ECRICOME 2017

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice a définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.

Démonstration.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^3 = (A-I)(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A-I)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.

Démonstration.

- $(A-I)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ donc $P(X) = (X-1)^3$ est un polynôme annulateur de A.
  Or le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme annulateur.
  De plus, l'unique racine de P est 1.

  $$\boxed{\text{Donc : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.}$$

- Vérifions que 1 est bien une valeur propre de A.

  $$\mathrm{rg}(A-I) \quad = \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

  On remarque : $C_1 = -C_2$. Donc : $\mathrm{rg}(A-I) < 3$.
  Donc $A - I$ n'est pas inversible. Ainsi 1 est bien valeur propre de A.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \{1\} \subset \mathrm{Sp}(A).}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}(A) = \{1\}, \text{ c'est-à-dire que 1 est l'unique valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Ne pas conclure trop vite sur ce type de question !

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de la matrice A.
- Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !). Par exemple, comme $Q(X) = (X - 5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.
- On dit parfois que les racines d'un polynôme annulateur sont des valeurs propres **possibles** de A (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). Il faut alors démontrer qu'elles sont réellement des valeurs propres.
- Cette question s'effectue donc toujours en 2 parties.
  - Déterminer les valeurs propres possibles de A : ce sont les racines d'un polynôme annulateur (ici le polynôme P).
  - Vérifier que ces racines sont bien valeurs propres de A par un calcul de rang.

□

3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- Le réel 0 n'est pas valeur propre de A.

$$\boxed{\text{Donc } A \text{ est inversible.}}$$

- Montrons par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.
  Supposons que A est diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de A. Ainsi $D = I$ et :

$$A = PDP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Pour l'inversibilité, on pouvait aussi déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et vérifier que $\mathrm{rg}(A) < 3$, ce qui prouve que A n'est pas inversible.
- Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
  × montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,
  × montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.

□

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in \,]-1,1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

Démonstration.

- La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ car elle est la composée $\varphi = h \circ g$ où :
  - × $g : x \mapsto 1+x$ est :
    - – de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ car polynomiale sur cet intervalle,
    - – telle que $g(]-1,1[) \subset]0,+\infty[$ (pour tout $x \in \,]-1,1[$, $1+x > 0$).
  - × $h : y \mapsto \sqrt{y}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]-1,1[.}$$

- Soit $x \in \,]-1,1[$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad \text{et} \qquad \varphi''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \varphi'(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.}$$

□

5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$.
Comme $0 \in \,]-1,1[$, φ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 appliquée à φ en 0 :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après les calculs de la question précédente et en vérifiant que } \varphi(0) = 1 : \\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \;\text{ et }\; \alpha = -\frac{1}{8}.\end{array}}$$

□

6. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
(P(x))^2 & = & \left(1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2\right)^2 \\[2ex]
& = & 1 + \frac{1}{4}\,x^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 x^4 + \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}\,x + 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) x^2 + \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}\,x \times \left(-\frac{1}{8}\right) x^2 \\[2ex]
& = & 1 + x - \frac{1}{8}\,x^3 + \frac{1}{64}\,x^4
\end{array}$$

$$\boxed{(P(x))^2 = 1 + x - \frac{1}{8}\,x^3 + \frac{1}{64}\,x^4}$$

□

7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question ***1.***, vérifier que $\big(P(C)\big)^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\big(P(C)\big)^2 \quad = \quad I + C - \frac{1}{8}\,C^3 + \frac{1}{64}\,C^4$$

Or, d'après la question ***1.*** : $C^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Donc :

$$C^4 = C \times C^3 = C \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

D'où :

$$\big(P(C)\big)^2 = I + C = I + (A - I) = A.$$

$$\boxed{\big(P(C)\big)^2 = A}$$

- On en déduit que la matrice $M = P(C)$ vérifie : $M^2 = A$.
Déterminons donc la matrice $P(C)$, où $C = A - I$.

$$\begin{aligned} P(C) \quad &= \quad I + \frac{1}{2}\,C - \frac{1}{8}\,C^2 \\ &= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ vérifie : } M^2 = A.}$$

□

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.
Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\left\{ \begin{array}{l} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{array} \right.$

a) Calculer les vecteurs v et u.

Démonstration.

- Déterminons le vecteur v.
On note :

$$V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \quad \text{et} \quad W = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après l'énoncé : $v = f(w) - w$.
Or A est la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$.
En passant à l'écriture matricielle, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(w) - w) \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(w)) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \\ & = & AW - W \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $v = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) - 3 \cdot (0,0,1)$.

$$\boxed{v = (1, 1, -3)}$$

- Déterminons le vecteur u.
  D'après l'énoncé : $u = f(v) - v$.
  En passant à l'écriture matricielle comme précédemment, et en notant $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v) - v) \\ & = & AV - V \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u = -6 \cdot (1,0,0) - 6 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$.

$$\boxed{u = (-6, -6, 0)}$$

Commentaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. On utilise dans cette question les 2 propriétés suivantes.

- Pour tout $(u, v) \in E^2$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u + v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(v)$$

- Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et tout $u \in E$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u)$$

□

b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille (u, v, w) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons que :
  $$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$$
  On obtient alors les équivalences suivantes :
  $$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & -3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
  $$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & -3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
  $$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & -3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
  $$\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
  (par remontées successives)
  $$\boxed{\text{Donc la famille } (u, v, w) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$
- On obtient alors :
  × la famille (u, v, w) est une famille libre,
  × $\text{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
  $$\boxed{\text{Donc } \mathscr{B}' = (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration.
Pour déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, il faut exprimer les vecteurs $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ dans la base (u, v, w).

- $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u)) = AU = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = U$. Donc $f(u) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v)) = AV = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = U + V$. Donc $f(v) = 1 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(w)) = AW = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V + W$. Donc $f(w) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 1 \cdot w$.

  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

$$\boxed{\text{La matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathscr{B}' \text{ est } T.}$$

□

d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

Démonstration.
Les matrices A et T sont deux matrices représentatives du même endomorphisme f.
Elles sont donc semblables.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe une matrice } P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ inversible telle que } T = P^{-1}AP.}$$

□

9. Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire que N est de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

où a, b et c sont trois réels.

Démonstration.

- Supposons : $N^2 = T$. Alors :

$$NT = N \times N^2 = N^3 = N^2 \times N = TN$$

$$\boxed{\text{Donc, si } N^2 = T, \text{ alors } NT = TN.}$$

- Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9$ tels que $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
NT = TN \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & a+d \\ a+b & = & b+e \\ b+c & = & c+f \\ d & = & d+g \\ d+e & = & e+h \\ e+f & = & f+i \\ g & = & g \\ g+h & = & h \\ h+i & = & i \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} d = 0 \\ a = e \\ b = f \\ g = 0 \\ d = h \\ e = i \\ g = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$NT = TN \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc, la matrice } N \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.}$$

□

b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement 2 solutions N_1 et N_2.

Démonstration.

Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. On obtient donc :

$$N^2 = T \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & 0 \end{array} \right.$$

La première équation admet deux solutions (1 et -1). On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} N^2 = T & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & 0 \end{array} \right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & \dfrac{1}{2} \\ c & = & -\dfrac{1}{8} \end{array} \right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & -\dfrac{1}{2} \\ c & = & \dfrac{1}{8} \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & N = \dfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = N_1 \quad \texttt{OU} \quad N = -\dfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = N_2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'équation } N^2 = T \text{ admet exactement 2 solutions } N_1 \text{ et } N_2.}$$

□

10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

Démonstration.

