ESSEC I 2016

On s'intéresse dans ce problème à deux mesures du risque utilisées par les marchés financiers.
Pour cela, on considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, qui modélisent des pertes financières subies par des acteurs économiques sur une période donnée.
Toutes les variables aléatoires définies dans ce problème sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité X vérifiant :

- X admet une espérance notée $\mathbb{E}(X)$.
- il existe un intervalle I_X (dont on admet l'unicité) sur lequel la fonction de répartition de X, notée F_X, réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.
  On note G_X la bijection réciproque, définie de $]0,1[$ sur I_X. Les notations F_X et G_X seront utilisées dans tout le sujet.

Dans tout le problème β est un réel appartenant à $]0,1[$ et représentant un niveau de confiance.

Partie I - Définition et propriétés de la « Value at Risk »

1. Soit $X \in \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe un unique réel v tel que $\mathbb{P}([X \leqslant v]) = \beta$, et que l'on a $v = G_X(\beta)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X appartient à $\mathcal{D}$.
  Donc F_X réalise une bijection de I_X dans $]0,1[$.
  Or $\beta \in\ ]0,1[$.

  $$\boxed{\text{Donc il existe un unique } v \in I_X \subset \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbb{P}([X \leqslant v]) = F_X(v) = \beta.}$$

- D'après l'énoncé, la fonction G_X est la bijection réciproque de F_X sur I_X.

  $$\boxed{\text{Donc : } v = G_X(F_X(v)) = G_X(\beta).}$$

□

- On définit alors $r_\beta(X)$ appelé la « Value at Risk »au niveau de confiance β de X, par $r_\beta(X) = G_X(\beta)$. C'est une grandeur qui permet d'évaluer le risque pris par l'acteur qui détient l'actif dont les pertes sont modélisées par X.
- **On remarque que $r_\beta(X)$ est égal au capital minimal qu'il faut détenir pour être en mesure de couvrir les pertes de l'actif associé à X avec une probabilité égale à β.**

2. On suppose que, dans cette question, X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in\ ]0,+\infty[$.

a) Rappeler la valeur de $F_X(x)$ pour tout réel x.

Démonstration.

$$\boxed{F_X : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.}$$

□

b) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que l'on a $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est à densité.
- Elle admet une espérance ($\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$).

- La fonction F_X est :
  - $\times$ continue sur $]0,+\infty[$,
  - $\times$ strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
    En effet, la fonction F_X est dérivable sur $]0+\infty[$ et :
$$\forall x \in \,]0,+\infty[, \; F'_X(x) = -(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\, x} = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} > 0$$

  Ainsi, F_X réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $F_X(]0,+\infty[)$.
  Comme F_X est une fonction de répartition, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
  D'où :
$$F_X(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} F_X(x), \lim_{x\to+\infty} F_X(x)\right[= \,]0,1[$$
  Ainsi, la fonction F_X réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$.

$$\boxed{\text{Finalement : } X \in \mathcal{D}.}$$

- Déterminons G_X.
  Soit $x \in \,]0,+\infty[$. Soit $\beta \in \,]0,1[$.
$$\begin{aligned} G_X(\beta) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \beta = F_X(x) \quad &&\Leftrightarrow \quad \beta = 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x} \\ &\Leftrightarrow \quad 1-\beta = \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \quad &&\Leftrightarrow \quad \ln(1-\beta) = -\lambda\, x \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\beta) = x \end{aligned}$$
  Ainsi : $\forall \beta \in \,]0,1[, \; G_X(\beta) = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\beta)$.
$$\boxed{r_\beta(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\beta)}$$
□

3. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 pour X et de paramètres μ et s^2 pour Y.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ sa densité usuelle.

a) (i) Justifier que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. On note Φ^{-1} la bijection réciproque.

Démonstration.
La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de φ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \Phi'(x) = \varphi(x) > 0$$
$$\boxed{\text{Donc la fonction } \Phi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$
En résumé, la fonction Φ est :
- $\times$ continue sur $\mathbb{R}$ (car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$),
- $\times$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi Φ réalise une bijection de $\mathbb{R} = \,]-\infty,+\infty[$ sur $\Phi(]-\infty,+\infty[)$.
Or Φ est une fonction de répartition, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$.
On en déduit :
$$\Phi(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty} \Phi(x), \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)\right[= \,]0,1[$$
$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } \Phi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0,1[.}$$
□

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F_X(x)$ en fonction de Φ, m, σ et x.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
  On note Z la v.a.r. centrée réduite associée à X. Alors :
  $$Z = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}} = \frac{X - m}{\sigma}$$
  La v.a.r. Z est une transformée affine de X qui suit une loi normale. Donc Z suit également une loi normale.
  De plus : $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $\mathbb{V}(Z) = 1$.
  $$\boxed{\text{Donc : } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

