultat du premier tirage influe sur le contenu de l'urne (ajout d'une boule bleue ou rouge) avant le deuxième tirage.

□

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

Démonstration.
On considère ici que $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$.
(on reviendra sur ce point dans la remarque)

- Notons $A_k = R_1 \cap \ldots \cap R_k$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
= \ & \mathbb{P}(A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
= \ & \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B_{k+1}) \times \mathbb{P}_{A_k \cap B_{k+1}}(B_{k+2}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{n-1}}(B_n) \\
= \ & \frac{2}{k+2} \times \frac{1}{k+3} \times \frac{2}{k+4} \times \ldots \times \frac{n-k}{n+2} \\
= \ & 2 \ \frac{(k+1)!}{(k+1)!} \ \frac{1 \times 2 \times \ldots \times (n-k)}{(k+2) \times (k+3) \times \ldots \times (n+2)} \\
= \ & 2 \ \frac{(k+1)! \ (n-k)!}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

- En effet, d'après la question ***3.a)***, on sait :

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k) = \frac{2}{k+2}$$

- D'autre part, on a utilisé le fait, que pour tout $j \in [\![1, n-k]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{k+(j-1)}}(B_{k+j}) = \frac{j}{k+j+2}$$

En effet, si l'événement $A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{k+(j-1)}$ est réalisé c'est qu'on a tiré k boules rouges suivies de $j-1$ boules bleues. Juste avant le $(k+j)^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est alors constituée de :

× $2 + k = k + 2$ boules rouges,

× $1 + (j-1) = j$ boules bleues,

× et donc de $(k+2) + j = k + j + 2$ boules en tout.

- On note enfin que l'utilisation de la formule des probabilités composées est valide puisque : $\mathbb{P}(A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \neq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } n \geqslant 2 \text{ et pour tout } k \in [\![1, n-1]\!] : \\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) = 2\ \dfrac{(k+1)!\ (n-k)!}{(n+2)!}\end{array}}$$

Commentaire

- Il y avait plusieurs problèmes de définition concernant cette question. Faire varier k dans $[\![0, n]\!]$ n'a pas vraiment de sens puisque l'on peut alors former dans l'intersection d'événements :
  × R_0 qui n'est pas défini dans l'énoncé,
  × B_{n+1} alors que l'on s'arrête à B_n.
- Pour autant, ce n'est pas à proprement parler une erreur de l'énoncé.
  On doit en fait deviner ce que le concepteur a voulu modéliser :
  × si $k = 0$, l'événement considéré est $B_1 \cap \ldots \cap B_n$, et il est réalisé si on a tiré successivement n boules bleues lors des n premiers tirages.
  × si $k = n$, l'événement considéré est $R_1 \cap \ldots \cap R_n$, et il est réalisé si on a tiré successivement n boules rouges lors des n premiers tirages.
- On comprend alors mieux le cas $n = 1$: pour $k = 0$, on cherche la probabilité $\mathbb{P}(B_1)$ et pour $k = 1$, on cherche la probabilité $\mathbb{P}(R_1)$.
- Il faut enfin noter que la formule donnée dans ce corrigé reste valide pour ces deux cas limites. Par exemple, si $k = 0$, d'après la question ***4.*** :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = 2\ \frac{n!}{(n+2)!}$$

  et la formule précédente donne : $2\ \dfrac{(0+1)!(n-0)!}{(n+2)!} = 2\ \dfrac{n!}{(n+2)!}$.
- On laisse le soin au lecteur de vérifier les autres cas.

□

b) Justifier : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,

puis en déduire : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

Démonstration.

- L'événement $[S_n = k]$ est réalisé par tous les n-tirages (successions de n tirages) qui contiennent k boules rouges. Un tel n-tirage est entièrement déterminé par :
  - × la position des k boules rouges.
    Autrement dit, le choix de k places parmi les n disponibles : $\dbinom{n}{k}$ possibilités.

  Il y a donc $\dbinom{n}{k}$ tels n-tirages en tout.
- Chacun de ces n-tirages a la même probabilité d'apparaître puisque l'ordre dans lequel les k boules rouges sont tirées n'a pas d'influence sur le résultat. Plus précisément :
  - × que l'on tire une boule rouge ou bleue, on ajoute toujours une boule dans l'urne.
  - × si l'on tire une boule bleue, seul le nombre de boules bleues est modifié pour les tirages suivants.
  - × si l'on tire une boule rouge, seul le nombre de boules rouges est modifié pour les tirages suivants.

  Ainsi, en reprenant la question ***8.a)*** avec des R_i (k tels événements présents) et B_j ($n-k$ tels événements présents) placés dans un ordre différent, on obtient la même probabilité.
  Par exemple :

  $$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-k} \cap R_{n-k+1} \cap \ldots \cap R_n) = 2\ \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$$

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n).}$$

- Enfin, d'après la question ***8.a)*** :

  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}([S_n = k]) &= \binom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
  &= \frac{n!}{k!\ \cancel{(n-k)!}}\ 2\ \frac{(k+1)!\ \cancel{(n-k)!}}{(n+2)!} \\
  &= 2\ \frac{n!}{(n+2)!}\ \frac{(k+1)!}{k!} \\
  &= 2\ \frac{k+1}{(n+1)(n+2)}
  \end{aligned}$$

  $$\boxed{\mathbb{P}([S_n = k]) = 2\ \frac{k+1}{(n+1)(n+2)}}$$

□

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Ainsi, S_n admet une espérance en tant que v.a.r. discrète finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(S_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} k \; \mathbb{P}([S_n = k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} 2k \dfrac{k+1}{(n+1)(n+2)} & \textit{(d'après la question 8.b))} \\
& = & \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) \;=\; \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \sum\limits_{k=1}^{n} (k^2+k) & \\
& = & \dfrac{2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \left(\dfrac{n\cancel{(n+1)}(2n+1)}{6} + \dfrac{n\cancel{(n+1)}}{2} \right) & \\
& = & \dfrac{\cancel{2}}{(n+2)} \left(\dfrac{n(2n+1)}{3.\cancel{2}} + \dfrac{n}{\cancel{2}} \right) \;=\; \dfrac{1}{(n+2)} \left(\dfrac{n(2n+1)+3n}{3} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{\cancel{(n+2)}} \dfrac{2n\cancel{(n+2)}}{3} \;=\; \dfrac{2n}{3} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(S_n) = \frac{2n}{3}.}$$

