# EDHEC 2017

## Exercice 1

On considère la fonction $f$ qui à tout couple $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\ (x-y)^2$$

***1.*** Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

*Démonstration.*

$\boxed{\text{La fonction } f : (x,y) \mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2 \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ car c'est une fonction polynomiale.}}$ □

***2. a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$.

*Démonstration.*
La fonction $f$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Tout d'abord :

$$\partial_1(f)(x,y) = 4x^3 - 4\ (x-y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

- D'autre part :

$$\partial_2(f)(x,y) = 4y^3 - 4\ (x-y)\ (-1) = 4y^3 + 4x - 4y$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)(x,y) = 4\ (x^3 - x + y) \ \text{ et } \ \partial_2(f)(x,y) = 4\ (y^3 + x - y).}$$ □

***b)*** Montrer que le gradient de $f$ est nul si, et seulement si, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right.$.

*Démonstration.*
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \\[2ex] & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 4\ (x^3 - x + y) & = & 0 \\ 4\ (y^3 + x - y) & = & 0 \end{array} \right. \\[2ex] & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\boxed{\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right.}$$ □

***c)*** En déduire que $f$ possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

*Démonstration.*
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Par définition d'un point critique :

$$\begin{array}{c} (x,y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f \end{array} \ \Leftrightarrow \ \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\text{$(x,y)$ est un point critique de $f$} & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right. \\[2ex]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 & = & -x^3 \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 & = & (-x)^3 \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \qquad \textit{(car la fonction $t \mapsto t^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$)} \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - 2x & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x\ (x^2 - 2) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x\ (x - \sqrt{2})\ (x + \sqrt{2}) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x = 0 \ \texttt{OU} \ x = \sqrt{2} \ \texttt{OU} \ x = -\sqrt{2} \\ y = -x \end{array}\right. \\[2ex]
& \Longleftrightarrow & (x,y) \in \left\{(0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\right\}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction $f$ possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.}}$$

**Commentaire**

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Il est par exemple assez fréquent de faire apparaître une équation du type :
  $$\varphi(x) = \varphi(y)$$
  où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective. En réalité, c'est le caractère injectif ($\varphi$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ par exemple) qui nous intéresse ici puisqu'il permet de conclure :
  $$x = y$$
  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
- Enfin, vérifier que $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ sont des points critiques ne démontre pas que ce sont les seuls et ne constitue donc pas une réponse à la question.

□

*3.* ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $f$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord :
$$\partial^2_{11}(f)(x, y) = 4\ (3x^2 - 1)$$
- Ensuite :
$$\partial^2_{12}(f)(x, y) = 4 = \partial^2_{21}(f)(x, y)$$
  La dernière égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Enfin :
$$\partial^2_{22}(f)(x, y) = 4\ (3y^2 - 1)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial^2_{11}(f)(x, y) = 4\ (3x^2 - 1),\ \partial^2_{12}(f)(x, y) = 4 = \partial^2_{21}(f)(x, y) \text{ et } \partial^2_{22}(f)(x, y) = 4\ (3y^2 - 1)}$$

**Commentaire**

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial^2_{12}(f)(x, y)$ et $\partial^2_{21}(f)(x, y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

□

***b)*** Écrire la matrice hessienne de $f$ en chaque point critique.

*Démonstration.*

On rappelle que la matrice hessienne de $f$ en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est :
$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{11}(f)(x, y) & \partial^2_{12}(f)(x, y) \\ \partial^2_{21}(f)(x, y) & \partial^2_{22}(f)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\ (3x^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3y^2 - 1) \end{pmatrix}$$

- On en déduit :
$$\nabla^2(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (0)^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (0)^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$
- Ensuite :
$$\nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$
- Enfin :
$$\nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla^2(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)}$$

□

***c)*** Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que $f$ admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

*Démonstration.*
Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est une valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\ I \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(H - \lambda\ I) = 0 \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \det\left(\nabla^2(f)(0,0) - \lambda\ I\right) & = & \det\left(\begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (-4-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda-4)\ (4+\lambda+4) \ = \ \lambda\ (\lambda+8) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(0,0) \text{ admet pour valeurs propres } 0 \text{ et } -8.}$$

- Et :

$$\begin{array}{rcl} \det\left(\nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - \lambda\ I\right) & = & \det\left(\begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (20-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (20-\lambda-4)\ (20-\lambda+4) \ = \ (16-\lambda)\ (24-\lambda) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } \nabla^2(f)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ admettent pour valeurs propres } 16 \text{ et } 24.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ces deux matrices admettent deux valeurs propres strictement positives.} \\ \text{On en déduit que } f \text{ admet un minimum local en } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et en } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \end{array}}$$

Enfin :

$$\begin{array}{rcl} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) & = & (\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^4 - 2\ (\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2 \\ & = & 4 + 4 - 2\ (2\ \sqrt{2})^2 \\ & = & 8 - 2 \times 4 \times 2 \\ & = & 8 - 16 \ = \ -8 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ce minimum local a pour valeur } f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8 = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}).}$$

□

***d)*** Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de $f$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$f(x, x) = x^4 + x^4 - 2\ (x - x)^2 = 2\ x^4 \geqslant 0$$

- Par ailleurs :
$$\begin{aligned} f(x,-x) &= x^4 + (-x)^4 - 2\ (x-(-x))^2 \\ &= 2x^4 - 2\ (2\ x)^2 \\ &= 2x^4 - 8x^2 \\ &= 2x^2\ (x^2-4) = 2x^2\ (x-2)\ (x+2) \end{aligned}$$
Comme $x^2 \geqslant 0$, la quantité $f(x,-x)$ est du signe de de $(x-2)\ (x+2)$.
Ainsi, $f(x,-x) < 0$ si $x \in ]-2, 2[\backslash\{0\}$, et $f(x,-x) \geqslant 0$ sinon.
- Enfin, $f(0,0) = 0$.
On déduit de ce qui précède que pour tout $x$ au voisinage de 0 (exclu), on a :
$$f(x,-x) < f(0,0) < f(x,x)$$

> On en conclut qu'au point $(0,0)$, la fonction $f$ n'admet ni un minimum local, ni un maximum local. Il n'y a pas d'extremum au point $(0,0)$.

$\square$

*4.* ***a)*** Pour tout $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$.

*Démonstration.*
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned} & f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 \\ = \ & f(x,y) - (x^4 - 4x^2 + 4) - (y^4 - 4y^2 + 4) - 2\ (x^2 + 2xy + y^2) \\ = \ & (\cancel{x^4} + \cancel{y^4} - 2\ (x-y)^2) - \cancel{x^4} - \cancel{y^4} + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = \ & -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = \ & -8 \end{aligned}$$

> Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 = -8$.

**Commentaire**

- Il y avait une erreur dans le sujet initial. Il était en effet demandé de calculer :
$$f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2) - 2(x+y)^2$$
Le carré du terme $(y^2-2)^2$ n'était donc pas présent dans les énoncés distribués.
- Il est globalement rare que les sujets contiennent des erreurs. Malheureusement, malgré la relecture soignée des concepteurs, il peut arriver que certaines coquilles subsistent. Un candidat repérant une coquille peut le signaler sur sa copie. Attention cependant au faux positif : signaler qu'on a repéré une coquille alors qu'il n'y en a pas fait plutôt mauvais effet.
- Quand la coquille est avérée, la question sort généralement du barème.
- Ici, on pouvait se douter qu'il y avait un problème car, dans l'expression de $f$, $x$ et $y$ jouent des rôles symétriques ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(y,x)$). La coquille introduisait une dissymétrie des rôles de $x$ et $y$, ce qui pouvait mettre la puce à l'oreille.

$\square$

***b)*** Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de $f$ ?

*Démonstration.*
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & -8 + \Big((x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2\Big) \\ & \geqslant & -8 \end{array}$$

  car on ajoute à $-8$ une somme de carrés.

- On rappelle que $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \leqslant f(x,y)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet aux points } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ un minimum global.}}$$

□

***5. a)*** Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction $f$.

```
1 function z = f(x,y)
2     z = ---
3 endfunction
4 x = linspace(-2,2,101)
5 y = x
6 fplotd3d(x,y,f)
```

*Démonstration.*
Il suffit de recopier la définition de la fonction $f$.

