
HEC 2016

EXERCICE

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice tM de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M .

On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.

On note \mathcal{B}_n la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et \mathcal{B}_p la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), on admet que ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes x_1, x_2, \dots, x_n dans la base \mathcal{B}_n .

On pose : $A = X{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.

a) Exprimer A et α en fonction de x_1, x_2, \dots, x_n . Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base \mathcal{B}_n .

Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$; donner une base de $\text{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\text{Ker}(f)$.

c) Calculer la matrice AX .

Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leq p \leq n$.

Soit (V_1, V_2, \dots, V_p) une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, V_1, V_2, \dots, V_p .

Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases \mathcal{B}_p et \mathcal{B}_n .

a) Justifier que le rang de V est égal à p . Déterminer $\text{Ker}(g)$.

b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

c) En déduire que la matrice tVV est inversible.

PROBLEME

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir de deux facteurs de production travail et capital.

Dans tout le problème :

- On note respectivement x et y les quantités de travail et de capital requises pour produire une certaine quantité de ce bien.
- On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $z = \frac{x}{y}$.

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$. Soit f la fonction définie sur \mathcal{D} , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = \left(cx^\theta + (1-c)y^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (\text{fonction de production CES})$$

1. *Exemple.* Dans cette question **uniquement**, on prend $\theta = -1$ et $c = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{D} et calculer pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les dérivées partielles $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.

b) Soit w et U les fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall t > 0$, $w(t) = \frac{2t}{1+t}$ et $U(t) = w(t) - tw'(t)$. Dresser le tableau de variation de la fonction U sur \mathbb{R}_+^* et étudier la convexité de U sur \mathbb{R}_+^* .

c) On rappelle que $z = \frac{x}{y}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) = yw(z)$.

d) Vérifier pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les relations : $\partial_1(f)(x, y) = w'(z)$ et $\partial_2(f)(x, y) = U(z)$.

2. a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

b) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{D} et, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, calculer $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.

c) Déterminer pour tout $y > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x, y)$. Déterminer pour tout $x > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y \mapsto \partial_2(f)(x, y)$.

3. Soit G la fonction définie sur \mathcal{D} par $G(x, y) = \frac{\partial_1(f)(x, y)}{\partial_2(f)(x, y)}$ (*taux marginal de substitution technique*) et g la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall t > 0$, $g(t) = \frac{c}{1-c}t^{-1+\theta}$.

a) Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, exprimer $G(x, y)$ en fonction de $g(z)$.

b) Pour tout $t > 0$, on pose $s(t) = -\frac{g(t)}{tg'(t)}$. Calculer $s(z)$ (*élasticité de substitution*). Conclusion.

4. Soit w et U les fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall t > 0$, $w(t) = f(t, 1)$ et $U(t) = w(t) - tw'(t)$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = yw(z)$.

b) En distinguant les deux cas $0 < \theta < 1$ et $\theta < 0$, dresser le tableau de variation de U sur \mathbb{R}_+^* . Préciser $\lim_{t \rightarrow 0^+} U(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t)$ ainsi que la convexité de U sur \mathbb{R}_+^* .

Partie II : Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{D} , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , vérifiant la condition $\Psi(1, 1) = 1$ et pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \Psi(x, y)$.

De plus, on suppose que pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x, y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto \partial_2(\Psi)(x, y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall t > 0, v(t) = \Psi(t, 1)$.

a) Justifier que la fonction v est de classe \mathcal{C}^2 , strictement croissante et concave sur \mathbb{R}_+^* .

b) Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall t > 0, \varphi(t) = v(t) - t v'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \mu$, avec $\mu \geq 0$.

Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu \leq 1$.

c) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \Psi(x, y) = y v(z)$.

6. a) Pour tout $t > 0$, on pose : $h(t) = \frac{v'(t)}{\varphi(t)}$.

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $\frac{\partial_1(\Psi)(x, y)}{\partial_2(\Psi)(x, y)} = h(z)$.

b) Pour tout $t > 0$, on pose : $\sigma(t) = -\frac{h(t)}{t h'(t)}$. Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\sigma(t)$.

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question 6. On suppose que la fonction σ est constante sur \mathbb{R}_+^* ; on note σ_0 cette constante et on suppose $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \frac{1}{\sigma_0}$.

a) Pour tout $t > 0$, on pose $\ell(t) = t^{1-r} h(t)$. Calculer $\ell'(t)$ et en déduire que : $\forall t > 0, h(t) = h(1)t^{r-1}$.

b) Par une méthode analogue à celle de la question 7a, établir la relation :

$$\forall t > 0, v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)} \right)^{\frac{1}{r}}$$

c) En déduire l'existence d'une constante $a \in]0, 1[$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \Psi(x, y) = (ax^r + (1-a)y^r)^{\frac{1}{r}}$.

d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions 3.b) et 7.c) ?

