EDHEC 2017

Exercice 1

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,(x-y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.$.

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

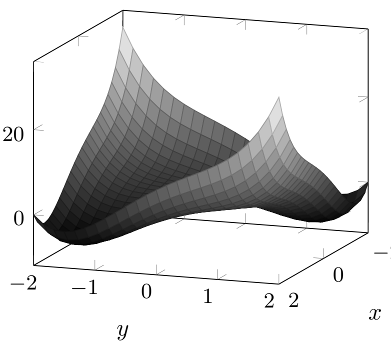
4. ***a)*** Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

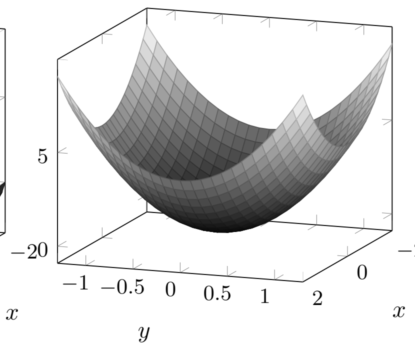
5. ***a)*** Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```
1  function z = f(x,y)
2      z = ---
3  endfunction
4  x = linspace(-2,2,101)
5  y = x
6  fplotd3d(x,y,f)
```

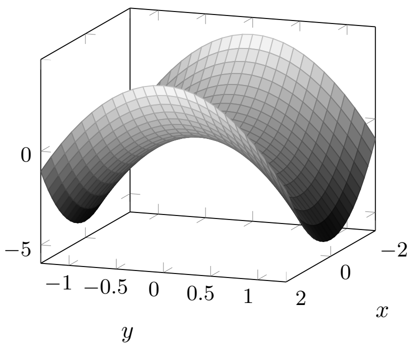
b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) \, dt$$

1. ***a)*** Montrer que φ est linéaire.

b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.

c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

2. ***a)*** Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
A = [---]
disp(---)
```

4. ***a)*** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n+2)$.

b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.

c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 3

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) En déduire que W est une variable à densité.

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.
  On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. ***a)*** Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3. ***a)*** Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt$$

c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

4. ***a)*** Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u}\ du$$

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

5. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction **Scilab** suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n.

```
function Z = f(n)
    x = grand(1,n,'exp',1)
    Z = ---
endfunction
```

b) Voici deux scripts :

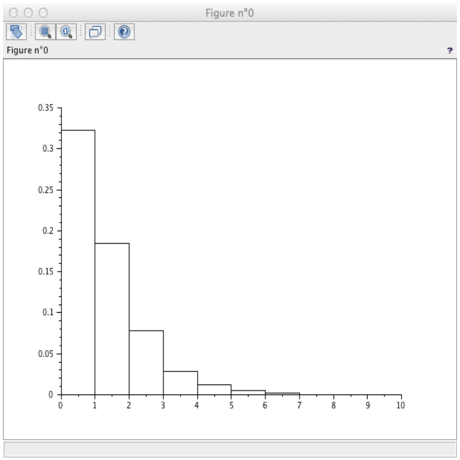
```
V = grand(1,10000,'exp',1)
W = -log(V)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

Script (1)

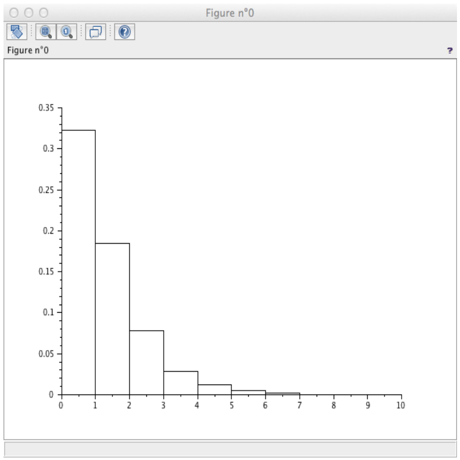
```
n = input('entrez la valeur de n : ')
Z = [] // la matrice-ligne Z est vide
for k = 1 :10000
    Z = [Z,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, ..., $]9,10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par W), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Z_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r. (Z_n) ?

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.

d) Démontrer le résultat conjecturé à la question ***5.b)***.

Problème

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1.
On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}([X_2 = 4]) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3. ***a)*** Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\right)$$

b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{3}$$

d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. ***a)*** En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{3}\ \left(\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\right)$$

b) En déduire une relation entre $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$ et $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}([X_n = 3]) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 4]) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}([X_n = 4]) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 3]) = \mathbb{P}([X_n = 4]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) & \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$$

7. a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A$$

b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0\ A^n$.

c) En déduire la première ligne de A^n.

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10. a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Partie 4 : informatique

11. a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements (on pourra utiliser la commande `sum`).

```
A = [---] / 3
x = grand(100,'markov',A,1)
n = ---
disp(x)
disp(n)
```

b) Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$.
En quoi est-ce normal ?