- Montrons que l'équation $M^2 = A$ est équivalente à l'équation $N^2 = T$.

$$\begin{array}{rcll} M^2 = A & \Leftrightarrow & P^{-1}M^2 = P^{-1}A & \textit{(multiplication à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}M^2P = P^{-1}AP & \textit{(multiplication à droite par } P\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}M^2P = T & \textit{(car } P^{-1}AP = T \textit{ d'après } \textbf{\textit{8.b)}}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MPP^{-1}MP = T & \\ & \Leftrightarrow & (P^{-1}MP)^2 = T & \\ & \Leftrightarrow & N^2 = T & \textit{(car } N = P^{-1}MP\textit{)} \end{array}$$

- Or, d'après la question précédente, l'équation $N^2 = T$ admet exactement 2 solutions N_1 et N_2.

Donc l'équation $M^2 = A$ admet exactement 2 solutions :
$M_1 = PN_1P^{-1}$ et $M_2 = PN_2P^{-1}$.

□

11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

Démonstration.
On remarque que $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \neq A$. Donc $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \notin E$.

Ainsi, E n'est pas un espace vectoriel.

Commentaire

- Remarquons bien ici la tournure de la question : on ne demande pas
« Montrer que cet ensemble est un espace vectoriel », mais
« Cet ensemble est-il un espace vectoriel ? ».
L'attitude à adopter ici n'est donc pas d'essayer de montrer que cet ensemble est un espace vectoriel mais plutôt de montrer que **ce n'en est pas un**.
- Pour montrer qu'un ensemble F n'est pas un espace vectoriel, il faut trouver un contre-exemple à la définition d'espace vectoriel. Pour cela, on pourra, dans cet ordre :
  - × tester si $0 \in F$. Si ce n'est pas le cas, alors F n'est pas un espace vectoriel.
  - × trouver un vecteur $u \in F$, tel que $-u \notin F$ (ou tout autre vecteur v de la forme $\lambda \cdot u$).
  - × trouver deux vecteurs $(u, v) \in F^2$, tels que $u + v \notin F$.

□

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \ln(x) - a x^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

Démonstration.

- Déterminons $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$.

  Tout d'abord, comme $a > 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{2a} = 0$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

  $$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty.}$$

- Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

  $$\varphi(x) = x^{2a}\left(\frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) = x^{2a}\left(\frac{1}{2a}\frac{2a\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) = x^{2a}\left(\frac{1}{2a}\frac{\ln(x^{2a})}{x^{2a}} - a\right)$$

  Tout d'abord, comme $a > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2a} = +\infty$.

  Donc, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^{2a})}{x^{2a}} = 0$.

  $$\boxed{\text{D'où, comme } -a < 0 : \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty.}$$

□

2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

  $$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} = \frac{1}{x} - 2a^2\frac{x^{2a}}{x} = \frac{1 - 2a^2x^{2a}}{x}$$

- On a : $x > 0$. Donc :

  $$\begin{aligned} \varphi'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 2a^2x^{2a} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geqslant 2a^2x^{2a} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a^2} \geqslant x^{2a} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} \geqslant x \qquad \textit{(car, comme } a > 0,\ x \mapsto x^{\frac{1}{2a}} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \end{aligned}$$

- On note $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		x_0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

Commentaire

On rappelle que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha > 0$.
Ici, $a > 0$, donc : $\dfrac{1}{2a} > 0$. D'où la stricte croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{2a}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\square$

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Démonstration.

- Déterminons le signe de $\varphi(x_0)$ lorsque $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(x_0) & = & \ln(x_0) - a\ {x_0}^{2a} \\
& = & \ln\left(\left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right) - a\ \left(\left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right)^{2a} \\
& = & -\dfrac{1}{2a}\ \ln(2a^2) - a\ \dfrac{1}{2a^2} \\
& = & -\dfrac{1}{2a}\ \ln(2a^2) - \dfrac{1}{2a} \\
& = & -\dfrac{1}{2a}\ (\ln(2a^2) + 1)
\end{array}$$

Or : $0 < a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$. Donc : $a^2 < \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$. D'où : $2a^2 < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Ainsi : $\ln(2a^2) < \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\ln(\mathrm{e}) = -1$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Donc : $\ln(2a^2) + 1 < 0$.
Comme $-\dfrac{1}{2a} < 0$, on en déduit : $-\dfrac{1}{2a}(\ln(2a^2) + 1) > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \varphi(x_0) > 0.}$$

– Étude sur $]0, x_0]$. La fonction φ est :
  × continue sur $]0, x_0]$,
  × strictement croissante $]0, x_0]$.

  Ainsi φ réalise une bijection de $]0, x_0]$ dans $\varphi(]0, x_0])$.

$$\varphi(]0, x_0]) = \left] \lim_{x \to 0} \varphi(x), \varphi(x_0) \right] =]-\infty, \varphi(x_0)]$$

  Or : $0 \in]-\infty, \varphi(x_0)]$, car $\varphi(x_0) > 0$.

  Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]0, x_0]$ que l'on notera z_1.

– Étude sur $]x_0, +\infty[$. La fonction φ est :
  × continue sur $]x_0, +\infty[$,
  × strictement décroissante sur $]x_0, +\infty[$.

  Ainsi φ réalise une bijection de $]x_0, +\infty[$ dans $\varphi(]x_0, +\infty[)$.

$$\varphi(]x_0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to +\infty} \varphi(x), \varphi(x_0) \right[=]-\infty, \varphi(x_0)[$$

  Or : $0 \in]-\infty, \varphi(x_0)[$, car $\varphi(x_0) > 0$.

  Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]x_0, +\infty[$ que l'on notera z_2.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2 vérifiant $0 < z_1 < x_0 < z_2$.

- Si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, alors : $\varphi(x_0) = 0$.

  Or, d'après l'étude effectuée en question précédente, pour tout $x \in]0, x_0[\cup]x_0, +\infty[$:

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) = 0$$

  Ainsi, si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution : x_0.

- Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, alors $\varphi(x_0) < 0$.

  Or, d'après l'étude effectuée en question précédente, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) < 0$$

  Ainsi, si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction φ doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- Pour le cas « $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ », on ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels φ est strictement monotone (ici $]0, x_0]$ et $]x_0, +\infty[$).

□

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Démonstration.

- La fonction $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car est la composée $\psi_1 \circ g_1$ où :
  - × $g_1 : (x,y) \mapsto x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiale sur U,
    - telle que $g_1(U) \subset \mathbb{R}_+^*$.
  - × $\psi_1 : z \mapsto \ln(z)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- De même la fonction $(x,y) \mapsto \ln(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
- La fonction $(x,y) \mapsto (xy)^a$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est la composée $\psi_2 \circ g_2$ où :
  - × $g_2 : (x,y) \mapsto xy$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiale sur U,
    - telle que $g_2(U) \subset \mathbb{R}_+^*$.
  - × $\psi_2 : z \mapsto z^a$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur U comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Commentaire

Attention à ne pas confondre les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $(x,y) \mapsto \ln(x)$!
La première est fonction d'une variable réelle :

$$\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

La seconde est une fonction de **deux** variables réelles :

$$\begin{array}{ccccc}]0,+\infty[& \times &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x & , & y) & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

□

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U donc, en particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
  Elle admet donc des dérivées partielles premières en tout point de U.
- Soit $(x,y) \in U$.

$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{\ln(y)}{x} - a x^{a-1} y^a = \frac{\ln(y) - a(xy)^a}{x}$$

(en utilisant l'écriture : $f(x,y) = \ln(y)\ \ln(x) - y^a\ x^a$)

$$\partial_2(f)(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} - a y^{a-1} x^a = \frac{\ln(x) - a(xy)^a}{y}$$

(en utilisant l'écriture : $f(x,y) = \ln(x)\ \ln(y) - x^a\ y^a$)

Pour tout $(x,y) \in U$, $\partial_1(f)(x,y) = \dfrac{\ln(y) - a(xy)^a}{x}$ et $\partial_2(f)(x,y) = \dfrac{\ln(x) - a(xy)^a}{y}$.