Commentaire

On rappelle le résultat de cours suivant : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,
$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, \sigma^2\right)$$
En particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ X^* = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}([X - m \leqslant x - m]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{x-m}{\sigma}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \frac{x-m}{\sigma}\right]\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$
  $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}$$

Commentaire

La démonstration de ce résultat pouvait également s'effectuer par calcul direct.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$$
Or $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Donc :
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\, \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$
D'où :
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma}\, \varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\ dt$$

Commentaire

Deux méthodes de résolution sont alors possibles :

- Méthode 1. On remarque :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$$

Soit $A \in \,]-\infty, x]$.

$$\int_A^x \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\,dt \;=\; \left[\ \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\ \right]_A^x \;=\; \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right)$$

Or, comme Φ est une fonction de répartition : $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right) = 0$.

D'où : $F_X(x) \;=\; \Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$.

- Méthode 2. On effectue le changement de variable $\boxed{u = \dfrac{t-m}{\sigma}}$.

$$\left|\ \begin{array}{l} u = \dfrac{t-m}{\sigma} \text{ (et donc } t = \sigma\,u + m) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{1}{\sigma}\,dt \quad \text{ et } \quad dt = \sigma\ du \\ \quad\bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \\ \quad\bullet\ t = x \ \Rightarrow\ u = \dfrac{x-m}{\sigma} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto \sigma\,u + m$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, x]$.
On obtient alors :

$$F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^x \varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\,\frac{1}{\sigma}\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \varphi(u)\ du \;=\; \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

□

(iii) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que $r_\beta(X) = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est à densité.
- Elle admet une espérance ($\mathbb{E}(X) = m$).
- On note f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x-m}{\sigma}$$

Alors : $F_X = \Phi \circ f$.
D'après la question ***3.a)(i)***, on sait que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
Montrons alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow\ y = \frac{x-m}{\sigma} \ \Leftrightarrow\ \sigma\,y = x - m \ \Leftrightarrow\ \sigma\,y + m = x$$

Ainsi, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $f^{-1} : x \mapsto \sigma\,x + m$.
Finalement, la fonction F_X réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X \in \mathcal{D}.}$$

- Déterminons G_X.
  Tout d'abord : $F_X = \Phi \circ f$. Donc : $G_X = F_X^{-1} = f^{-1} \circ \Phi^{-1}$.
  Soit $\beta \in]0,1[$. On obtient alors :
  $$G_X(\beta) = f^{-1}(\Phi^{-1}(\beta)) = \sigma\, \Phi^{-1}(\beta) + m$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } r_\beta(X) = m + \sigma\, \Phi^{-1}(\beta).}$$

□

b) Quelle est la loi de $X + Y$?
En déduire $r_\beta(X+Y)$ en fonction de m, μ, σ, s et β.

Démonstration.
- Les v.a.r. X et Y :
  × sont indépendantes,
  × suivent des lois normales ($X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, s^2\right)$).

  Donc par stabilité des lois normales, $X + Y$ suit une loi normale.
  De plus, par linéarité de l'espérance :
  $$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = m + \mu$$
  Par indépendance de X et Y :
  $$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \sigma^2 + s^2$$
  $$\boxed{\text{D'où : } X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m + \mu, \sigma^2 + s^2\right)}$$
- On applique le résultat de la question ***3.a)*** pour $m = m + \mu$ et $\sigma^2 = \sigma^2 + s^2$.
  $$\boxed{\text{On obtient : } r_\beta(X+Y) = (m+\mu) + \sqrt{\sigma^2 + s^2}\ \Phi^{-1}(\beta).}$$

□

c) Pour quels $\beta \in]0,1[$ a-t-on $r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y)$?

Démonstration.
Soit $\beta \in]0,1[$.
$$r_\beta(X) + r_\beta(Y) = (m + \sigma\, \Phi^{-1}(\beta)) + (\mu + s\, \Phi^{-1}(\beta)) = (m+\mu) + (\sigma + s)\Phi^{-1}(\beta)$$
Donc :
$$\begin{aligned} r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y) \quad &\Leftrightarrow \quad \cancel{(m+\mu)} + \sqrt{\sigma^2+s^2}\ \Phi^{-1}(\beta) \leqslant \cancel{(m+\mu)} + (\sigma+s)\Phi^{-1}(\beta) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\sigma^2+s^2}\ \Phi^{-1}(\beta) \leqslant (\sigma+s)\Phi^{-1}(\beta) \end{aligned}$$
Trois cas se présentent alors.
- Si $\Phi^{-1}(\beta) > 0$. Alors :
  $$\begin{aligned} r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\sigma^2+s^2} \leqslant \sigma + s \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma^2 + s^2 \leqslant (\sigma+s)^2 \qquad \textit{(car } \sigma > 0,\ s > 0 \textit{ et } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \cancel{\sigma^2} + \cancel{s^2} \leqslant \cancel{\sigma^2} + 2\,\sigma\, s + \cancel{s^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \sigma\, s \end{aligned}$$
  Or $\sigma > 0$ et $s > 0$, donc la dernière assertion est vraie.
  D'où, par équivalence, la première aussi, c'est-à-dire :
  $$r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y)$$