□

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

- Si l'événement $[S_n = k]$ est réalisé, cela signifie qu'on a obtenu k boules rouges au cours des n premiers tirages (et donc $n - k$ boules bleues). Ainsi, à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient :
  - × $2 + k$ boules rouges (les 2 boules rouges initialement présentes dans l'urne et les k boules rouges ajoutées lors des tirages),
  - × $1 + (n - k)$ boules bleues (la boule bleue présente initialement dans l'urne et les $n - k$ boules bleues ajoutées lors des tirages).

  L'urne contient donc en tout $(2 + \cancel{k}) + (1 + n - \cancel{k}) = n + 3$ boules.
- Le tirage de chaque boule est équiprobable, donc la probabilité d'obtenir une boule rouge au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, sachant que l'événement $[S_n = k]$ est réalisé, est $\dfrac{k+2}{n+3}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{k+2}{n+3}}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.

Démonstration.
La famille $([S_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap [S_n = k]) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1])\, \mathbb{P}([S_n = k]) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k+2}{n+3}\, \mathbb{P}([S_n = k]) \\ & = & \dfrac{1}{n+3} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([S_n = k]) + 2 \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([S_n = k]) \right) \\ & = & \dfrac{1}{n+3} \left(\mathbb{E}(S_n) + 2 \times 1 \right) \end{array}$$

(car $([S_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements)

$$\boxed{\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}}$$

□

c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Démonstration.

- $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$
- Donc la v.a.r. X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p \ = \ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3} \ = \ \dfrac{\frac{2n}{3} + 2}{n+3} \ = \ \dfrac{1}{3} \, \dfrac{2n+6}{n+3} \ = \ \dfrac{1}{3} \, \dfrac{2\cancel{(n+3)}}{\cancel{n+3}} \ = \ \dfrac{2}{3}.$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_{n+1} \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{2}{3}.}$$

$$\boxed{\text{On remarque que la loi de } X_{n+1} \text{ ne dépend pas du nombre } n \text{ de tirages.}}$$

□

Partie IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x < 0$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$, et : $\forall x > 1$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On sait déjà : $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!] = \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\}$.

$$\boxed{\text{Donc : } T_n(\Omega) = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\} \subset [0, 1].}$$

- Soit $x < 0$. Alors $[T_n \leqslant x] = \varnothing$, car $T_n(\Omega) \subset [0, 1]$. On a alors :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Soit $x > 1$. Alors $[T_n \leqslant x] = \Omega$, car $T_n(\Omega) \subset [0,1]$. On a alors :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 0$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x < 0,\ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0 \text{ et } \forall x > 1,\ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1.}$$

□

12. Soit $x \in [0,1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)},$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n}{n} \leqslant x\right]\right) = \mathbb{P}([S_n \leqslant nx]) \\
&= \mathbb{P}([S_n \leqslant \lfloor nx \rfloor]) && \textit{(car } S_n \textit{ est une v.a.r. à valeurs entières)} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} [S_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}([S_n = k]) && \textit{(par réunion d'événements incompatibles)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} 2\frac{k+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (k+1) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor + 1} k \\
&= \frac{\cancel{2}}{(n+1)(n+2)} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{\cancel{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}.}$$

□

13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Démonstration.

- × Soit $x < 0$. $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$ d'après la question ***11***. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$.
  × Soit $x > 1$. $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$, toujours d'après la question ***11***. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.
  × Soit $x \in [0,1]$.
  Par définition de la partie entière : $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$. Donc :

$$nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \leqslant nx + 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{nx}{n+1} < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n+1} \leqslant \frac{nx+1}{n+1}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n}x}{\cancel{n}} = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n}x}{\cancel{n}} = x$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx\rfloor+1}{n+1} = x$.

De même : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx\rfloor+2}{n+2} = x$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = x^2$.

Finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x])) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\in[0,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

- Montrons que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
  - × F est une fonction croissante.
  - × $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
  - × F est continue sur $]-\infty,0[$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

    De plus $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = 0 = 0^2 = F(0)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = 1 = 1^2 = F(1)$.

    Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.
  - × F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 et en 1.

  Finalement F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
- Déterminons une densité f associée à F.

  Pour déterminer une densité de F, on dérive F sur des intervalles **ouverts**. Soit $x\in\mathbb{R}$.
  - × Si $x\in\,]-\infty,0[$: $f(x) = F'(x) = 0$.
  - × Si $x\in\,]1,+\infty[$: $f(x) = F'(x) = 0$.
  - × Si $x\in\,]0,1[$: $f(x) = F'(x) = 2x$.
  - × On choisit des valeurs arbitraires pour f en 0 et 1 : $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$.

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\in[0,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases} \quad \text{et de densité } f : x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x\in[0,1] \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}.$$

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1. F est croissante.
  2. F est continue à droite en tout point.
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
  4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés *1.*, *2.*, *3.* et *4.* peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- L'utilisation de la caractérisation ci-dessus ne semble apparaître que dans ce type de question traitant de la convergence en loi. Ce type de question apparaît aussi dans le sujet d'EML 2016.

  Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus.

□