□

6. Démontrer que pour tout $(x,y) \in U$:

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $(x,y) \in U$.

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \ \Leftrightarrow \ \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{array}{cl} & (x,y) \text{ est un point critique de } f \\[2mm] \Longleftrightarrow & \begin{cases} \dfrac{\ln(y) - a(xy)^a}{x} & = & 0 \\ \dfrac{\ln(x) - a(xy)^a}{y} & = & 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(y) - a(xy)^a & = & 0 \\ \ln(x) - a(xy)^a & = & 0 \end{cases} \qquad \textit{(car } x \neq 0 \textit{ et } y \neq 0\textit{)} \\[2mm] \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) & = & 0 \\ \ln(x) - a(xy)^a & = & 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(x) = \ln(y) \\ \ln(x) - a(xy)^a = 0 \end{cases} \\[2mm] \Longleftrightarrow & \begin{cases} x = y \\ \ln(x) - a(xy)^a = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ \ln(x) - a(xx)^a = 0 \end{cases} \\[2mm] \Longleftrightarrow & \begin{cases} x = y \\ \ln(x) - ax^{2a} = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\boxed{(x,y) \text{ est un point critique de } f \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}.}$$

□

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

Démonstration.

- On suppose : $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

  D'après ***3.***, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$: z_1 et z_2.
  En reprenant la suite d'équivalences précédente, on obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \text{ est un point critique de } f & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & = & y \\ \varphi(x) & = & 0 \end{cases} \\[2mm] & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & = & y \\ x & = & z_1 \end{cases} \quad \texttt{OU} \quad \begin{cases} x & = & y \\ x & = & z_2 \end{cases} \\[2mm] & \Leftrightarrow & \begin{cases} y & = & z_1 \\ x & = & z_1 \end{cases} \quad \texttt{OU} \quad \begin{cases} y & = & z_2 \\ x & = & z_2 \end{cases} \\[2mm] & \Leftrightarrow & (x,y) \in \{(z_1, z_1), (z_2, z_2)\} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}},\ f \text{ admet exactement deux points critiques : } (z_1, z_1) \text{ et } (z_2, z_2).}$$

- On suppose : $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

  D'après la question ***3.***, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]0, +\infty[$: x_0.
  En reprenant la suite d'équivalences de la question précédente, on a donc :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ \varphi(x) & = & 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ x & = & x_0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x_0 \\ x & = & x_0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; (x,y) \in \{(x_0, x_0)\}$$

$$\boxed{\text{Si } a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}},\ f \text{ admet exactement un point critique : } (x_0, x_0).}$$

- On suppose : $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

  D'après la question ***3.***, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{Si } a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}},\ f \text{ n'admet aucun point critique.}}$$

□

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U d'après la question ***4***.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2.
- Soit $(x,y) \in U$.

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \ln(y)\ \frac{-1}{x^2} - ay^a\ (a-1)x^{a-2} = -\frac{\ln(y) + a(a-1)(xy)^a}{x^2}$$

(en utilisant l'écriture : $\partial_1(f)(x,y) = \ln(y)\ \dfrac{1}{x} - ay^a\ x^{a-1}$)

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \ln(x)\ \frac{-1}{y^2} - ax^a\ (a-1)y^{a-2} = -\frac{\ln(x) + a(a-1)(xy)^a}{y^2}$$

(en utilisant l'écriture : $\partial_2(f)(x,y) = \ln(x)\ \dfrac{1}{y} - ax^a\ y^{a-1}$)

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \frac{1}{y}\ \frac{1}{x} - ay^{a-1}\ ax^{a-1} = \frac{1 - a^2(xy)^a}{xy} = \partial^2_{2,1}(f)(x,y)$$

(en utilisant l'écriture : $\partial_2(f)(x,y) = \dfrac{1}{y}\ \ln(x) - ay^{a-1}\ x^a$)

La dernière égalité est obtenue d'après le théorème de Schwarz, car f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U.

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x,y) \in U,\ \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -\dfrac{\ln(y) + a(a-1)(xy)^a}{x^2},\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -\dfrac{\ln(x) + a(a-1)(xy)^a}{y^2}, \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial_{2,1}((f))(x,y) = \dfrac{1 - a^2(xy)^a}{xy} \end{array}}$$

□

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1).
Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -\frac{\ln(z_1) + a(a-1)(z_1 z_1)^a}{z_1^2} = -\frac{\ln(z_1) + a(a-1){z_1}^{2a}}{z_1^2}$$

Or, par définition de z_1 : $\varphi(z_1) = 0$. Donc : $\ln(z_1) = a{z_1}^{2a}$. D'où :

$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -\frac{\cancel{a{z_1}^{2a}} + a^2{z_1}^{2a} - \cancel{a{z_1}^{2a}}}{z_1^2} = -a^2{z_1}^{2a-2}$$

- Avec exactement le même calcul, on obtient : $\partial^2_{2,2}(f) = -a^2{z_1}^{2a-2}$.
- Toujours d'après la question précédente :

$$\partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) = \frac{1 - a^2(z_1 z_1)^a}{z_1 z_1} = \frac{1 - a^2{z_1}^{2a}}{z_1^2} = \frac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2}$$

- Par définition de la matrice hessienne :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) & \partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) \\ \partial^2_{2,1}(f)(z_1, z_1) & \partial^2_{2,2}(f)(z_1, z_1) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.}$$

□

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

Démonstration.

- On calcule :

$$MX_1 = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot X_1$$

où $\lambda_1 = \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}$.

$$\boxed{\text{Comme } MX_1 = \lambda_1 \cdot X_1 \text{ avec } X_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}, \text{ alors } \lambda_1 = \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \text{ est valeur propre de } M.}$$

- De même :

$$MX_2 = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} \\ -\frac{1}{z_1^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot X_2$$

où $\lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2}$.

$$\boxed{\text{Comme } MX_2 = \lambda_2 \cdot X_2 \text{ avec } X_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}, \text{ alors } \lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2} \text{ est valeur propre de } M.}$$

- Démontrons que M n'admet pas d'autre valeur propre.
Pour ce faire, raisonnons par l'absurde.
On suppose que M admet une valeur propre λ_3 différente de λ_1 et différente de λ_2.
Il existe alors un vecteur propre $X_3 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ associé à λ_3.

La famille (X_1, X_2, X_3) est alors une famille libre de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet :
  × la famille (X_1, X_2) est une famille libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de λ_3.
  × la famille (X_3) est une famille libre (car constituée d'un vecteur non nul) de vecteurs propres associé à la valeur propre λ_3.

Ainsi, la famille (X_1, X_2, X_3) obtenue par concaténation de ces deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre.
On a donc exhibé une famille libre telle que :

$$\text{Card}\big((X_1, X_2, X_3)\big) = 3 \ > \ 2 = \dim\big(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big)$$

Absurde !