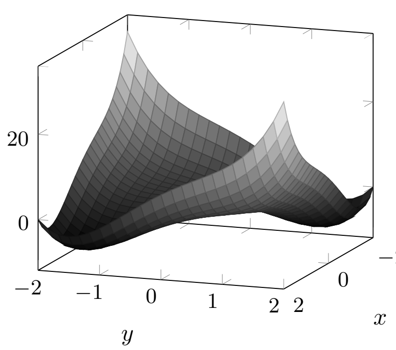
```
2     z = x ^ 4 + y ^ 4 - 2 * (x - y) ^ 2
```

**Commentaire**

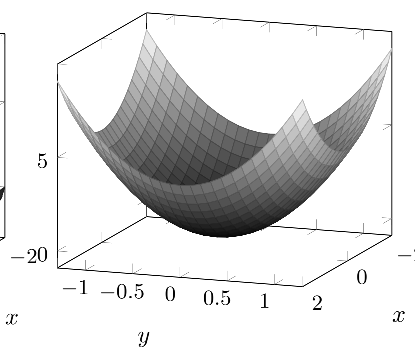
On rappelle qu'il n'est pas obligatoire de recopier tout le programme lorsqu'il est demandé de compléter un programme à trou.

□

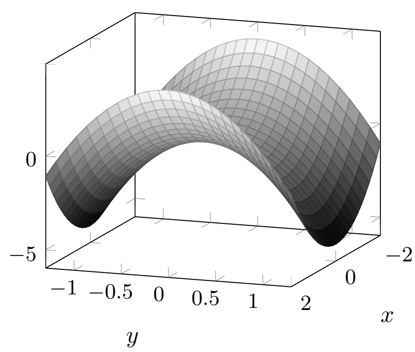
***b)*** Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.




Nappe 1




Nappe 2




Nappe 3

*Démonstration.*

- D'après l'étude précédente, la fonction $f$ possède un minimum global réalisé en les deux points $((\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))$.
- On peut écarter la deuxième nappe qui représente une fonction n'admettant un minimum global qu'en un point.
- On peut écarter la troisième nappe qui représente une fonction n'admettant pas de minimum global (elle admet par contre un point selle).
- Seule la première nappe représente une fonction admettant un minimum global réalisé en deux points. C'est donc la représentation de la fonction $f$ considéré.

Le script précédent renvoie la première nappe.

**Commentaire**

Il était difficile de lire les coordonnées des deux points atteignant le minimum sur l'énoncé original. Pour être certain d'avoir des points (même si la photocopie en noir et blanc rend le graphique peut lisible), il est conseillé de lister les propriétés que doit avoir la nappe représentant $f$.

□

## Exercice 2

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille $(e_0, e_1, e_2)$ est une base de $E$, les fonctions $e_0$, $e_1$ $e_2$ étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application $\varphi$ qui, à toute fonction $P$ de $E$, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) \ dt$$

***1. a)*** Montrer que $\varphi$ est linéaire.

*Démonstration.*
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P_1, P_2) \in E^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \Big(\varphi(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\Big)(x) & = & \displaystyle\int_0^1 (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(x+t) \ dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^1 (\lambda_1 \cdot P_1(x+t) + \lambda_2 \cdot P_2(x+t)) \ dt & \\ & = & \lambda_1 \displaystyle\int_0^1 P_1(x+t) \ dt + \lambda_2 \int_0^1 P_2(x+t) \ dt & \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ & = & \lambda_1 \ (\varphi(P_1))(x) + \lambda_2 \ (\varphi(P_2))(x) & \\ & = & \Big(\lambda_1 \cdot \varphi(P_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(P_2)\Big)(x) & \end{array}$$

L'égalité précédente étant vérifiée pour tout réel $x$, on en déduit :

$$\varphi(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 \cdot \varphi(P_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(P_2)$$

L'application $\varphi$ est linéaire.

**Commentaire**

- Cet exercice est de facture classique.
La principale difficulté provient de la manipulation d'objets. Il faut donc bien prendre le temps de comprendre la définition de l'application $\varphi : E \to E$.
- Détaillons les objets considérés.
  - En accord avec le programme, les polynômes sont confondus avec leur application polynomiale associée. C'est ainsi que $e_0$, $e_1$ et $e_2$, éléments de $E$, sont définies en tant qu'application $(\forall t \in \mathbb{R},\ e_0(t) = 1,\ e_1(t) = t,\ e_2(t) = t^2)$.
  La variable $t$ utilisée ici est muette (on pourrait aussi bien définir ces applications par : $\forall u \in \mathbb{R}$, $e_0(u) = 1$, $e_1(u) = u$, $e_2(u) = u^2$) et n'a pas de lien avec la variable d'intégration (muette) nommée elle aussi $t$. Ces applications polynomiales sont parfois notées $P_0$, $P_1$ et $P_2$, la lettre $P$ étant traditionnellement utilisée pour désigner un polynôme (ce que fait l'énoncé).
  - L'application $\varphi$ associe à toute application polynomiale $P$ une application polynomiale notée $\varphi(P)$. Une telle application est définie par sa valeur en tout point $x \in \mathbb{R}$ (nouvelle variable muette). C'est ce qui est fait dans l'énoncé qui fournit la valeur de $(\varphi(P))(x)$.
  - Enfin, $\displaystyle\int_0^1 P(x+t)\, dt$ est une quantité qui dépend de $x$ mais qui est indépendante de $t$, variable (muette) d'intégration.

□

***b)*** Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de $x$, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de $e_0$, $e_1$ et $e_2$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$(\varphi(e_0))(x) = \int_0^1 e_0(x+t)\ dt = \int_0^1 1\ dt = 1\ (1-0) = 1 = e_0(x)$$

$$\boxed{\text{L'égalité précédente étant vérifiée pour tout réel } x \text{, on en déduit : } \varphi(e_0) = e_0.}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
(\varphi(e_1))(x) &= \int_0^1 e_1(x+t)\ dt = \int_0^1 (x+t)\ dt \\
&= \int_0^1 x\ dt + \int_0^1 t\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= x\ (1-0) + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
&= x + \frac{1}{2} \\
&= e_1(x) + \frac{1}{2}\ e_0(x) = \left(e_1 + \frac{1}{2}\ e_0\right)(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'égalité précédente étant vérifiée pour tout réel } x \text{, on en déduit : } \varphi(e_1) = e_1 + \frac{1}{2}\ e_0.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll}
(\varphi(e_2))(x) & = & \displaystyle\int_0^1 e_2(x+t)\ dt \ = \ \int_0^1 (x+t)^2\ dt & \\
& = & \displaystyle\int_0^1 x^2\ dt + 2x \int_0^1 t\ dt + \int_0^1 t^2\ dt & \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
& = & x^2\ (1-0) + 2\ x \left[ \dfrac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[ \dfrac{t^3}{3} \right]_0^1 & \\
& = & x^2 + x + \dfrac{1}{3} & \\
& = & e_2(x) + e_1(x) + \dfrac{1}{3}\ e_0(x) \ = \ \left( e_2 + e_1 + \dfrac{1}{3}\ e_0 \right)(x) &
\end{array}$$

L'égalité précédente étant vérifiée pour tout réel $x$, on en déduit : $\varphi(e_2) = e_2 + e_1 + \dfrac{1}{3}\ e_0$. □

***c)*** Déduire des questions précédentes que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.

*Démonstration.*

- D'après la question ***1.a)***, l'application $\varphi$ est linéaire.
- Il reste à démontrer que cette application est à valeurs dans $E$.
  Soit $P \in E$. Comme $(e_0, e_1, e_2)$ est une base de $E$, il existe un unique triplet $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$P = a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\varphi(P) & = & \varphi(a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2) & \\
& = & a_0\ \varphi(e_0) + a_1\ \varphi(e_1) + a_2\ \varphi(e_2) & \textit{(par linéarité de } \varphi\textit{)} \\
& = & a_0\ e_0 + a_1\ \left( \dfrac{1}{2}\ e_0 + e_1 \right) + a_2\ \left( \dfrac{1}{3}\ e_0 + e_1 + e_2 \right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \left( a_0 + \dfrac{1}{2} a_1 + \dfrac{1}{3} a_2 \right)\ e_0 + (a_1 + a_2)\ e_1 + a_2\ e_2 &
\end{array}$$

Ainsi, $\varphi(P) \in \mathrm{Vect}\,(e_0, e_1, e_2) = E$.

On en déduit que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.

**Commentaire**

On aurait aussi pu calculer directement $\varphi(P)$ :

$$\begin{array}{rcl}
(\varphi(P))(x) & = & \displaystyle\int_0^1 P(x+t)\ dt = \int_0^1 \left( a_0 + a_1\ (x+t) + a_2\ (x+t)^2 \right)\ dt \\
& = & \ldots \ = \ \left( a_0 + \dfrac{1}{2} a_1 + \dfrac{1}{3} a_2 \right) + (a_1 + a_2)\ x + a_2\ x^2
\end{array}$$

Mais ce n'était pas l'esprit du sujet et cela obligeait à refaire des calculs déjà effectués précédemment.