8. Soit $a \in]0, 1[$. Pour tout $t > 0$, soit S_t la fonction définie sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$ par : $S_t(r) = (at^r + 1 - a)^{\frac{1}{r}}$.

a) On pose $H_t(r) = \ln S_t(r)$. Calculer la limite de $S_t(r)$ lorsque r tend vers 0.

b) Pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}$ fixé, on pose : $N_{(x,y)}(r) = y S_z(r)$ et $F(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} N_{(x,y)}(r)$.

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $F(x, y) = x^a y^{1-a}$ (fonction de production de Cobb-Douglas).

Partie III : Estimation des paramètres d'une fonction de production de Cobb-Douglas.

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et B un réel strictement positif.

On suppose que la production totale Q présente une composante déterministe et une composante aléatoire.

- La *composante déterministe* est une fonction de production de type Cobb-Douglas, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = Bx^a y^{1-a}$$

- La *composante aléatoire* est une variable aléatoire de la forme $\exp(R)$ où R est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, de variance $\sigma^2 > 0$.
- La *production totale* Q est une variable aléatoire à valeurs strictement positives telle que :

$$Q = Bx^a y^{1-a} \exp(R)$$

On suppose que les variables aléatoires Q et R sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On pose : $b = \ln(B)$, $u = \ln(x) - \ln(y)$ et $T = \ln(Q) - \ln(y)$. On a donc : $T = au + b + R$.

On sélectionne n entreprises ($n \geq 1$) qui produisent le bien considéré à l'époque donnée.

On mesure pour chaque entreprise i ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) la quantité de travail x_i et la quantité de capital y_i utilisées ainsi que la quantité produite Q_i^* . On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x_i > 0$, $y_i > 0$ et $Q_i^* > 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la production totale de l'entreprise i est alors une variable aléatoire Q_i telle que $Q_i = Bx_i^a y_i^{1-a} \exp(R_i)$, où R_1, R_2, \dots, R_n sont des variables aléatoires supposées indépendantes et de même loi que R et le réel strictement positif Q_i^* est une réalisation de la variable aléatoire Q_i .

On pose pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $u_i = \ln(x_i) - \ln(y_i)$, $T_i = \ln(Q_i) - \ln(y_i)$ et $t_i = \ln(Q_i^*) - \ln(y_i)$.

Ainsi, pour chaque entreprise $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $T_i = au_i + b + R_i$ et le réel t_i est une réalisation de la variable aléatoire T_i .

On rappelle les définitions et résultats suivants :

- Si $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une série statistique, la moyenne et la variance empiriques, notées respectivement \bar{v} et s_v^2 , sont données par : $\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$ et $s_v^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 - \bar{v}^2$.
- Si $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(w_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux séries statistiques, la covariance empirique de la série double $(v_i, w_i)_{1 \leq i \leq n}$, notée $\text{cov}(v, w)$, est donnée par :

$$\text{cov}(v, w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(w_i - \bar{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i w_i - \bar{v}\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})w_i$$

9. a) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire T_i suit la loi normale $\mathcal{N}(au_i + b, \sigma^2)$.

b) Les variables aléatoires T_1, T_2, \dots, T_n sont-elles indépendantes ?

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit φ_i la densité continue sur \mathbb{R} de T_i :

$$\forall d \in \mathbb{R}, \quad \varphi_i(d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(d - (au_i + b))^2\right)$$

Soit \mathcal{F} l'ouvert défini par $\mathcal{F} =]0, 1[\times \mathbb{R}$ et M la fonction de \mathcal{F} dans \mathbb{R} définie par :

$$M(a, b) = \ln\left(\prod_{i=1}^n \varphi_i(t_i)\right)$$

On suppose que : $0 < \text{cov}(u, t) < s_u^2$.