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut que } M \text{ admet pour uniques valeurs propres :} \\ \lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}.\end{array}}$$

Commentaire

- Le sujet demande ici **les** valeurs propres de M. Il faut donc toutes les préciser.
La matrice M étant une matrice carrée d'ordre 2, elle admet donc au plus deux valeurs propres distinctes. Si on parvient à démontrer : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors on a bien obtenu toutes les valeurs propres de M. On peut donc, pour conclure cette question, démontrer : $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Pour ce faire, on peut procéder par équivalence :

$$\lambda_1 = \lambda_2 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2} = -\frac{1}{z_1^2} \ \Leftrightarrow\ 1 - 2a^2 {z_1}^{2a} = -1 \ \Leftrightarrow\ \big(a {z_1}^a\big)^2 = 1^2 \ \Leftrightarrow\ a {z_1}^a = 1$$

(on ne détaille pas ici tous les arguments)
Et comme : ${z_1}^a < {x_0}^a = \sqrt{\frac{1}{2a^2}} \ < \ \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$ alors ${z_1}^a \neq \frac{1}{a}$. D'où $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- On a opté pour une démonstration différente en procédant par l'absurde. L'intérêt de cette démonstration est qu'elle ne dépend pas directement de la valeur de z_1 mais simplement des vecteurs propres X_1 et X_2. C'est en réalité un résultat très général : si une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une base de vecteurs propres $(X_1, \ldots, X_n)$ associés à des valeurs propres (pas forcément distinctes) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors M n'admet pas d'autre valeur propre.
On adopte un point de vue différent du précédent point de la remarque : on ne démontre pas que λ_1 et λ_2 sont distinctes mais simplement qu'il ne peut exister d'autre valeur propre. □

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Démonstration.
Pour étudier la présence d'un extremum en (z_1, z_1), il faut étudier le signe des valeurs propres de la matrice $\nabla^2(f)(z_1, z_1)$ (ces valeurs propres ont été déterminées à la question précédente).

- Tout d'abord : $\lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2} < 0$.
- Montrons ensuite : $\lambda_1 = \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2} > 0$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 > 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{z_1^2} > 2a^2 {z_1}^{2a-2} & \\ & \Leftrightarrow & 1 > 2a^2 {z_1}^{2a} & \textit{(par multiplication par } z_1^2 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2a^2} > {z_1}^{2a} & \textit{(car } 2a^2 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} > z_1 & \\ & \Leftrightarrow & x_0 > z_1 & \end{array}$$

La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi. Ainsi : $\lambda_1 > 0$.

> La matrice $\nabla^2(f)(z_1, z_1)$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés.
> On en conclut que la fonction f ne présente pas d'extremum local en (z_1, z_1).

Commentaire

- On peut ici préciser la nature de ce point critique : les valeurs propres de la hessienne étant non nulles et de signes opposés, la fonction f admet un point selle en (z_1, z_1).
- Comme : $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, on retrouve : $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\square$

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Démonstration.

- Comme $\varphi(z_2) = 0$, on démontre comme en question ***9.*** que la matrice hessienne au point (z_2, z_2) peut s'écrire sous la forme :

$$N = \nabla^2(f)(z_2, z_2) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_2}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_2^2} - a^2 {z_2}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_2^2} - a^2 {z_2}^{2a-2} & -a^2 {z_2}^{2a-2} \end{pmatrix}$$

En menant les mêmes calculs matriciels qu'en question ***10.*** (z_1 et z_2 jouent des rôles symétriques), on démontre alors : $MX_1 = \left(\dfrac{1}{{z_2}^2} - 2a^2 {z_2}^{2a-2}\right) \cdot X_1$ et $MX_2 = -\dfrac{1}{{z_2}^2} \cdot X_2$.

> Ainsi, $\lambda_1 = \dfrac{1}{{z_2}^2} - 2a^2 {z_2}^{2a-2}$ et $\lambda_2 = -\dfrac{1}{{z_2}^2}$ sont valeurs propres de N.

- De plus, en utilisant une nouvelle fois la démonstration de la question ***10.***, la matrice N n'admet pas d'autre valeur propre.

- Il reste alors à déterminer le signe de ces valeurs propres pour pouvoir conclure quant à la nature du point critique (z_2, z_2).
  - Tout d'abord : $\lambda_2 = -\dfrac{1}{{z_2}^2} < 0$.
  - Montrons ensuite : $\lambda_1 < 0$. Pour ce faire, on raisonne par équivalence.

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 < 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{{z_2}^2} - 2a^2 {z_2}^{2a-2} < 0 & \\ & \Leftrightarrow & 1 < 2a^2 {z_2}^{2a} & \textit{(car } z_2 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} < z_2 & \\ & \Leftrightarrow & x_0 < z_2 & \end{array}$$

La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi. Ainsi : $\lambda_1 < 0$.

La matrice $\nabla^2(f)(z_2, z_2)$ admet donc deux valeurs propres strictement négatives.
On en conclut que la fonction f présente donc un maximum local en (z_2, z_2). □

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

Démonstration.

- Déterminons $X_k(\Omega)$:
  L'urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire parmi celles-ci avec remise.
  Donc X_k peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n.

$$\boxed{X_k(\Omega) = [\![1, n]\!]}$$

- Le tirage parmi les n boules est équiprobable, ainsi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{n}$$

On reconnaît la loi uniforme sur discrète sur $[\![1, n]\!]$: $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Ainsi, X_k admet une espérance et $\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{n+1}{2}$.

Commentaire

- On pouvait directement décrire l'expérience et conclure quant à la loi de X_k :
  lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, on effectue une expérience à n **issues équiprobables**, numérotées de 1 à n. Donc $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
- Lorsqu'on demande de déterminer la loi d'une v.a.r. X, on procède toujours de la manière suivante :

  × si X est une v.a.r. discrète,

  1) on détermine $X(\Omega)$,

  2) on détermine les probabilités $\mathbb{P}([X = k])$ pour $k \in X(\Omega)$.

  × si X est une v.a.r. à densité,

  1) on détermine $X(\Omega)$,

  2) on détermine la fonction de répartition de X, $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x])$ pour $x \in \mathbb{R}$.

□

2. a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

Démonstration.
L'expérience consiste en une infinité de tirages avec remise.
Donc l'univers Ω est ici l'ensemble des ∞-tirages constitués d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement $[T_n = i]$ est réalisé si et seulement si la somme des boules dépasse n au $i^{\text{ème}}$ tirage mais pas au $(i-1)^{\text{ème}}$ tirage.
En particulier :

× l'événement $[T_n = 1]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (n, 1, 1, 1, \ldots)$.

× l'événement $[T_n = 2]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (1, n, 1, 1, 1, \ldots)$.

× $\cdots$

× l'événement $[T_n = n]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1 \text{ fois}}, n, 1, 1, 1, \ldots)$.

Plus généralement, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement $[T_n = i]$ est réalisé par l'∞-tirage qui comporte que des 1 sauf en position i où l'on trouve n(ce qui correspond à l'obtention de la boule n lors du $i^{\text{ème}}$ tirage).

$$\boxed{\text{Donc } T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.}$$

Commentaire

- Pour chaque événement, nous avons donné **un exemple** d'∞-tirage le réalisant.
  Bien évidemment, bien d'autres ∞-tirages étaient possibles. Par exemple :

  × l'événement $[T_n = 2]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (1, n-1, 1, 1, 1, \ldots)$.

  × l'événement $[T_n = 3]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (1, 1, n-2, 1, 1, 1, \ldots)$.

  × $\vdots$

  × l'événement $[T_n = n]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1 \text{ fois}}, 1, 1, 1, 1, \ldots)$.
- Comme l'énoncé demandait de déterminer $T_n(\Omega)$ mais ne fournissait pas sa valeur, on peut penser que la simple réponse « $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ » (sans justification) permettait d'obtenir une grande partie des points alloués à cette question.
  Évidemment, si la question s'exprime sous la forme « Montrer que $X(\Omega) = \cdots$ », il faut détailler la réponse.

□

b) Calculer $\mathbb{P}([T_n = 1])$.

Démonstration.
On remarque qu'on a l'égalité entre événements suivantes : $[T_n = 1] \ = \ [X_1 = n]$.
Comme la v.a.r. X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ (question ***1.***) :

$$\mathbb{P}([T_n = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = n]) = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_n = 1]) = \frac{1}{n}}$$

□

c) Montrer que :

$$\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

Démonstration.