□

***2. a)*** Écrire la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base $(e_0, e_1, e_2)$. On vérifiera que la première ligne de $A$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

*Démonstration.*
D'après la question ***1.b)*** :

- $\varphi(e_0) = 1 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi(e_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\varphi(e_1) = \dfrac{1}{2} \cdot e_0 + 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi(e_1)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\varphi(e_2) = \dfrac{1}{3} \cdot e_0 + 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi(e_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = \text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

***b)*** Justifier que $\varphi$ est un automorphisme de $E$.

*Démonstration.*
La matrice $A$ est inversible car elle est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. La matrice $A$ étant la représentation matricielle dans la base $(e_0, e_1, e_2)$ de $\varphi$, on en déduit que $\varphi$ est bijective.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est un automorphisme de } E.}$$

□

***c)*** L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?

*Démonstration.*

- La matrice $A$ est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(A) = \{1\}.}$$

- Montrons par l'absurde que $\varphi$ n'est pas diagonalisable.
  Supposons que $\varphi$ est diagonalisable, alors $A = \text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi)$ l'est aussi.
  Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $A$ telles que $A = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de $A$. Ainsi $D = I$ et :

  $$A = PDP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

  Absurde !

  $$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

**Commentaire**

- Il était possible de déterminer $E_1(\varphi)$ l'espace propre associé à 1.
- Détaillons la rédaction associée.

  Soit $P = a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2 \in E$ . On a alors $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} P \in E_1(\varphi) & \Longleftrightarrow & (\varphi - \mathrm{id}_E)(P) = 0_E \\ & \Longleftrightarrow & (A - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}\ a_1 & + & \frac{1}{3}\ a_2 & = & 0 \\ & & a_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \ a_1 = a_2 = 0 \right. \\ & & \textit{(par remontées successives)} \end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(\varphi) & = & \{P = a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2 \mid (\varphi - \mathrm{id}_E)(P) = 0_E\} \\ & = & \{a_0\ e_0 + a_1\ e_1 + a_2\ e_2 \mid a_1 = a_2 = 0\} \\ & = & \{a_0\ e_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(e_0) \end{array}$$

  La famille $\mathcal{F} = (e_0)$ est génératrice de $E_1(\varphi)$.
  De plus, elle est libre car constituée d'un vecteur non nul.
  C'est donc une base de $E_1(\varphi)$ et $\dim(E_1(\varphi)) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 1$.

  Comme : $\dim(E_1(\varphi)) = 1 \neq 3 = \dim(E)$, alors $\varphi$ n'est pas diagonalisable.

□

*3.* Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour que soit affichée la matrice $A^n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur :

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
A = [---]
disp(---)
```

*Démonstration.*

- On stocke la matrice $A$ dans la variable `A`.

```
A = [1, 1/2, 1/3; 0, 1, 1; 0, 0, 1]
```

- Puis on demande l'affichage de $A^n$.

```
disp(A ^ n)
```

□

*4. a)* Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, il existe un réel $u_n$ tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner $u_0$ et établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}\,(3n+2)$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$ : il existe un réel $u_n$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- ▶ **Initialisation** :
  - Tout d'abord : $A^0 = I_3$.
  - Par ailleurs : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{0}{2} & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  En posant $u_0 = 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (il existe $u_{n+1} \in \mathbb{R}$ tel que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).
  - Par hypothèse de récurrence, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que :

  $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  On en déduit :

  $$A^{n+1} = A\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  En posant $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3}$, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

$$\boxed{\text{En particulier : } u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} = u_n + \frac{1}{6}\,(3n+2).}$$ □

***b)*** En déduire, par sommation, l'expression de $u_n$ pour tout entier $n$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{6}\ (3k+2)$$

- On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{6}\ (3k+2) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} (3k+2) \\
&= \frac{1}{6} \left(3 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 2\right) \\
&= \frac{1}{6} \left(3\ \frac{n(n-1)}{2} + 2n\right) \\
&= \frac{1}{12}\ (3\ n(n-1) + 4n) \\
&= \frac{1}{12}\ (n(3\ (n-1) + 4)) \\
&= \frac{n\ (3n+1)}{12}
\end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n$$

- On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n\ (3n+1)}{12}$$

  Cette relation est aussi vraie pour $n = 0$. En effet :
  - × d'une part : $u_0 = 0$,
  - × d'autre part : $\dfrac{0\ (3 \times 0 + 1)}{12} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n\ (3n+1)}{12}.}$$

□

***c)*** Écrire $A^n$ sous forme de tableau matriciel.

*Démonstration.*

D'après les questions précédentes : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n\,(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Commentaire**

Cette question peut dérouter puisque le terme « tableau matriciel » n'est pas habituel. C'est simplement l'occasion, pour les candidats ayant réussi la question précédente, de prendre des points supplémentaires.

□

# Exercice 3

Soit $V$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction $F_V$ définie par : $F_V(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que $W$ est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée $F_W$. On dit que $W$ suit une loi de Gumbel.

***1. a)*** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.

*Démonstration.*

- Notons $h : x \mapsto -\ln(x)$, de sorte que $W = h(V)$.
  Comme $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $V(\Omega) = ]0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} W(\Omega) & = & h(V)(\Omega) \ = \ h\big(V(\Omega)\big) & \\ & = & h\big(]0, +\infty[\big) & \\ & = & \Big] \lim\limits_{x \to +\infty} h(x), \lim\limits_{x \to 0} h(x) \Big[ & \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement décroissante sur } ]0, +\infty[\textit{)} \\ & = & ]-\infty, +\infty[ & \textit{(car } \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(x) = -\infty \textit{ et } \lim\limits_{x \to 0} -\ln(x) = +\infty\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } W(\Omega) = \mathbb{R}.}$$

- Déterminons la fonction de répartition de $W$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_W(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([-\ln(V) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(V) \geqslant -x]) & \\ & = & \mathbb{P}([V \geqslant e^{-x}]) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}([V < e^{-x}]) & \\ & = & 1 - F_V(e^{-x}) & \textit{(car } V \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - e^{-e^{-x}}\right) & \textit{(car } e^{-x} > 0\textit{)} \\ & = & e^{-e^{-x}} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = e^{-e^{-x}}}$$

**Commentaire**

- Commencer par déterminer l'ensemble image $V(\Omega)$ est un bon réflexe : cela peut guider l'étude de la fonction de répartition $F_V$. Plus précisément, cela fournit la disjonction de cas à effectuer. Typiquement, si l'on démontre que $V(\Omega)$ est de la forme $[a, b]$ (où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$), on peut rédiger comme suit :
  - × si $x < a$ alors $[V \leqslant x] = \varnothing$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - × si $x \in [a, b]$ alors $[\ldots$ `démo à produire` $\ldots]$
  - × si $x > b$ alors $[X \leqslant x] = \Omega$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Les ensembles images $V(\Omega)$ de types différents (essentiellement $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$) amènent des disjonctions de cas analogues.

$\square$

***b)*** En déduire que $W$ est une variable à densité.

*Démonstration.*
La fonction de répartition $F_W$ est :
× continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).
× de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } W \text{ est une variable à densité.}}$$

□

- On désigne par $n$ un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que $V$, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire $Y_n$ définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout $\omega$ de $\Omega$, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
  On admet que $Y_n$ est une variable aléatoire à densité.

***2. a)*** Montrer que la fonction de répartition $F_{Y_n}$ de $Y_n$ est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

*Démonstration.*

- Déterminons tout d'abord $Y_n(\Omega)$.
  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. $X_i$ suit la loi $\mathcal{E}(1)$, et donc $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$.
  On rappelle que $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  – Si $x < 0$ : alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  – Si $x \geqslant 0$ :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \cdots \times \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) && \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\ &= (\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])^n && \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ ont même loi)} \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-x})^n && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

**Commentaire**

- Cette question permet d'illustrer l'intérêt de la détermination de $Y_n(\Omega)$ : cela nous fournit la disjonction de cas servant à déterminer la fonction de répartition $F_{Y_n}$.
- On notera au passage que démontrer l'inclusion $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$ est suffisant pour mettre en place cette disjonction de cas.

□

***b)*** En déduire une densité $f_{Y_n}$ de $Y_n$.

*Démonstration.*

- $Y_n$ est une variable à densité car :
  - $\times$ $F_{Y_n}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  - $\times$ $F_{Y_n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

    En effet, sur $]-\infty, 0[$, $F_{Y_n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est constante sur cet intervalle.
    Sur $]0, +\infty[$, $F_{Y_n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour déterminer une densité de $Y_n$, on dérive $F_{Y_n}$ sur les **intervalles ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - Si $x \in ]-\infty, 0[$ :
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = 0$$
  - Si $x \in ]0, +\infty[$ :
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$
  - Si $x = 0$ : on pose $f_{Y_n}(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

**Commentaire**

Il faut bien comprendre qu'on peut prendre n'importe quelle valeur positive pour $f_n$ en 0. On peut ainsi construire une infinité de densités de $Y_n$.
C'est pourquoi on parle d'**une** densité.

□

***3. a)*** Donner un équivalent de $1-F_{Y_n}(t)$ lorsque $t$ est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

*Démonstration.*

On commence par déterminer un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ quand $t \to +\infty$.

- Soit $t \geqslant 0$.
$$F_{Y_n}(t) \quad = \quad \left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^n$$
- On reconnaît une expression de la forme $(1+x)^\alpha$ dont on connaît un développement limité en 0. Plus précisément, il existe une fonction $\varepsilon$ définie dans un voisinage de 0 et qui vérifie $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, telle que, au voisinage de 0 :
$$(1+x)^n \ = \ 1 + n\ x + x\ \varepsilon(x)$$
- Comme $-\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer l'égalité précédente à $x = -\mathrm{e}^{-t}$ pour $t$ dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :
$$\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^n \ = \ 1 - n\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)$$
$$\text{ainsi} \quad 1-\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^n \ = \ n\ \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)$$
- On constate alors : $\mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) = \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$. En effet :
$$\frac{\mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)}{\mathrm{e}^{-t}} \ = \ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  par théorème de composition des limites.

- On en conclut : $1 - F_{Y_n}(t) = n\ \mathrm{e}^{-t} + \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } 1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-t}.}$$

Démontrons alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

- La fonction $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- D'autre part :

$$1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} n\ \mathrm{e}^{-t}\ (\geqslant 0)$$

- Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente (de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt$ avec $\alpha > 0$).
  *(on ne change pas la nature d'une intégrale impropre en multipliant son intégrande par un réel non nul : ceci nous permet de ne pas prendre en compte le réel $n \neq 0$)*

Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales impropres de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt \text{ est convergente.}}$$

**Commentaire**

- Les intégrales de type $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt$ sont considérées dans le programme comme des intégrales de référence au même titre que les intégrales de Riemann ce qui explique la rédaction ci-dessus.
- On aurait pu justifier autrement la convergence de cette intégrale.
  *1)* Soit par calcul.
  Soit $A \geqslant 0$.

$$\int_0^A n\mathrm{e}^{-t}\ dt = n\left[\ -\mathrm{e}^{-t}\ \right]_0^A = n(1 - \mathrm{e}^{-A}) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} n$$

  Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge.

  *2)* Soit par un argument provenant du chapitre des v.a.r. à densité.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge et vaut 1 en tant qu'intégrale d'une densité d'une v.a.r. $X$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

□

***b)*** Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt$$

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} u(t) & = & 1 - F_{Y_n}(t) & u'(t) & = & -f_{Y_n}(t) \\ v'(t) & = & 1 & v(t) & = & t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x 1 \times (1 - F_{Y_n}(t))\, dt &= \left[\, t\,(1 - F_{Y_n}(t))\,\right]_0^x - \int_0^x (-f_{Y_n}(t)) \times t\, dt \\ &= x\,(1 - F_{Y_n}(x)) - \cancel{0\,(1 - F_{Y_n}(0))} + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\, dt \\ &= x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\, dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\, dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\, dt}$$

☐

***c)*** Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

*Démonstration.*

- D'après la question ***3.a)***, $1 - F_{Y_n}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-x}$. On obtient alors :

$$x(1 - F_{Y_n}(x)) \underset{x \to +\infty}{\sim} nx\mathrm{e}^{-x}$$

- Or : $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  En effet, $x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi : $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0}$$

☐

***d)*** En déduire que $Y_n$ possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

*Démonstration.*

- La v.a.r. $Y_n$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_{Y_n}(t)\ dt$.
  Or : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ car $f_{Y_n}$ est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
- Or, d'après la question ***3.b)***, pour tout $x \geqslant 0$ :

$$\int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt - x(1 - F_{Y_n}(x))$$

  La partie droite de l'égalité admet une limite finie quand $x \to +\infty$ car :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ converge, d'après la question ***3.a)***
  × $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$, d'après la question ***3.b)***

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ est convergente. De plus :

$$\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt - 0$$

$$\boxed{\text{En conclusion, la v.a.r. } Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt.}$$

☐

*4. a)* Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du$$

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^x \ \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n\right) \ dt$$

On effectue le changement de variable $\boxed{u = 1 - \mathrm{e}^{-t}}$.

$u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$ (et donc $\mathrm{e}^{-t} = 1 - u$ puis $t = -\ln(1-u)$)
$\hookrightarrow du = \mathrm{e}^{-t} \ dt$ et $dt = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-t}} \ du = \dfrac{1}{1-u} \ du$
- $t = 0 \ \Rightarrow \ u = 0$
- $t = x \ \Rightarrow \ u = 1 - \mathrm{e}^{-x}$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -\ln(1-u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$.
On remarque de plus que $u \in [0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$, en particulier $u \neq 1$ (car $1 - \mathrm{e}^{-x} < 1$ pour tout $x \geqslant 0$) ce qui permet de justifier la validité de l'écriture $\dfrac{1}{1-u}$.
On obtient finalement :

$$\int_0^x \ \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n\right) \ dt \ = \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ (1 - u^n) \, \frac{1}{1-u} \ du \ = \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du}$$

□

*b)* En déduire que : $\displaystyle\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

*Démonstration.*
- On remarque tout d'abord : $u \in [0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$. On a donc, en particulier : $u \neq 1$.
  On peut donc écrire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k \ = \ \frac{1-u^n}{1-u}$.
- On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du \ &= \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \sum_{k=0}^{n-1} u^k \ du \\
&= \ \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ u^k \ du && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \ \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \ \frac{u^{k+1}}{k+1} \ \right]_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \\
&= \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{k+1}}{k+1} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k} && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}}$$

- On sait de plus que $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-x})^k}{k} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) \, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

**5.** On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

***a)*** On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule $n$ variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction **Scilab** suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire $Z_n$.