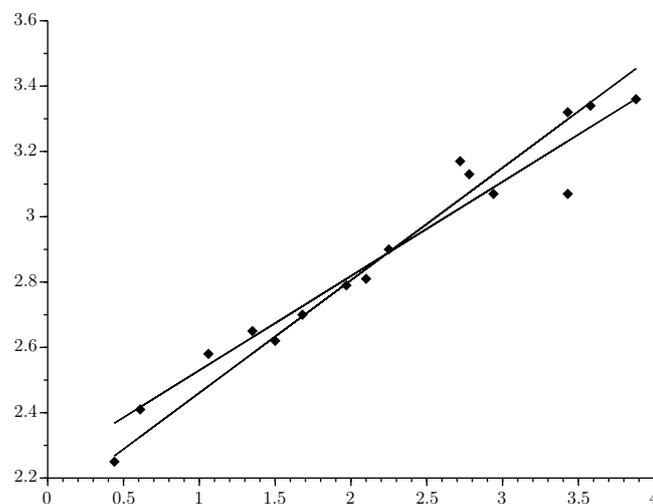
10. a) Calculer le gradient $\nabla(M)(a, b)$ de M en tout point $(a, b) \in \mathcal{F}$.
 b) En déduire que M admet sur \mathcal{F} un unique point critique, noté (\hat{a}, \hat{b}) .
 c) Exprimer \hat{a} et \hat{b} en fonction de $\text{cov}(u, t)$, s_u^2 , \bar{t} et \bar{u} .
 (\hat{a} et \hat{b} sont les estimations de a et b par la méthode dite du maximum de vraisemblance)
11. a) Soit $\nabla^2(M)(a, b)$ la matrice hessienne de M en $(a, b) \in \mathcal{F}$.
 Montrer que $\nabla^2(M)(a, b) = -\frac{n}{\sigma^2} \begin{pmatrix} s_u^2 + \bar{u}^2 & \bar{u} \\ \bar{u} & 1 \end{pmatrix}$
 b) En déduire que M admet en (\hat{a}, \hat{b}) un maximum local.
12. Soit (h, k) un couple de réels non nuls. Calculer $M(\hat{a} + h, \hat{b} + k) - M(\hat{a}, \hat{b})$.
 En déduire que M admet en (\hat{a}, \hat{b}) un maximum global.
13. On rappelle qu'en **Scilab**, les commandes **variance** et **corr** permettent de calculer respectivement la variance d'une série statistique et la covariance d'une série statistique double.
 Si $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(w_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux séries statistiques, alors la variance de $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est calculable par **variance(v)** et la covariance de $(v_i, w_i)_{1 \leq i \leq n}$ est calculable par **corr(v, w, 1)**.
 On a relevé pour $n = 16$ entreprises qui produisent le bien considéré à l'époque donnée, les deux séries statistiques $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ reproduites dans les lignes 1 à 4 du code **Scilab** suivant dont la ligne 9 est incomplète :

```

1 u = [1.06, 0.44, 2.25, 3.88, 0.61, 1.97, 3.43, 2.10,
2     1.50, 1.68, 2.72, 1.35, 2.94, 2.78, 3.43, 3.58]
3 v = [2.58, 2.25, 2.90, 3.36, 2.41, 2.79, 3.32, 2.81,
4     2.62, 2.70, 3.17, 2.65, 3.07, 3.13, 3.07, 3.34]
5 plot2d(u, t, -4)
6 // -4 signifie que les points sont représentés par des losanges.
7 plot2d(u, corr(u,t,1)/variance(u)*u + mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u))
8 // équation de la droite de régression de t en u.
9 plot2d(u, ..... )
10 // équation de la droite de régression de u en t.

```

Le code précédent complété par la ligne 9 donne alors la figure suivante :

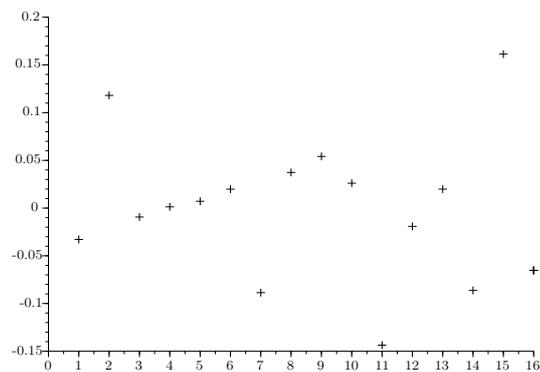


- a) Compléter la ligne 9 du code permettant d'obtenir la figure précédente (on reportera sur sa copie, uniquement la ligne 9 complétée).
- b) Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.
- c) Estimer graphiquement les moyennes empiriques \bar{u} et \bar{t} .
- d) Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double $(u_i, t_i)_{1 \leq i \leq 16}$ est-il plus proche de -1 , de 1 ou de 0 ?
- e) On reprend les lignes 1 à 4 du code précédent que l'on complète par les instructions 11 à 17 qui suivent et on obtient le graphique ci-dessous :

```

11 a0 = corr(u,t,1)/variance(u)
12 b0 = mean(t) - corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u)
13 t0 = a0 * u + b0
14 e = t0 - t
15 p = 1:16
16 plot2d(p,e,-1)
17 // -1 signifie que les points sont représentés par des symboles d'addition.

```



Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus sur le graphique ?

Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.

14. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $A_n = \frac{1}{n s_u^2} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u}) T_i$.

On suppose que le paramètre σ^2 est connu.

- a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(A_n)$ et la variance $\mathbb{V}(A_n)$ de la variable aléatoire A_n .

Préciser la loi de A_n .

- b) On suppose que a est un paramètre inconnu. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_α le réel tel que

$$\Phi(d_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Déterminer un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1 - \alpha$.