- L'événement $[T_n = n]$ est réalisé si la somme des numéros des boules obtenues est supérieur à n pour la première fois lors du $n^{\text{ème}}$ tirage. Ceci ne se produit que si on a obtenu la boule 1 lors des $n-1$ premiers tirages (si ce n'est pas le cas, la somme dépasse n strictement avant le $n^{\text{ème}}$ tirage. En termes d'événements, cela signifie :

$$[T_n = n] \ = \ \bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n = n]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]\right) & \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = 1]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \\ & & & \textit{sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{n} & \textit{(car } X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])\textit{)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

Commentaire

- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.
  Il faut prendre le réflexe de raisonner sur les événements avant d'appliquer la fonction $\mathbb{P}$.
- La formule est présentée ici sous forme de produit. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une intersection.

□

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}, \ T_2(\Omega) = [\![1, 2]\!] = \{1, 2\}.}$$

D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([T_2 = 1]) = \dfrac{1}{2}$.
Comme $([T_2 = 1], [T_2 = 2])$ est un système complet d'événements, on obtient :

$$\mathbb{P}([T_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([T_2 = 1]) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])}$$

□

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}, \ T_3(\Omega) = [\![1, 3]\!].}$$

- D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([T_3 = 1]) = \dfrac{1}{3}$.
- D'après la question ***2.c)*** :

$$\mathbb{P}([T_3 = 3]) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

- Comme $([T_3 = 1], [T_3 = 2], [T_3 = 3])$ est un système complet d'événements, on obtient :

$$\mathbb{P}([T_3 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([T_3 = 1]) - \mathbb{P}([T_3 = 3]) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_3 = 1]) = \frac{1}{3}, \ \ \mathbb{P}([T_3 = 2]) = \frac{5}{9} \ \text{ et } \ \mathbb{P}([T_3 = 3]) = \frac{1}{9}}$$

- La v.a.r. T_3 est finie donc elle admet une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_3) &= \sum_{k=1}^{3} k \ \mathbb{P}\big([T_3 = k]\big) \\
&= 1 \times \mathbb{P}\big([T_3 = 1]\big) + 2 \times \mathbb{P}\big([T_3 = 2]\big) + 3 \times \mathbb{P}\big([T_3 = 3]\big) \\
&= \frac{1}{3} + 2 \ \frac{5}{9} + 3 \ \frac{1}{9} \ = \ \frac{3 + 10 + 3}{9} \\
&= \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien : } \mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}.}$$

□

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- À chaque tirage, le plus petit numéro de boule que l'on peut obtenir est 1. Ainsi, la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages vaut au minimum k.

  Donc S_k vaut au minimum k.
- À chaque tirage, le plus grand numéro de boule que l'on peut obtenir est n. Ainsi, la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages vaut au maximum nk.

  Donc S_k vaut au maximum nk.
- De plus S_k peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre k et nk.

$$\boxed{\text{On en conclut : } S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!].}$$

Commentaire

- Comme pour la question ***2.a)***, la valeur $S_k(\Omega)$ n'est pas donnée dans l'énoncé.
  Une brève justification suffit donc ici.
- Cependant, pour être parfaitement rigoureux, on peut déterminer $S_k(\Omega)$ en procédant par récurrence. Détaillons ce raisonnement.

  Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $S_k(\Omega) \subset [\![k, nk]\!]$.

  ▸ **Initialisation** :
  Tout d'abord : $S_1 = X_1$.
  Cela permet de conclure, d'après la question ***1.*** : $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* : $S_{k+1}(\Omega) = [\![k+1, n(k+1)]\!]$).

  – Par définition : $S_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{k+1} X_i = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\right) + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.

    Ainsi, pour tout ∞-tirage $\omega = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots)$:

$$\begin{array}{rcl} S_{k+1}(\omega) & = & S_k(\omega) + X_{k+1}(\omega) \\ & = & \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right) + a_{k+1} \end{array}$$

  – Par hypothèse de récurrence : $S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]$.
    Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ peut prendre toutes les valeurs de $[\![k, nk]\!]$.
    Par ailleurs, a_{k+1} est le résultat du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
    Ainsi, a_{k+1} peut prendre toutes les valeurs de $X_{k+1}(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

    On en déduit que $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right) + a_{k+1}$ peut prendre toutes les valeurs entières possibles entre $k+1$ et $nk + n = n\ (k+1)$. Et ainsi : $S_{k+1}(\Omega) = [\![k+1, n(k+1)]\!]$.

  D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

  On en conclut, par principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$.

□

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

Démonstration.
On remarque :

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$$

$$\boxed{S_{k+1} = S_k + X_{k+1}}$$

□

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]).$$

Démonstration.
Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$.

- La famille $([S_k = j])_{j \in [\![k, kn]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [S_{k+1} = i]) \\
&= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [S_k + X_{k+1} = i]) \\
&= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j]) \\
&= \sum_{\substack{j = k \\ i-j \in X_{k+1}(\Omega)}}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j]) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{j = k \\ i-j \notin X_{k+1}(\Omega)}}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j])} \quad \textit{(car } [X_{k+1} = i-j] = \varnothing\textit{)} \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j])
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} i-j \in [\![1, n]\!] \\ j \in [\![k, nk[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant i-j \leqslant n \\ k \leqslant j \leqslant nk \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-i \leqslant -j \leqslant n-i \\ k \leqslant j \leqslant nk \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i-n \leqslant j \leqslant i-1 \\ k \leqslant j \leqslant nk \end{array}\right.$$

  (on rappelle : $X_{k+1}(\Omega) = [\![1, n]\!]$)
  Or : $i - n \leqslant 0 \leqslant k$ et $i - 1 \leqslant n - 1 \leqslant nk$. On en déduit :

$$[\![k, nk]\!] \ \cap\ [\![i-n, i-1]\!] \ = \ [\![k, i-1]\!]$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) &= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j]) \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j])\ \mathbb{P}_{[S_k=j]}([X_{k+1} = i-j]) \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j])\ \frac{1}{n} \qquad \textit{(car } X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![k+1,n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)}$$

Commentaire

Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,c) \leqslant i \leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

□

7. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

Démonstration.

$$\boxed{\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1}}$$

Commentaire

La formule du triangle de Pascal peut se démontrer en revenant à la définition calculatoire des coefficients binomiaux. Détaillons cette démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $j > k$.

$$\begin{aligned}
\binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1} &= \frac{(j-1)!}{k!\ (j-1-k)!} + \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-\cancel{1}-(k-\cancel{1}))!} \\
&= \frac{(j-1)!}{k!\ (j-1-k)!} + \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-k)!} \\
&= \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{j-k}\right) \\
&= \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-k-1)!}\left(\frac{j-\cancel{k}+\cancel{k}}{k(j-k)}\right) = \frac{j!}{k!\ (j-k)!} = \binom{j}{k}
\end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi démontrer ce type de relations en revenant à la définition des coefficients binomiaux, à savoir : $\binom{j}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à j éléments. Illustrons cette méthode sur la formule du triangle de Pascal.

Considérons une pièce contenant j personnes. On s'intéresse au nombre de groupes différents de k personnes que l'on peut former à partir de ces j personnes.
Il y a $\binom{j}{k}$ tels groupes.
Pour former un tel groupe de k personnes, on remarque que :

- × soit ce groupe contient la personne numéro j. Il est donc composé de la personne numéro j et de $k-1$ personnes choisies parmi les $j-1$ personnes restantes.
  Il y a $\binom{j-1}{k-1}$ tels groupes.
- × soit ce groupe ne contient pas la personne numéro j. Il est donc composée de k personnes choisies parmi les $j-1$ personnes restantes.
  Il y a $\binom{j-1}{k}$ tels groupes.