```
function Z = f(n)
    x = grand(1,n,'exp',1)
    Z = ---
endfunction
```

*Démonstration.*

```
3        Z = max(x) - log(n)
```

**Commentaire**

- On rappelle qu'il est inutile de recopier le programme en entier.
  Écrire la ligne contenant l'information manquante suffit.
- Il est tout à fait possible (et donc non sanctionné) aux concours d'utiliser plusieurs lignes, même si le concepteur a pensé à une réponse sur une seule ligne. Ici, on pouvait dans un premier temps simuler la v.a.r. $Y_n$ puis la v.a.r. $Z_n$.

```
3        Y = max(x)
4        Z = Y - log(n)
```

□

***b)*** Voici deux scripts :

```
V = grand(1,10000,'exp',1)
W = -log(V)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

Script (1)

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
Z = [] // la matrice-ligne Z est vide
for k = 1 :10000
    Z = [Z,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, ..., $]9,10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).

Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par $W$), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que $Z_n$, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.

Figures/EDHEC_2017/loi_faible_EDHEC_2017.pdf

Histogramme (1)

Figures/EDHEC_2017/loi_faible_EDHEC_2017.p

Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r. $(Z_n)$ ?

*Démonstration.*
Commentons tout d'abord le script et l'histogramme (1).

- Les lignes 1 et 2 permettent d'obtenir des valeurs $(w_1, \dots, w_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(W_1, \dots, W_{10000})$ de la v.a.r. $W$ qui suit la loi de Gumbel. (les v.a.r. $W_i$ sont indépendantes et ont même loi que $W$)
- Les lignes 3 et 4 ont pour but de permettre de visualiser la répartition des 10000 valeurs $(w_1, \dots, w_{10000})$ à l'aide d'un histogramme des fréquences :
  × l'instruction `linspace(0, 10, 11)` crée la matrice `[0, 1, 2, ..., 10]`.
  × l'instruction `histplot` crée les classes : $[0, 1]$, $]1, 2]$, ..., $]9, 10]$.
  Elle permet aussi de récupérer l'effectif de chaque classe (*i.e.* le nombre de $w_i$ dans chaque classe) et trace l'histogramme (1).
- Considérons par exemple la classe définie par l'intervalle $]2, 3]$.
  La loi faible des grands nombres (LfGN) permet d'affirmer :

$$\text{fréquence de la classe } ]2,3] = \frac{\text{effectif de la classe } ]2,3]}{\text{taille de l'observation}} \ \simeq \ \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$$

  Ici, on réalise bien un grand nombre d'observations ($N = 10000$) ce qui justifie cette formule. Ainsi, l'aire de la barre qui s'appuie sur l'intervalle $]2, 3]$ est donc une approximation de $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) = F_W(3) - F_W(2)$.

Commentons maintenant l'histogramme (2).