- Si $\Phi^{-1}(\beta) < 0$. Alors, avec le même raisonnement que précédemment :

$$r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\sigma^2+s^2} \geqslant \sigma + s \;\Leftrightarrow\; 0 \geqslant \sigma\, s$$

  Cette dernière assertion est fausse. Donc, par équivalence, la première aussi.
- Si $\Phi^{-1}(\beta) = 0$. Alors l'inégalité : $\sqrt{\sigma^2+s^2}\;\Phi^{-1}(\beta) \leqslant (\sigma+s)\Phi^{-1}(\beta)$, est trivialement vérifiée. On a donc encore par équivalence :

$$r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y)$$

De plus :

$$\Phi^{-1}(\beta) = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y) \;\Leftrightarrow\; \beta \geqslant \frac{1}{2}.}$$

□

4. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, c un réel et λ un réel strictement positif. On pose $Y = X + c$ et $Z = \lambda X$ et on admet que Y et Z appartiennent à $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c$.

Démonstration.

- Déterminons le lien entre F_Y et F_X.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}([X + c \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}([X \leqslant x - c]) \;=\; F_X(x-c)$$

- De plus, par définition de r_β :
  × $\beta = F_X(r_\beta(X))$
  × $\beta = F_Y(r_\beta(Y)) = F_X(r_\beta(Y) - c)$, d'après la relation précédente.

  D'où :

$$F_X(r_\beta(X)) = F_X(r_\beta(Y) - c)$$

  Or, comme $X \in \mathcal{D}$, la fonction F_X réalise une bijection de I_X sur $]0,1[$. Donc :

$$r_\beta(X) = r_\beta(Y) - c$$

$$\boxed{r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c}$$

□

b) Montrer que $r_\beta(Z) = \lambda\, r_\beta(X)$.

Démonstration.

- Déterminons le lien entre F_Z et F_X.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}([\lambda\, X \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x}{\lambda}\right]\right) \;=\; F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

- De plus, par définition de r_β :
  × $\beta = F_X(r_\beta(X))$
  × $\beta = F_Z(r_\beta(Z)) = F_X\left(\dfrac{r_\beta(Z)}{\lambda}\right)$, d'après la relation précédente.

D'où :

$$F_X(r_\beta(X)) = F_X\left(\frac{r_\beta(Z)}{\lambda}\right)$$

Or, comme $X \in \mathcal{D}$, la fonction F_X réalise une bijection de I_X sur $]0,1[$. Donc :

$$r_\beta(X) = \frac{r_\beta(Z)}{\lambda}$$

$$\boxed{r_\beta(Z) = \lambda\, r_\beta(X)}$$

□

5. Soit X et Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathcal{D}$ et telles que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.

a) Comparer, pour tout réel x, $F_X(x)$ et $F_Y(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\omega \in \Omega$.
Supposons $\omega \in [Y \leqslant x]$, autrement dit : $Y(\omega) \leqslant x$.
Comme $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, on obtient : $X(\omega) \leqslant x$, c'est-à-dire $\omega \in [X \leqslant x]$.
On en déduit :

$$[Y \leqslant x] \subset [X \leqslant x]$$

Donc, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}([Y \leqslant x]) \leqslant \mathbb{P}([X \leqslant x])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) \leqslant F_X(x).}$$

Commentaire

En général, pour comparer des probabilités, on s'efforcera de raisonner dans un premier temps sur les événements.

□

b) En déduire que $r_\beta(X) \leqslant r_\beta(Y)$.