Finalement on a bien : $\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1}$. □

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \geqslant k+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} &= \binom{k-1}{k-1} + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\
&= 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\
&= 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \left(\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k} \\
&= 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j=k}^{i-2} \binom{j}{k} \\
&= 1 + \left(\cancel{\sum_{j=k+1}^{i-2} \binom{j}{k}} + \binom{i-1}{k} \right) - \left(\binom{k}{k} + \cancel{\sum_{j=k+1}^{i-2} \binom{j}{k}} \right) \\
&= \binom{i-1}{k} && \left(\textit{car } \binom{k}{k} = 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \geqslant k+1,\ \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}}$$

□

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$« \forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} ».$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathcal{H}_k$, où $\mathcal{H}_k : \forall i \in [\![k, n]\!], \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$.

- **Initialisation** :
  Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_1 = i]) & = & \mathbb{P}([X_1 = i]) & \textit{(car } S_1 = X_1\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^1}\dbinom{i-1}{1-1} & \textit{(car } \dbinom{i-1}{0} = 1\textit{)} \end{array}$$

  D'où $\mathcal{H}_1$.

- **Hérédité** : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
  Supposons $\mathcal{H}_k$ et démontrons $\mathcal{H}_{k+1}$ (*i.e.* : $\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{(k+1)-1}$).
  Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]) & \textit{(question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=k}^{i-1} \dfrac{1}{n^k}\dbinom{i-1}{k-1} & \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{k+1}} \sum\limits_{j=k}^{i-1} \dbinom{i-1}{k-1} & \\ & = & \dfrac{1}{n^{k+1}} \dbinom{i-1}{k} & \textit{(question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{k+1}} \dbinom{i-1}{(k+1)-1} & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{H}_{k+1}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \forall i \in [\![k, n]\!], \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}}$$

Commentaire

La rédaction de cette récurrence est particulièrement difficile.
- La quantification en i est **dans** l'hypothèse de récurrence.
  Donc il ne faut pas oublier de l'introduire pour la démonstration de $\mathcal{H}_1$ (dans l'étape d'initialisation) et de $\mathcal{H}_{k+1}$ (dans l'étape d'hérédité).
- Il s'agit ici d'une récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ (et non sur $\mathbb{N}$).
  Pour qu'on puisse parler de $\mathcal{H}_k$, il faut que que $k \in [\![1, n]\!]$ et pour parler de $\mathcal{H}_{k+1}$ (ce qui est nécessaire dans l'étape d'hérédité), il faut que $k+1 \in [\![1, n]\!]$.
  Donc il faut, dans l'hérédité, que $k \in [\![1, n]\!] \cap [\![0, n-1]\!] = [\![1, n-1]\!]$.

□

8. a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

Démonstration.

- Si l'événement $[T_n > k]$ est réalisé, alors il a fallu strictement plus de k tirages pour que la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale, pour la première fois, à n. Il a donc fallu au moins $k+1$ tirages.
  Ainsi, la somme des numéros obtenus jusqu'au $k^{\text{ème}}$ tirage est strictement inférieure à n, c'est-à-dire inférieure ou égale à $n-1$. L'événement $[S_k \leqslant n-1]$ est donc réalisé.
  On en déduit : $[T_n > k] \ \subset \ [S_k \leqslant n-1]$.
- Si l'événement $[S_k \leqslant n-1]$ est réalisé, alors la somme des numéros obtenus jusqu'au $k^{\text{ème}}$ tirage est inférieure ou égale à $n-1$ donc strictement inférieure à n.
  Ainsi, la somme des numéros de boules dépasse n pour la première fois au plus tôt au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage. L'événement $[T_n \geqslant k+1]$ est donc réalisé.
  Or, comme T_n est une v.a.r. à valeurs entières : $[T_n \geqslant k+1] = [T_n > k]$.
  Donc $[T_n > k]$ est réalisé.
  On en déduit : $[S_k \leqslant n-1] \ \subset \ [T_n > k]$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ [T_n > k] = [S_k \leqslant n-1].}$$

□

b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}([T_n > k]) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([T_n > k]) & = & \mathbb{P}([S_k \leqslant n-1]) & \textit{(question \textbf{8.a)})} \\
& = & \sum\limits_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}([S_k = i]) & \textit{(car } S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=k}^{n-1} \dfrac{1}{n^k}\dbinom{i-1}{k-1} & \textit{(question \textbf{7.c)})} \\
& = & \dfrac{1}{n^k}\sum\limits_{i=k}^{n-1} \dbinom{i-1}{k-1} & \\
& = & \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k} & \textit{(question \textbf{7.b)})}
\end{array}$$

Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([T_n > 0]) & = & 1 & \textit{(car } T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n^0}\dbinom{n-1}{0} &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}}$$

Commentaire

La propriété de la question précédente (***8.a)***) a été démontrée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.

□

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- La v.a.r. T_n est finie. Elle admet donc une espérance.
- Tout d'abord, comme T_n est à valeurs entières :

$$[T_n > k-1] \ = \ [T_n \geqslant k] \ = \ [T_n > k] \cup [T_n = k]$$

Or les événements $[T_n > k]$ et $[T_n = k]$ sont incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}([T_n > k-1]) \ = \ \mathbb{P}([T_n > k]) + \mathbb{P}([T_n = k])$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([T_n = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \ \big(\mathbb{P}([T_n > k-1]) - \mathbb{P}([T_n > k])\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([T_n > k-1]) - \sum_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([T_n > k]) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \ \mathbb{P}([T_n > k]) - \sum_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([T_n > k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \ \mathbb{P}([T_n > k]) - \sum_{k=1}^{n-1} k \ \mathbb{P}([T_n > k]) - n \ \mathbb{P}([T_n > n])
\end{aligned}$$

Comme $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ alors $[T_n > n] = \varnothing$. Ainsi : $\mathbb{P}([T_n > n]) = 0$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \ \mathbb{P}([T_n > k]) - \sum_{k=1}^{n-1} k \ \mathbb{P}([T_n > k]) \\
&= \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} \big((\cancel{k}+1) - \cancel{k}\big) \ \mathbb{P}([T_n > k]) \\
&= \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k]) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])}$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}(T_n)$ avec le résultat de la question ***8.b)***.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k]) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{(n-1)-k} \ = \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

Commentaire

- L'égalité $[T_n > k-1] = [T_n > k] \cup [T_n = k]$ peut sembler « sortie du chapeau » mais elle est relativement classique dès qu'on étudie une v.a.r. à valeurs entières.
  Il en est de même de la formule :
  $$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$$
  qu'il convient de savoir démontrer.
- Pour démontrer cette dernière formule, on peut aussi utiliser l'égalité entre événements suivante :
  $$[T_n > k] = \bigcup_{i=k+1}^{n} [T_n = i]$$
  Cette égalité est plus naturelle mais entraîne une démonstration plus complexe faisant intervenir des sommes doubles. Détaillons celle-ci.
  En appliquant $\mathbb{P}$ de part et d'autre de l'égalité précédente, par incompatibilité des événements de la réunion :
  $$\mathbb{P}([T_n > k]) = \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}([T_n = i])$$
  On obtient donc :
  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}([T_n = i]) \right) \\ &= \sum_{0 \leqslant k < i \leqslant n} \mathbb{P}([T_n = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}([T_n = i]) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \ \mathbb{P}([T_n = i]) \ = \ \mathbb{E}(T_n) \end{aligned}$$

□

10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{E}(T_n) \ = \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \ = \ \exp\left(\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \right) \right) \ = \ \exp\left((n-1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. D'où :

$$(n-1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (n-1)\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}} = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Or la fonction exp est continue en 1, donc, par composition de **limites**, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n) = e^1 = e$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n) = e}$$

Commentaire

- On rappelle que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

Ce résultat est obtenu par composition des limites à partir du résultat : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

- Lorsqu'on étudie une suite de la forme $\left({u_n}^{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il est classique d'utiliser l'écriture :

$${u_n}^{a_n} \ = \ \exp\left(a_n \ \ln(u_n)\right)$$

(il faut évidemment vérifier au préalable : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$)
Cette écriture n'est autre que la définition de ${u_n}^{a_n}$ si a_n n'est pas un entier. Il faut donc systématiquement penser à cette écriture dans ce cas. Comme le démontre la question précédente, cette écriture peut aussi être utile dans le cas où a_n est entier. □