- Les lignes 3, 4, et 5 permettent d'obtenir les valeurs $(u_1, \dots, u_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(U_1, \dots, U_{10000})$ de la variable $Z_n$ (pour $n = 1000$). (les $U_i$ sont indépendantes et ont même loi que $Z_n$)
- On trace alors l'histogramme de répartition de ces valeurs. Pour les raisons évoquées ci-dessus, l'aire de la barre du graphique (2) est une valeur approchée de :

$$\mathbb{P}([2 < Z_n \leqslant 3]) = F_{Z_n}(3) - F_{Z_n}(2)$$

Or, on constate que l'histogramme (2) est similaire à l'histogramme (1).
Cela signifie que les aires des barres de chacun de ces deux graphiques sont très proches. Ainsi :

$$F_{Z_n}(3) - F_{Z_n}(2) \ \simeq \ F_W(3) - F_W(2)$$

En considérant la première classe, on observe que : $F_{Z_n}(1) \ \simeq \ F_W(1)$.
On obtient alors, en considérant successivement toutes les classes :

$$\forall i \in [\![1, 10]\!], \ F_{Z_n}(i) \ \simeq \ F_W(i)$$

Les fonctions de répartition $F_{Z_n}$ et $F_W$ coïncident en ces 10 points. En considérant des classes définies par d'autres points, on observerait que les fonctions coïncident en ces nouveaux points. Ainsi, lorsque $n = 1000$, les fonctions de répartition des v.a.r. $W$ et $Z_n$ sont très proches.

**On conjecture que la suite de v.a.r. $(Z_n)$ converge en loi vers la v.a.r. $W$.**

**Commentaire**

- Ces deux histogrammes sont normalisés. De ce fait, ce n'est pas l'effectif de la classe qui est affiché en ordonnée mais un nombre qui, une fois multiplié par la largeur de la barre, fournit la fréquence de la classe. Autrement dit, dans un tel histogramme, la fréquence d'une classe c'est l'aire de la barre correspondante.
  Ici, chaque barre est de largeur 1. Ce sont donc les fréquences de chaque classe que l'on peut lire en ordonnée. Il ne faut pas oublier de prendre en compte ce coefficient multiplicatif lorsque l'on considère un nombre de barres plus grand (et donc des largeurs de barres différentes).
- Dans la démonstration, on a utilisé la loi faible des grands nombres (LfGN) afin de faire le lien entre fréquence de la classe $]2, 3]$ et probabilité $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$. Établissons ce lien de manière plus précise.
  Pour ce faire, on introduit la v.a.r. $T$ suivante.

$$\begin{array}{rccl} T & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } W(\omega) \in \, ]2, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

  Le $N$-échantillon d'observations $(w_1, \ldots, w_N)$ (où $N$ est un grand nombre) de la v.a.r. $W$ fournit un $N$-échantillon d'observations $(t_1, \ldots, t_N)$ de la v.a.r. $T$.
  La LfGN stipule :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \ \simeq \ \mathbb{E}(T)$$

  Or $T$ est une v.a.r. finie qui admet pour espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(T) & = & 1 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) + \cancel{0 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])} \\ & = & \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) \ = \ F_W(3) - F_W(2) \end{array}$$

  Par ailleurs, $\sum\limits_{i=1}^{N} t_i$ permet de compter le nombre d'observations qui appartiennent à la classe $]2, 3]$ (*i.e.* l'effectif de la classe $]2, 3]$).
  Ainsi, $\frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} t_i$ est la fréquence de cette classe. Celle-ci est représentée graphiquement par la troisième barre de l'histogramme (1). D'après ce qui précède, l'aire de cette barre est une valeur approchée de $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$.

□

***6.*** On note $F_{Z_n}$ la fonction de répartition de $Z_n$.

***a)*** Justifier que, pour tout réel $x$, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} F_{Z_n}(x) & = & \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n - \ln(n) \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x + \ln(n)]) \\ & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))}$$

□

***b)*** Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

*Démonstration.*

- Déterminons tout d'abord $Z_n(\Omega)$.
  On a vu précédemment : $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Comme } Z_n = Y_n - \ln(n), \text{ on en déduit que } Z_n(\Omega) \subset [-\ln(n), +\infty[}$$

Déterminons $F_{Z_n}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < -\ln(n)$ : alors $[Z_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \geqslant -\ln(n)$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{Z_n}(x) & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\ln(n))}\right)^n & \textit{(car } x + \ln(n) \geqslant 0 \textit{ et par définition de } F_{Y_n}\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{array} \right.}$$

□

***c)*** Montrer que, pour tout réel $x$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, on a l'équivalent suivant :

$$\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$$

On obtient alors :

$$n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cancel{n}} = -\mathrm{e}^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}.}$$

□

***d)*** Démontrer le résultat conjecturé à la question ***5.b)***.

*Démonstration.*
Il s'agit de démontrer que la suite $(Z_n)$ converge en loi vers la v.a.r. $W$. Autrement dit, il faut démontrer qu'en tout point de continuité de $F_W$, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***6.c)***, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.
  La fonction $u \mapsto \exp(u)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a, par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}}$$

- De plus, comme le réel $x$ est fixé et que $-\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ x \geqslant -\ln(n)$$

  Considérons maintenant $n \geqslant n_0$ (ce qui est autorisé car on cherche une limite quand $n$ tend vers $+\infty$). On a alors :

$$F_{Z_n}(x) = \left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$$

  On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

$$\boxed{\text{La suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } W.}$$

□

# Problème

## Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant $n$. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

***1.*** Donner la loi de $X_1$, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable $X_1$.

*Démonstration.*

- À l'instant 0, le mobile se trouve sur le sommet 1.
  Il peut alors se déplacer sur les sommets 2, 3 et 4.

$$\boxed{X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}}$$

- De plus, ce choix se fait de manière équiprobable.
  Ainsi : $\mathbb{P}([X = 2]) = \mathbb{P}([X = 3]) = \mathbb{P}([X = 4]) = \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2, 4]\!]).}$$

- La v.a.r. $X_1$ est finie donc admet une espérance. De plus :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_1) & = & \displaystyle\sum_{k \in X_1(\Omega)} k \ \mathbb{P}([X_1 = k]) \\ & = & 2 \ \mathbb{P}([X_1 = 2]) + 3 \ \mathbb{P}([X_1 = 3]) + 4 \ \mathbb{P}([X_1 = 4]) \\ & = & \dfrac{1}{3} \ (2 + 3 + 4) \ = \ \dfrac{9}{3} \ = \ 3 \end{array}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_1 \text{ admet une espérance donnée par : } \mathbb{E}(X_1) = 3.}$$

**Commentaire**

- Rappelons que si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, la v.a.r. $X$ suit **la loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$ si :

***a)*** $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$ ***b)*** $\forall k \in [\![a, b]\!], \ \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{b - a + 1}$

- La v.a.r. $X$ admet alors une espérance et une variance données par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(b - a)(b - a + 2)}{12}}$$

- Ici, $a = 2$ et $b = 4$. On retrouve bien : $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{2 + 4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

□

On admet pour la suite que la loi de $X_2$ est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}([X_2 = 4]) = \frac{2}{9}$$

*2.* Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par $X_n$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ : $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.

▸ **Initialisation** :
D'après la question précédente, $X_1(\Omega) = [\![2, 4]\!]$.
Trois cas se présentent alors pour le mobile à l'instant 1 :
– s'il est en position 2 : il peut se retrouver en position 1, 3 ou 4 à l'instant 2.
– s'il est en position 3 : il peut se retrouver en position 1, 2 ou 4 à l'instant 2.
– s'il est en position 4 : il peut se retrouver en position 1, 2 ou 3 à l'instant 2.
Toutes ces positions étant possibles, on obtient :
$$X_2(\Omega) = \{1, 3, 4\} \cup \{1, 2, 4\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
D'où $\mathcal{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega) = [\![1, 4]\!]$).
D'après l'hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.
En procédant, comme dans l'étape d'initialisation, par disjonction de cas, on obtient :
$$X_{n+1}(\Omega) = \{2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 4\} \cup \{1, 2, 4\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)}$$

**Commentaire**

- Afin de déterminer formellement l'ensemble image $X_n(\Omega)$ d'une v.a.r. indicée par un entier $n$, il est classique de procéder à une récurrence. C'est une manière rigoureuse de présenter les choses et il faut y penser lorsque le résultat est donné dans l'énoncé.
- Ici, la question n'est pas : « Démontrer que $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$ » mais de « donner, en justifiant », $X_n(\Omega)$. La réponse n'existant pas dans l'énoncé, donner la réponse démontre déjà un premier niveau de compréhension. Dans ce cas, une démonstration moins formelle que la récurrence est acceptable. Ici, il s'agit essentiellement de dire que les 4 sommets sont atteignables à l'instant 2 et qu'il en est donc de même aux instants suivants.