Démonstration.
Par définition de r_β :

$$F_X(r_\beta(X)) \ = \ \beta \ = \ F_Y(r_\beta(Y))$$

Or, d'après la question précédente : $F_Y(r_\beta(Y)) \ \leqslant \ F_X(r_\beta(Y))$. Donc :

$$F_X(r_\beta(X)) \ \leqslant \ F_X(r_\beta(Y))$$

Or, comme $X \in \mathcal{D}$, la fonction F_X réalise une bijection strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } r_\beta(X) \leqslant r_\beta(Y).}$$

□

Partie II - Estimation de la valeur de $r_\beta(X)$

Dans la pratique la loi de X n'est pas totalement connue et on a besoin d'avoir une idée assez précise de la « Value at Risk » ne connaissant qu'un certain nombre de valeurs de cette variable.
On modélise cette situation en supposant, dans cette partie, que la loi de X dépend d'un paramètre θ inconnu appartenant à un sous ensemble Θ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, que $r_\beta(X) = g(\theta)$ où g est une fonction définie sur Θ et que pour tout $\theta \in \Theta$, $X \in \mathcal{D}$.
On utilise aussi les hypothèses et notations suivantes :

- $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles appartenant à $\mathcal{D}$, mutuellement indépendantes, de même loi que X.
- pour tout $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on ordonne $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ dans l'ordre croissant et on note alors $X_{1,n}(\omega), \ldots, X_{n,n}(\omega)$ les valeurs obtenues.
  En particulier, $X_{1,n}(\omega)$ est la plus petite des valeurs $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ et $X_{n,n}(\omega)$ la plus grande.
- on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, les $X_{k,n}$ sont des variables aléatoires.
- pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on définit la variable aléatoire $N_{x,n}$ ainsi :
  pour tout $\omega \in \Omega$, $N_{x,n}(\omega)$ est le nombre d'indices k compris entre 1 et n tels que l'on ait $X_k(\omega) \leqslant x$.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_{x,n}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de $N_{x,n}$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. Pour déterminer le nombre d'indices $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $X_k(\omega) \leqslant x$, on teste successivement pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$ si $X_k(\omega)$ est inférieur à x.
  On considère alors le test à deux issues suivant :
  × soit X est inférieur à x,
  × soit X est strictement supérieur à x.
  Il définit donc une épreuve de Bernoulli.
- On considère alors l'expérience consistant en la succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. En effet :
  × il y a autant d'épreuves que de v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$,
  × ces épreuves sont identiques car $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi,
  × elles sont indépendantes car $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
  Le succès de celles-ci est d'obtenir X inférieure à x, ce qui se produit avec probabilité :
  $$\mathbb{P}([X \leqslant x]) = F_X(x)$$
- La v.a.r. $N_{x,n}$ est la v.a.r. associée au nombre de succès de cette expérience.
  Donc $N_{x,n}$ suit la loi binomiale de paramètres n et $F_X(x)$
  $$\boxed{N_{x,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F_X(x))}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(N_{x,n}) = n\, F_X(x) \text{ et } \mathbb{V}(N_{x,n}) = n\, F_X(x)(1 - F_X(x)).}$$

□

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.

- La v.a.r. $\dfrac{N_{x,n}}{n}$ admet une variance car $N_{x,n}$ en admet une.
  On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{N_{x,n}}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\frac{N_{x,n}}{n}\right)}{\varepsilon^2} \qquad (*)$$

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(\frac{N_{x,n}}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(N_{x,n})}{n} = \frac{\cancel{n}\, F_X(x)}{\cancel{n}} = F_X(x)$$

  Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}\left(\frac{N_{x,n}}{n}\right) = \frac{\mathbb{V}(N_{x,n})}{n^2} = \frac{\cancel{n}\, F_X(x)(1-F_X(x))}{n^{\cancel{2}}} = \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n}$$

- L'inégalité $(*)$ devient donc :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n\,\varepsilon^2}$$

- Par propriété d'une probabilité :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n\,\varepsilon^2}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n\,\varepsilon^2} = 0$.

$$\boxed{\text{Donc, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0.}$$

□

8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il y a égalité entre les événements $[X_{k,n} \leqslant x]$ et $[N_{x,n} \geqslant k]$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

- Les v.a.r. $X_{1,n}$, …, $X_{n,n}$ sont ordonnées dans l'ordre croissant, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_{1,n}(\omega) \leqslant X_{2,n}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_{k,n}(\omega) \leqslant X_{k+1,n}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_{n,n}(\omega)$$

- Or, par définition de $N_{x,n}$, l'événement $[N_{x,n} \geqslant k]$ est réalisé si et seulement s'il existe au moins k v.a.r. parmi X_1, …, X_n telles que les événements $[X_i \leqslant x]$ soient réalisés.
  Donc, comme : $\forall \omega \in \Omega,\ X_{1,n}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_{k,n}(\omega) \leqslant X_{k+1,n}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_{n,n}(\omega)$:

$$[N_{x,n} \geqslant k] = [X_{1,n} \leqslant x] \cap \cdots \cap [X_{k,n} \leqslant x]$$