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y=k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

a) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) = 1$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([Y=k]) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{(k-1)!} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \frac{1}{(1-1)!} - \frac{1}{((N+1)-1)!} \\
&= 1 - \frac{1}{N!}
\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{N!}\right) = 1$.

$$\boxed{\text{Donc la série } \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}([Y=k]) \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) = 1.}$$

□

b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ \mathbb{P}([Y=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) &= \sum_{k=1}^{N} k\ \frac{k-1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \frac{k(k-1)}{k!} \qquad\qquad \textit{(car } \frac{1(1-1)}{1!}=0\textit{)} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre $N-2$ de la série exponentielle $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$ en $x=1$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e^1 = e$$

- On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ \mathbb{P}([Y=n])$ converge. Ainsi, Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([Y=k]) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y) = e.}$$

□

12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{k!}$$

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([T_n > k]) &= \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\ k!} \\ &= \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)\cdots(n-k)}{k!} = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k}{n}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Or, quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{n-1}{n} & \times & \dfrac{n-2}{n} & \times & \cdots & \times & \dfrac{n-k}{n} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} \\ 1 & \times & 1 & \times & \cdots & \times & 1 \end{array}$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}$.

$$\boxed{\text{Donc, par produit de limites, } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{k!}}$$

□

13. Démontrer alors que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

Démonstration.

- Comme les v.a.r. de la suite (T_n) et Y sont **à valeurs entières**, la convergence en loi de (T_n) vers Y équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n = k]) = \mathbb{P}([Y = k])$$

- Montrons donc que la suite $\big(\mathbb{P}([T_n = k])\big)_{n\geqslant 1}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et déterminons sa limite.
  Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord :

$$[T_n > k-1] = [T_n \geqslant k] = [T_n > k] \cup [T_n = k]$$

  Or les événements $[T_n > k]$ et $[T_n = k]$ sont incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}([T_n > k-1]) = \mathbb{P}([T_n > k]) + \mathbb{P}([T_n = k])$$

  et en réordonnant : $\mathbb{P}([T_n = k]) = \mathbb{P}([T_n > k-1]) - \mathbb{P}([T_n > k])$.
  Or, d'après la question précédente, les suites $\big(\mathbb{P}([T_n > k-1])\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(\mathbb{P}([T_n > k])\big)_{n\geqslant 1}$ convergent.
  Donc la suite $\big(\mathbb{P}([T_n = k])\big)_{n\geqslant 1}$ converge et :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n = k]) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n > k-1]) - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n > k]) \\
&= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{12.}}\textit{)} \\
&= \frac{k-1}{k!} \\
&= \mathbb{P}([Y = k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (T_n) \text{ converge en loi vers la variable aléatoire } Y.}$$

Commentaire

- En toute généralité, la convergence en loi d'une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une v.a.r. X est définie de la manière suivante.
  Pour tout t **en lequel F_X est continue** :

$$F_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(t)$$

  où on note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n et F_X celle de X.
- Dans le cas où les v.a.r. de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la v.a.r. X sont à valeurs entières (de manière la plus générale, à valeurs dans $\mathbb{Z}$), on utilise la caractérisation plus adaptée :

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } X \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k])$$

  (c'est ce qu'on utilise dans la question)

$\square$

14. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 1, n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```
function y = T(n)
    S = ................
    y = ................
    while .............
        tirage = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
        S = S + tirage
        y = .................
    end
endfunction
```

Démonstration.

- On rappelle que la v.a.r. T_n est égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenue soit supérieure ou égale à n.
- C'est le paramètre de sortie `y` de la fonction `T` qui doit contenir le nombre de tirages obtenus par simulation. On procède comme suit :
  × la variable `y` est initialisée à 0 (au début de l'expérience aucun tirage n'a été réalisé).
  On crée par ailleurs la variable `S` qui va permettre de sommer successivement les résultats obtenus par simulation d'un tirage d'une boule dans l'urne.
  La variable `S` est, elle aussi, initialisée à 0.

```
    S = 0
    y = 0
```

  × on simule alors des tirages successifs dans l'urne. La simulation d'un tel tirage est fournie par l'instruction donnée dans l'énoncé :

```
        tirage = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
```

  À chaque nouveau tirage, on doit mettre à jour en conséquence les variables `y` et `S` : on ajoute 1 à `y` pour signaler qu'un nouveau tirage a eu lieu et on ajoute la valeur de ce tirage à `S`.

```
        S = S + tirage
        y = y + 1
```

  On s'intéresse ici au nombre de tirages nécessaires pour que la somme des résultats des tirages simulés dépasse n. On doit effectuer cette succession de tirages tant que cette somme n'a pas dépassé n.

```
    while S < n
```

- En résumé, on obtient le programme suivant :

```
function y = T(n)
    S = 0
    y = 0
    while S < n
        tirage = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
        S = S + tirage
        y = y + 1
    end
endfunction
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

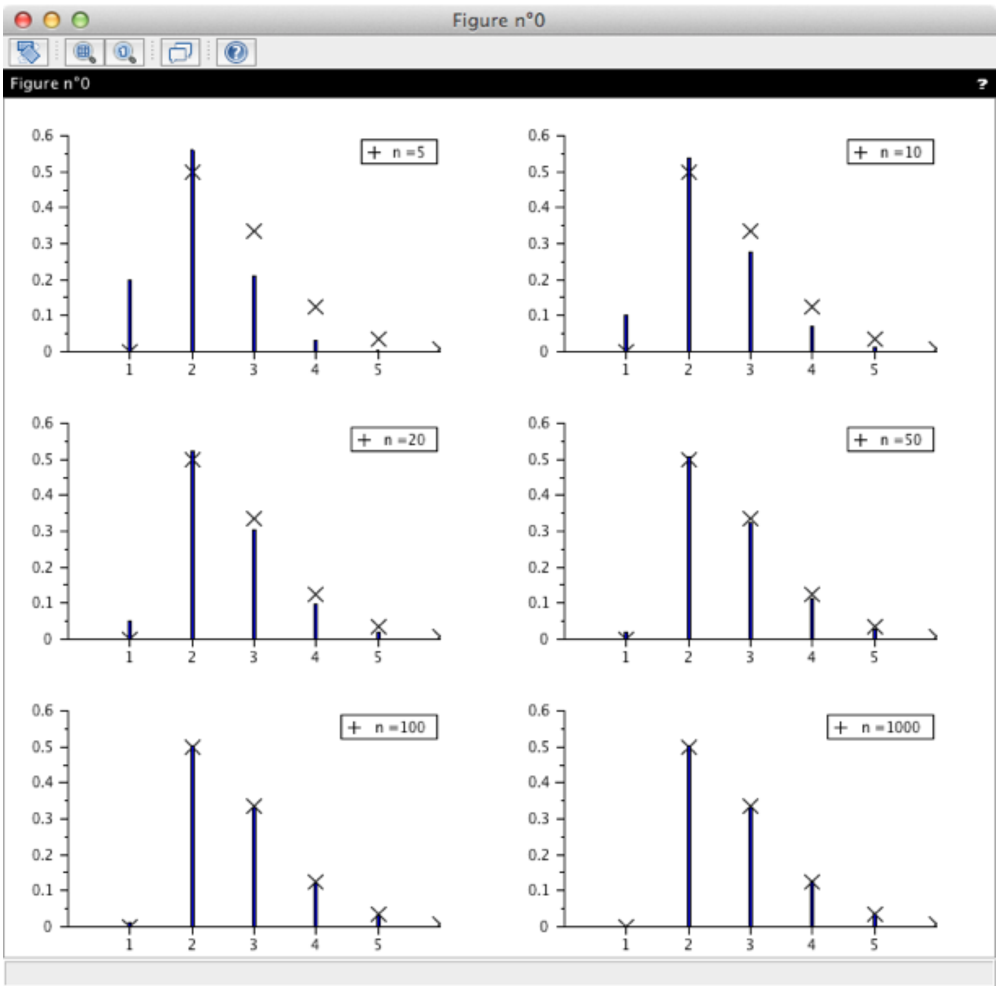
15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

```
function y = freqT(n)
    y = zeros(1,n)
    for i = 1:100000
        k = T(n)
        y(k) = y(k) + 1
    end
    y = y/100000
endfunction
```

```
function y = loitheoY(n)
    y = zeros(1,n)
    for k = 1:n
        y(k) = (k-1)/prod(1:k)
    end
endfunction

clf
n = input('n=?')
plot2d(loitheoY(6), style=-2)
x = freqT(n)
bar(x(1:5))
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes page suivante.



a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

Démonstration.
Commençons par la description de la fonction `loitheoY`.

- La fonction `loitheoY` renvoie un paramètre nommé `y` qui est initialement affecté à un vecteur ligne de taille n rempli de 0 :