□

*3. a)* Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a :
$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3} \left( \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) \right)$$

*Démonstration.*
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente, $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.
  On en déduit que $\Big( [X_n = k] \Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements.
- Ainsi, d'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [X_{n+1} = 1]) & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}([X_{n+1} = 1]) & \textit{(si, pour tout } k \in [\![1, 4]\!], \\ & & & \mathbb{P}([X_n = k]) \neq 0\textit{)} \end{array}$$

- Or, d'après l'énoncé, pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$ :

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3} \text{ si } k \neq 1 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = 0$$

En effet, si l'événement $[X_n = k]$ est réalisé, c'est que le mobile se trouve en position $k$ à l'instant $n$.

– Si $k \neq 1$, le mobile a alors une probabilité $\frac{1}{3}$ d'atteindre le sommet 1 à l'instant suivant.

– Si $k = 1$, le mobile se déplace et ne peut se retrouver en position 1 à l'instant suivant.

- On en déduit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) \\ = \ & \cancel{\mathbb{P}([X_n = 1]) \times \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1])} + \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) \times \mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 1]) \\ = \ & \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) \times \frac{1}{3} \ = \ \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n = k])}$$

**Commentaire**

- Afin de pouvoir écrire $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 1])$, il faut normalement s'assurer que $\mathbb{P}([X_n = k]) \neq 0$. Ici, l'existence de $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 1])$ est justifiée par le paragraphe initial du sujet où l'on décrit la probabilité que le mobile se trouve en une certaine position à un instant connaissant sa position à l'instant précédent.
- La réponse est ici donnée dans l'énoncé. Il est donc tentant de faire de la rétro-ingénierie (partir du résultat pour essayer de trouver la démonstration). Ce n'est évidemment pas interdit mais parfois dangereux. En l'occurrence, on constate ici que $\mathbb{P}([X_n = 1])$ est absent de la somme. La conclusion hâtive (et fausse si $n \geqslant 2$ !) est alors de déclarer que $\Big([X_n = k]\Big)_{k \in [\![2,4]\!]}$ est un système complet d'événements.

□

***b)*** Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

*Démonstration.*

- Si $n = 0$ : d'après l'énoncé, le mobile se trouve en position 1 à l'instant 0. Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_0 = 1]) = 1 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}([X_0 = 2]) = \mathbb{P}([X_0 = 3]) = \mathbb{P}([X_0 = 4]) = 0$$

Ainsi : $\sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) = 0$.

Comme le mobile se déplace, il ne peut se trouver en position 1 à l'instant 1 : $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = 0$.

$$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } n = 0.}$$

- Si $n = 1$ : dans ce cas, on peut refaire la démonstration précédente avec le système complet d'événements $\Big([X_1 = k]\Big)_{k\in[\![1,4]\!]}$. La seule différence est que cette famille contient l'événement impossible $\varnothing$. D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X_2 = 1]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = 1]) \\
= \ & \cancel{\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])} + \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = 1]) \quad \textit{(car } [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}_{[X_1=k]}([X_2 = 1]) \\
= \ & \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } n = 1.}$$

**Commentaire**

Par définition, le système complet d'événements associé à $X_1$ est $\Big([X_1 = k]\Big)_{k\in[\![2,4]\!]}$.
En lui adjoignant $[X_1 = 1] = \varnothing$, la famille obtenue $\Big([X_1 = k]\Big)_{k\in[\![1,4]\!]}$ est toujours un système complet d'événements. Un système complet d'événements n'est donc pas forcément une partition de l'univers $\Omega$ (les ensembles formant une partition sont tous non vides).

□

*c)* Justifier que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}\left([X_{n+1} = 1]\right) = -\frac{1}{3}\, \mathbb{P}\left([X_n = 1]\right) + \frac{1}{3}$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $\Big([X_n = k]\Big)_{k\in[\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements (qui contient éventuellement $\varnothing$ pour les cas $n = 0$ et $n = 1$). On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1 - \mathbb{P}([X_n = 1])$$

et d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_1 = k]) = \frac{1}{3}\, (1 - \mathbb{P}([X_n = 1]))$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\frac{1}{3}\, \mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{3}}$$

□

***d)*** Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X_n = 1]\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

*Démonstration.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \mathbb{P}\left([X_n = 1]\right)$.
D'après la question précédente, la suite $(u_n)$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}\ u_n + \frac{1}{3}$$

Ainsi, $(u_n)$ est arithmético-géométrique. On lui applique la méthode d'étude associée.

- L'équation de point fixe associé à la suite $(u_n)$ est :

$$x = -\frac{1}{3}\ x + \frac{1}{3}$$

  Or : $x = -\dfrac{1}{3}\ x + \dfrac{1}{3} \ \Leftrightarrow\ \dfrac{4}{3}\ x = \dfrac{1}{3} \ \Leftrightarrow\ x = \dfrac{\cancel{3}}{4}\ \dfrac{1}{\cancel{3}}$.
  Ainsi, l'équation de point fixe admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

- On écrit :

$$\begin{array}{rrcrcrcrl} & u_{n+1} & = & -\dfrac{1}{3} & \times & u_n & + & \dfrac{1}{3} & (L_1) \\ & \lambda & = & -\dfrac{1}{3} & \times & \lambda & + & \dfrac{1}{3} & (L_2) \\ \text{et donc} & u_{n+1} - \lambda & = & -\dfrac{1}{3} & \times & (u_n - \lambda) & & & (L_1)-(L_2) \end{array}$$

  Notons alors $(v_n)$ la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

- La suite $(v_n)$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} v_n &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times v_0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times (u_0 - \lambda) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\mathbb{P}([X_0 = 1]) - \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

  On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = v_n + \lambda = \frac{3}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X_n = 1]\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n.}$$

**Commentaire**

La relation $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n = 1]) + \dfrac{1}{3}$ (question précédente) doit faire penser à une suite arithmético-géométrique. Cet aspect est mis en évidence par l'introduction de la notation $u_n = \mathbb{P}\left([X_n = 1]\right)$.

$\square$

*4. a)* En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n \geqslant 1$, la famille $\Big([X_n = k]\Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements (qui contient $\varnothing$ si $n = 1$). D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [X_{n+1} = 2]) \\
= \ & \cancel{\mathbb{P}([X_n = 2] \cap [X_{n+1} = 2])} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [X_{n+1} = 2]) \quad \textit{(car } [X_n = 2] \cap [X_{n+1} = 2] = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [X_{n+1} = 2]) \\
= \ & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}([X_{n+1} = 2]) \ = \ \frac{1}{3} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n = k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))}$$

- Si $n = 0$, comme déjà vu :

$$\mathbb{P}([X_0 = 1]) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_0 = 2]) = \mathbb{P}([X_0 = 3]) = \mathbb{P}([X_0 = 4]) = 0$$

et $\mathbb{P}([X_1 = 2]) = \mathbb{P}([X_0 = 1] \cap [X_1 = 2]) = \mathbb{P}([X_0 = 1]) \times \mathbb{P}_{[X_0=1]}([X_1 = 2]) = 1 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{La relation est aussi vérifiée pour } n = 0.}$$

□

*b)* En déduire une relation entre $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$ et $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme vu précédemment :

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1 - \mathbb{P}([X_n = 2])$$

et d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{3} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{3}\ (1 - \mathbb{P}([X_n = 2])) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n = 2]) + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n = 2]) + \frac{1}{3}}$$

□

***c)*** Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

*Démonstration.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $r_n = \mathbb{P}([X_n = 2])$.
D'après la question précédente, la suite $(r_n)$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_{n+1} = -\frac{1}{3}\, r_n + \frac{1}{3}$$

Ainsi, $(r_n)$ est arithmético-géométrique.
De plus, la relation vérifiée est la même que celle vérifiée pour $(u_n)$.

- En appliquant la même méthode d'étude qu'en ***3.d)***, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times (r_0 - \lambda) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\mathbb{P}([X_0 = 2]) - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

  où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a posé $w_n = r_n - \lambda$.
- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$r_n = w_n + \lambda = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

**Commentaire**

- Les suites $(u_n)$ et $(r_n)$ vérifiant la même relation de récurrence, il n'y a pas lieu de réécrire exactement la même démonstration.
- De manière générale, si un sujet demande de réaliser, à détails près, deux fois la même démonstration, il faut détailler précisément la méthode la première fois puis expliquer brièvement ce qui change dans la deuxième démonstration.