```
      y = zeros(1,n)
```

- Le $k^{\text{ème}}$ coefficient de ce vecteur est ensuite affecté à la valeur $\dfrac{k-1}{k!}$.

```
          y(k) = (k-1)/prod(1:k)
```

- On construit ainsi le vecteur : $\big(\mathbb{P}([Y=1]), \mathbb{P}([Y=2]), \ldots, \mathbb{P}([Y=\mathtt{n}])\big)$.

$\boxed{\text{L'instruction } \texttt{loitheoY(n)} \text{ renvoie un vecteur contenant la loi théorique de la v.a.r. } Y.}$

Traitons maintenant le cas de la fonction `freqT`.

- Cette fonction renvoie un paramètre nommé `y` qui est initialement affecté à un vecteur ligne de taille n remplie de 0 :

```
      y = zeros(1,n)
```

- La fonction a pour but de produire une approximation de la loi théorique de la v.a.r. T_n. On rappelle que $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$. La loi de T_n est donc entièrement déterminée par les valeurs :

$$\big(\mathbb{P}([T_n = 1]), \mathbb{P}([T_n = 2]), \ldots, \mathbb{P}([T_n = n])\big)$$

- Pour ce faire, l'idée est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 100000$ est ce grand nombre) la v.a.r. T_n. Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(z_1, \ldots, z_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(Z_1, \ldots, Z_N)$ de la v.a.r. T_n.
  (cela signifie que les v.a.r. Z_1, ..., Z_N sont indépendantes et sont de même loi que T_n)
  - × de compter le nombre de 1, de 2, ..., de n contenus dans cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\text{nombre de } k \text{ de l'observation}}{\text{taille } (N) \text{ de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([T_n = k])$$

- Dans le programme, les valeurs $(z_1, \ldots, z_N)$ sont obtenues par des appels successifs (à l'aide d'une structure itérative, ici une boucle `for`) à la fonction `T` et stockées les unes après les autres dans la variable `k`.

```
    for i = 1 : 100000
        k = T(n)
```

  Le tableau `y` est alors mis à jour à chaque tour de boucle :

```
        y(k) = y(k) + 1
```

Détaillons cette mise à jour :

× si `k` vaut 1 alors l'instruction suivante est effectuée :

```
y(1) = y(1) + 1
```

× ...

× si `k` vaut n alors l'instruction suivante est effectuée :

```
y(n) = y(n) + 1
```

Cela signifie que le $k^{\text{ème}}$ coefficient du tableau compte le nombre de k de l'observation.
Une fois cette boucle effectuée, l'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```
7    y = y / 100000
```

- En résumé, l'instruction `freqT(n)` renvoie un vecteur qui donne la fréquence d'apparition de chaque entier $k \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$ dans une observation de taille 100000 de la v.a.r. T_n.

D'après la LfGN, `freqT(n)` renvoie un vecteur qui est une approximation du vecteur $\big(\mathbb{P}([T_n = 1]), \mathbb{P}([T_n = 2]), \dots, \mathbb{P}([T_n = n])\big)$.

Commentons enfin la représentation graphique.

- La ligne 10 du script permet de générer la représentation graphique du vecteur issu de la fonction `loitheoY` :

```
10   plot2d(loitheoY(6), style=-2)
```

Rappelons que `style=-2` est l'argument de la commande `plot2d` permettant d'afficher les points dans le plan avec des croix.

Le vecteur `loitheoY(6)` est représenté graphiquement par des croix.

- La ligne 10 du script permet de générer la représentation graphique du vecteur issu de la fonction `freqT` :

```
11   x = freqT(n)
12   bar(x(1:5))
```

Rappelons que `bar` est une commande générant un diagramme en bâtons.

Le vecteur `x` issu de l'instruction `x = freqT(n)` est représenté par un diagramme en bâtons.

Commentaire

- Il faut noter qu'on ne représente pas la loi de Y en intégralité puisque l'appel `loitheoY(6)` produit le vecteur :

$$\big(\mathbb{P}([Y = 1]), \mathbb{P}([Y = 2]), \dots, \mathbb{P}([Y = 6])\big)$$

De même, l'instruction `x(1:5)` sélectionne les 5 premiers coefficients du vecteur généré par `x = freqT(n)`. On obtient ainsi une approximation du vecteur :

$$\big(\mathbb{P}([T_n = 1]), \mathbb{P}([Y = 2]), \dots, \mathbb{P}([T_n = 5])\big)$$

- Les croix sont placées exactement au même endroit sur les 6 graphiques. C'est logique puisque le vecteur `loitheoY(6)` est indépendant de la valeur prise par n.

□

b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question ***13***.

Démonstration.

- D'après la question précédente :
  - × le vecteur `freqT(n)` est une approximation de la loi de $T_{\mathtt{n}}$.
  - × le vecteur `loitheoY(n)` représente la loi de Y.
- La succession de graphiques démontre que, lorsque la valeur de `n` grandit, les coefficients de `freqT(n)` se rapprochent de ceux de `loitheoY(n)`. Dès la valeur $\mathtt{n} = 50$, les deux graphiques semblent très proches. Pour $\mathtt{n} = 1000$ les deux graphiques coïncident même à l'œil nu.
- Cette succession de graphiques illustre donc la propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([T_n = k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}([Y = k])$$

(le $k^{\text{ème}}$ coefficient de `freqT(n)` se rapproche du $k^{\text{ème}}$ coefficient de `loitheoY(n)` lorsque l'entier `n` grandit)

$\boxed{\text{Cette succession de graphiques permet d'illustrer la convergence en loi de } (T_n) \text{ vers } Y.}$

Commentaire

- Cette succession de graphiques permet aussi de parler de vitesse de convergence. On s'aperçoit que l'approximation de `loitheoY(n)` par `freqT(n)` est déjà correcte pour $\mathtt{n} = 10$; satisfaisante pour $\mathtt{n} = 20$; bonne pour $\mathtt{n} = 50$ et encore meilleure pour les valeurs suivantes. Ceci suggère que la v.a.r. T_n converge en loi vers la v.a.r. Y de manière très rapide.
- On a évoqué en question ***15.*** la loi faible des grands nombres (LfGN). L'idée est de simuler un grand nombre de fois (N fois) la v.a.r. T_n (à n fixé) afin d'obtenir une répartition des valeurs possibles de T_n et ainsi une approximation de la loi de T_n. Dans l'énoncé, on fait le choix $N = 100000$. Cela suggère que le résultat de convergence fournit par la LfGN a une vitesse de convergence faible : N doit être un nombre réellement **grand** pour que l'approximation obtenue soit bonne.

□