□

***5.*** On admet que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}([X_n = 3]) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 4]) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}([X_n = 4]) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 3]) = \mathbb{P}([X_n = 4]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

*Démonstration.*

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \mathbb{P}([X_n = 3])$ et $t_n = \mathbb{P}([X_n = 4])$.
  Les suites $(s_n)$ et $(t_n)$ vérifient la même relation de récurrence que la suite $(r_n)$.
  De plus, on a : $r_0 = s_0 = t_0 = 0$.
- On en déduit que ces suites sont égales.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 2]) = \mathbb{P}([X_n = 3]) = \mathbb{P}([X_n = 4]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

□

***6.*** Déterminer, pour tout entier naturel $n$, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire $X_n$.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $X_n$ est finie. Elle admet donc une espérance.
- De plus, d'après ce qui précède :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{E}(X_n) \\ = & \sum\limits_{k\in X_n(\Omega)} k \times \mathbb{P}([X_n = k]) \\ = & \sum\limits_{k=1}^{4} k \times \mathbb{P}([X_n = k]) \\ = & 1 \times \mathbb{P}([X_n = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([X_n = 2]) + 3 \times \mathbb{P}([X_n = 3]) + 4 \times \mathbb{P}([X_n = 4]) \qquad (\star) \\ = & \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 4 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ = & \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + (2+3+4) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ = & \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{10}{4} - \frac{6}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

- Revenons au point $(\star)$. Rigoureusement, le passage de la deuxième égalité à la troisième n'est valide que lorsque $X_n(\Omega) = [\![1,4]\!]$, autrement dit pour $n \geqslant 2$.
  - Pour $n = 0$, $X_0(\Omega) = \{1\}$.
    Cependant, ajouter $k \times \mathbb{P}([X_n = k])$ pour tout $k \in [\![2,4]\!]$ n'a pas d'impact car toutes ces probabilités sont nulles.
  - Pour $n = 1$, $X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.
    Cependant, ajouter $1 \times \mathbb{P}([X_n = 1])$ n'a pas d'impact car cette probabilité est nulle. □

## Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice $A$

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) & \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$$

***7. a)*** Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le calcul $U_n\ A$ produit une matrice ligne à 4 colonnes.

- Le coefficient de la première colonne est :

$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$

D'après la question ***3.a)***, ce coefficient est : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1])$.

- Le coefficient de la deuxième colonne est :
$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$
D'après la question ***4.a)***, ce coefficient est : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$.
- Les coefficients des troisième et quatrième colonnes sont respectivement :
$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$
$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]))$$
En procédant de la même manière qu'aux questions ***3.a)*** et ***4.a)*** (on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\Big([X_n = k]\Big)_{k\in[\![1,4]\!]}$ pour $n \geqslant 1$ et on vérifie la formule pour $n = 0$), on reconnaît les formules pour :
$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 4])$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A.}$$
□

***b)*** Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0\ A^n$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ : $U_n = U_0\ A^n$.

- **Initialisation** :
Il suffit de remarquer : $U_0\ A^0 = U_0\ I = U_0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $U_{n+1} = U_0\ A^{n+1}$).
$$\begin{array}{rcll} U_{n+1} & = & U_n\ A & \textit{(par définition)} \\ & = & U_0\ A^n\ A & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & U_0\ A^{n+1} & \end{array}$$
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$
□

***c)*** En déduire la première ligne de $A^n$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On récupère la première ligne de la matrice $A^n$ en la multipliant, à gauche, par $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.
- Or : $U_0 = (\mathbb{P}([X_0 = 1]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 2]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 3]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 4])) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.
- D'après la question précédente, $U_n = U_0\ A^n$.
Ainsi, la première ligne de $A^n$ n'est autre que $U_n$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La première ligne de } A^n \text{ est} \\ U_n = (\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]) \quad \mathbb{P}([X_n = 3]) \quad \mathbb{P}([X_n = 4])), \text{ à savoir :} \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).\end{array}}$$
□

***8.*** Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice $A^n$, puis écrire ces trois lignes.

*Démonstration.*

- On récupère la deuxième ligne de la matrice $A^n$ en la multipliant, à gauche, par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  Il faut donc considérer :
  $$U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_0 = 1]) & \mathbb{P}([X_0 = 2]) & \mathbb{P}([X_0 = 3]) & \mathbb{P}([X_0 = 4]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  ce qui signifie que $\mathbb{P}([X_0 = 2]) = 1$.

  En plaçant le mobile initialement en position 2, la multiplication $U_0\ A^n$ permet de récupérer la deuxième ligne de $A^n$.

  De même, on récupère la troisième ligne de $A^n$ en considérant $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à placer initialement le mobile en position 3.

  Enfin, on récupère la quatrième ligne de $A^n$ en considérant $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à placer initialement le mobile en position 4.

- Ces choix modifient les calculs faits en question ***3.d)***, ***4.c)*** et ***5***.
  Plus précisément, cela modifie les valeurs initiales des suites $(u_n)$, $(r_n)$, $(s_n)$ et $(t_n)$.
  Par exemple, pour le choix $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient :
  $$u_0 = 0 \qquad r_0 = 1 \qquad s_0 = 0 \qquad t_0 = 0$$
  Chacune de ces suites vérifie la même relation de récurrence.
  Seule la condition initiale (premier terme nul ou égal à 1) les différencie.
  - La question ***3.d)*** nous fournit le terme général pour une valeur initiale nulle.
  - La question ***4.c)*** nous fournit le terme général pour une condition initiale égale à 1.

  La deuxième ligne de $A^n$ est :
  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

  La troisième ligne de $A^n$ est :
  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

  La quatrième ligne de $A^n$ est :
  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

□

## Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de $A$

On considère les matrices $I$ et $J$ suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

***9.*** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que $A = aI + bJ$.

*Démonstration.*
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a alors :

$$\begin{aligned} a\ I + b\ J = A \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ b & a+b & b & b \\ b & b & a+b & b \\ b & b & b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 0 \\ & & b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & -\frac{1}{3} \\ & & b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{3}\ I + \frac{1}{3}\ J}$$

**Commentaire**

- Il est assez classique (c'est le cas ici) que les premières questions d'une nouvelle partie soient très abordables. Il est conseillé de repérer ces questions au début de l'épreuve en passant quelques minutes à cocher les questions qui semblent les plus simples.
  On peut citer parmi celles-ci (liste non exhaustive) :
  - l'étude du problème pour des petites valeurs d'un paramètre considéré (question ***1.***),
  - du calcul (questions ***7.a)***, ***9.*** et ***10.a)***), des applications numériques, vérifier qu'une relation est vraie pour certaines valeurs d'un paramètre (question ***3.b)***),
  - les questions dont l'énoncé souffle la méthode à utiliser (questions ***3.a)*** et ***10.b)***),
  - les méthodes / questions classiques (questions ***3.d)*** et ***7.b)***).

  L'objectif est de ne pas sortir de la salle sans avoir traité ces questions. Il faut donc gérer son temps en conséquence.
- On retiendra que les questions d'un énoncé ne sont pas rangées dans un ordre croissant de difficulté. Il ne faut donc pas se décourager si on ne sait pas traiter une ou plusieurs questions d'affilée. Il faut au contraire s'accrocher : des questions plus simples apparaîtront.

□

***10. a)*** Calculer $J^2$ puis établir que, pour tout entier naturel $k$ non nul, on a : $J^k = 4^{k-1} J$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot J}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$ : $J^k = 4^{k-1}\ J$.
  - ▶ **Initialisation** :
    D'une part : $J^1 = J$.
    D'autre part : $4^{1-1}\ J = 4^0\ J = J$.
    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $J^{k+1} = 4^k\ J$).

$$\begin{aligned} J^{k+1} &= J^k\ J \\ &= 4^{k-1}\ J\ J && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 4^{k-1}\ J^2 \\ &= 4^{k-1}\ (4\ J) \ = \ 4^k\ J \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k).}$$

□

***b)*** À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier $n$ non nul, l'expression de $A^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et $J$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Les matrices $-\frac{1}{3}\ I$ et $\frac{1}{3}\ J$ commutent puisque $I$ commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\ I + \frac{1}{3}\ J\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{3}\ I\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\ J\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-k} I^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k J^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k I^{n-k}\ J^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} J^k && \textit{(}I^{n-k}\ J^k = I\ J^k = J^k\textit{)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ J^k \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \left(\binom{n}{0} (-1)^n J^0 \ + \ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ J^k\right) && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 0\textit{)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \left((-1)^n\ I \ + \ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^{k-1}\ J\right) && \textit{(car } J^k = 4^{k-1}\ J \textit{ pour } k \geqslant 1\textit{)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \left((-1)^n\ I \ + \ \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^k\right)\ J\right) \end{aligned}$$

- Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, 4^k \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, 4^k\right) - \binom{n}{0} (-1)^n\, 4^0$$
$$= \;(-1+4)^n - (-1)^n \;=\; 3^n - (-1)^n$$

- En réinjectant, on obtient :

$$\left(-\frac{1}{3}\, I + \frac{1}{3}\, J\right)^n \;=\; \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n\, I \;+\; \frac{1}{4}\, \left(3^n - (-1)^n\right)\, J\right)$$
$$= \;\left(-\frac{1}{3}\right)^n\, I + \frac{1}{4}\, \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\, J$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\; A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n\, I + \frac{1}{4}\, \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\, J}$$

**Commentaire**

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$ :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

*(la deuxième somme est nulle si $p = n$)*
où $(u_n)$ est une suite quelconque de réels ou de matrices.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 0$.
L'argument $n \geqslant 0$ est donc suffisant pour découper la somme. On traite le cas $n \geqslant 1$ dans cette question pour s'assurer que la deuxième somme ne se fait pas sur un ensemble d'indices vide. Ceci permet d'assurer que $k$ est et donc d'utiliser l'égalité : $J^k = 4^{k-1}\, J$.

$\square$

***c)*** Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

*Démonstration.*

- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $\left(-\frac{1}{3}\right)^0\, I + \frac{1}{4}\, \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0\right)\, J \;=\; I + \frac{1}{4}(1-1)\, J \;=\; I.$

$$\boxed{\text{La relation précédente est valable pour } n = 0.}$$

$\square$

## Partie 4 : informatique

***11. a)*** Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre $n$ de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements (on pourra utiliser la commande `sum`).

```
A = [---] / 3
x = grand(100,'markov',A,1)
n = ---
disp(x)
disp(n)
```

*Démonstration.*

- On commence par écrire la matrice $A$.

```
1  A = [0, 1, 1, 1; 1, 0, 1, 1; 1, 1, 0, 1; 1, 1, 1, 0] / 3
```

- La commande `grand(100,'markov',A,1)` renvoie une trajectoire possible du mobile de taille 100. C'est une matrice ligne $[x_1, \dots, x_{100}]$ où les éléments $x_1 \in X_1(\Omega)$, ..., $x_{100} \in X_{100}(\Omega)$ sont des sommets visités par le mobile dans un parcours de taille 100.
  Cette matrice est stockée dans la variable `x`.
- On complète le deuxième trou du programme par l'instruction :

```
3  n = sum(x == 1)
```

  Détaillons brièvement :
  - l'instruction `x == 1` est un test d'égalité effectué terme à terme.
    Plus précisément, cette commande permet le calcul de la matrice ligne de taille 100 correspondant à :
    $$[x_1 == 1, \dots, x_{100} == 1]$$
    *(on teste si chaque élément de la matrice* `x` *vaut* 1*)*
    Le résultat obtenu est une matrice ligne de booléens.
  - la commande `sum` permet de sommer tous les éléments de la matrice ligne de booléens précédents. Lors de cette somme, les booléens `True` sont convertis en l'entier 1 et les booléens `False` sont convertis en l'entier 0. Ainsi, `sum(x == 1)` permet de compter le nombre de coefficients qui sont égaux à 1 de la matrice `x`.

**Commentaire**

- Un tel niveau d'explication n'est pas attendu aux concours : l'écriture des lignes manquantes démontre la compréhension de toutes les commandes en question.
  On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
- La ligne 3 est une manière de procéder spécifique à **Scilab**.
  On tire notamment profit de tous les outils prédéfinis du langage permettant la manipulation simple et efficace (en temps de calcul) de matrices, qui, rappelons-le, est l'objet de base de ce langage.
- Cependant, on pouvait opter pour une version plus générale, pouvant s'adapter plus facilement aux autres langages. Pour ce faire, on remplace la ligne 3 par les instructions suivantes :

```
3  n = 0
4  for i = 1:100
5      if x(i) == 1 then
6          n = n+1
7      end
8  end
```

  Ces instructions permettent, à l'aide d'une structure itérative (boucle `for`) de tester un à un les éléments de `x`. Si le coefficient testé vaut 1, on incrémente un compteur `n` initialisé à 0. Ainsi, on compte le nombre d'éléments de `x` qui sont égaux à 1.
  Cette version, bien que moins idiomatique, est évidemment acceptée aux concours.

□

*b)* Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$.
En quoi est-ce normal ?

*Démonstration.*

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $Y_n$ la v.a.r. définie par :

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = 1 \\ 0 & \text{si } X_n \neq 1 \end{cases}$$

La v.a.r. $Y_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

- On remarque alors :
  - pour $n = 1$, $p_0 = 0$,
  - pour $n \geqslant 2$, $p_n \simeq \frac{1}{4}$. En effet :

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 & = & \frac{3}{4}\,\frac{1}{3^2} & = & \frac{1}{12} & \simeq & \frac{1}{10} & = & 0,1 \\ \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^3 & = & \frac{3}{4}\,\frac{-1}{3^3} & = & -\frac{1}{36} & \simeq & -\frac{3}{100} & = & -0,03 \\ \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^4 & = & \frac{3}{4}\,\frac{1}{3^4} & = & -\frac{1}{108} & \simeq & \frac{1}{100} & = & 0,01 \end{array}$$

  et pour $n \geqslant 5$, $\left|\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right| = \frac{1}{4\ 3^{n-1}} < 0,01$.

Ainsi, pour $n \geqslant 2$, on peut considérer que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$ et que $(Y_2, \ldots, Y_{100})$ est un 99-échantillon d'une v.a.r. $Y$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.

- La matrice obtenue par l'instruction `x == 1` est une simulation informatique de cet échantillon. Autrement dit, cette matrice s'écrit $[y_2, \ldots, y_{100}]$ où, pour tout $i \in [\![2, 100]\!]$, $y_i \in Y_i(\Omega)$.

En vertu de la loi (faible) des grands nombres :

$$\frac{1}{99}\sum_{k=2}^{100} y_k \simeq \mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{1}{4} \quad \text{et ainsi} \quad \sum_{k=2}^{100} y_k \simeq \frac{99}{4} \simeq 25$$

- On conclut en remarquant que $\sum_{k=1}^{100} y_k = \sum_{k=2}^{100} y_k$ car $y_1 = 0$ ($Y_1$ est constante égale à 0).

$\boxed{\text{Il est donc normal que le mobile revienne environ 25 fois en position 1.}}$

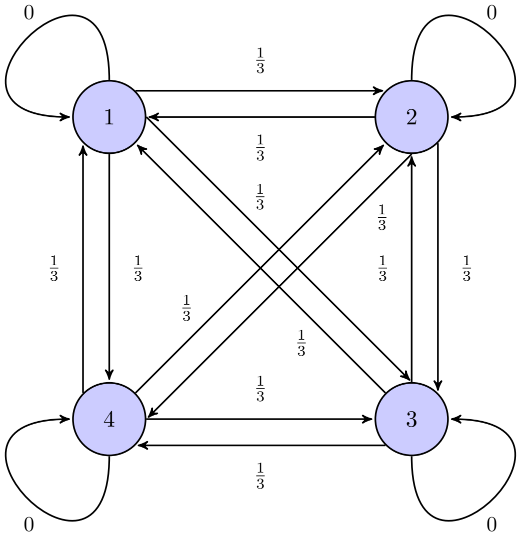
**Commentaire**

- Nous avons essayé ici de formaliser la réponse à cette question. Cependant, la formulation de la question (« En quoi est-ce normal ? ») laisse penser qu'une démonstration moins formelle serait acceptée.
- L'idée est alors de dire qu'à chaque étape (hormis la 1$^{\text{ère}}$), le mobile a environ 1 chance sur 4 de se retrouver en position 1. Donc en 99 étapes, il est passé par la position 1 environ $99 \times \frac{1}{4} \simeq 25$ fois.

□

**Commentaire**

- Le problème traite de l'évolution d'une grandeur aléatoire qui varie dans le temps discret. Plus précisément, il s'agit ici de la position du mobile (notée $X_n$ à l'instant $n$) sur les sommets d'un carré. Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (*i.e.* la valeur de $X_{n+1}$, position du mobile à l'instant $n+1$) ne dépend du passé (position du mobile aux instants précédents) que par le présent (*i.e.* la valeur de $X_n$, position du mobile à l'instant $n$). On dit alors que $(X_n)$ est une **chaîne de Markov**.
- L'évolution de la position de l'instant $n$ à l'instant $n+1$ peut être représenté par le schéma suivant.




- On obtient un graphe possédant un nombre d'états fini (en l'occurrence 4).
  On dit que $(X_n)$ est une chaîne de Markov **à espace d'états fini**.
- L'étiquette d'un arc est la probabilité pour le mobile de passer de la position de départ à la position d'arrivée de l'instant $n$ à l'instant $n+1$. Autrement dit, l'étiquette d'un arc menant de la position $i$ à la position $j$ a pour valeur : $\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j])$.
  Ces étiquettes ne dépendent pas de $n$.
  On dit que la chaîne de Markov est **homogène**.
- Le contenu de ce schéma peut être résumé par la matrice $A$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\ A_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j])$$

  Cette matrice est appelée **matrice de transition**. Ici :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

  On reconnaît la matrice $A$ de l'énoncé.
- Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme (le terme « chaîne de Markov » est seulement présent dans la partie informatique). Cependant, il arrive fréquemment qu'un sujet propose l'étude d'une chaîne de Markov. Le problème était, de ce point de vue, très classique.