- Or : pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $[X_{k,n} \leqslant x] \subset [X_{i,n} \leqslant x]$ (car : $\forall \omega \in \Omega,\ X_{i,n}(\omega) \leqslant X_{k,n}(\omega)$).

$$\boxed{\text{Donc, finalement : } \forall k \in [\![1,n]\!],\ [N_{x,n} \geqslant k] = [X_{k,n} \leqslant x].}$$

□

b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

et que $X_{k,n}$ est une variable aléatoire à densité.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- D'après la question précédente et comme $N_{x,n}(\Omega) = [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([N_{x,n} \geqslant k]) \ = \ \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=k}^{n} [N_{x,n} = r]\right)$$

  Or les événements $[N_{x,n} = k]$, ..., $[N_{x,n} = n]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=k}^{n} [N_{x,n} = r]\right) \ = \ \sum_{r=k}^{n} \mathbb{P}([N_{x,n} = r])$$

  Or, d'après la question ***6.*** : $N_{x,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F_X(x))$. Donc : $\forall r \in [\![k, n]\!]$,

$$\mathbb{P}([N_{x,n} = r]) = \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}}$$

- Comme $X \in \mathcal{D}$, la v.a.r. X est une v.a.r. à densité.
  En particulier, sa fonction de répartition F_X est :
  × continue sur $\mathbb{R}$,
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

  Or, d'après ce qui précède :

$$F_{X_{k,n}}(x) = \mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

  Donc la fonction de répartition $F_{X_{k,n}}$ est :
  × continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, pour la même raison.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_{k,n} \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

Commentaire

Il n'est pas nécessaire, dans cette question, de détailler la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de la fonction $F_{X_{k,n}}$: ce qui est testé ici, c'est la connaissance de la définition d'une v.a.r. à densité.

□

9. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et c un réel. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]\right) = 0$$

On considère $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergente de réels et on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

a) Établir que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > c \\ 1 & \text{si } t < c \end{cases}$.

Démonstration.

- Étudions tout d'abord l'hypothèse de l'énoncé.
  Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([|U_n - c| < \varepsilon])$$

  L'hypothèse de l'énoncé apporte donc deux informations.
  × Tout d'abord : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]) = 0$ (évidemment)
  × Ensuite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| < \varepsilon]) = 1$

- Soit $t > c$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que : $t = c + \varepsilon_0$. Donc :

$$[U_n \geqslant t] \ = \ [U_n \geqslant c + \varepsilon_0] \ = \ [U_n - c \geqslant \varepsilon_0]$$

  Montrons : $[U_n - c \geqslant \varepsilon_0] \ \subset \ [|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0]$.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  Supposons $\omega \in [U_n - c \geqslant \varepsilon_0]$, autrement dit $U_n(\omega) - c \geqslant \varepsilon_0$.
  Donc, par croissance de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[0, +\infty[$ (on a bien $\varepsilon_0 > 0$) : $|U_n(\omega) - c| \geqslant \varepsilon_0$, c'est-à-dire $\omega \in [|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0]$.
  D'où : $[U_n - c \geqslant \varepsilon_0] \ \subset \ [|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0]$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [U_n \geqslant t] \ \subset \ [|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0].}$$

  On en déduit, par propriétés d'une probabilité :

$$0 \ \leqslant \ \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) \ \leqslant \ \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0])$$

  Or, d'après l'énoncé :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon_0]) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Donc, par théorème d'encadrement : } \forall t > c, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = 0.}$$

- Soit $t < c$. Alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que : $t = c - \varepsilon_1$. Donc :

$$[U_n \geqslant t] = [U_n \geqslant c - \varepsilon_1]$$

  Montrons : $[|U_n - c| < \varepsilon_1] \ \subset \ [U_n \geqslant c - \varepsilon_1]$.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  Supposons $\omega \in [|U_n - c| < \varepsilon_1]$, autrement dit $|U_n(\omega) - c| < \varepsilon_1$. Or :

$$|U_n(\omega) - c| < \varepsilon_1 \ \Leftrightarrow \ -\varepsilon_1 < U_n(\omega) - c < \varepsilon_1 \ \Leftrightarrow \ c - \varepsilon_1 < U_n < c + \varepsilon_1$$

  En particulier : $U_n(\omega) \geqslant c - \varepsilon_1$, c'est-à-dire $\omega \in [U_n \geqslant c - \varepsilon_1]$.
  D'où : $[|U_n - c| < \varepsilon_1] \ \subset \ [U_n \geqslant c - \varepsilon_1]$

$$\boxed{\text{Ainsi : } [|U_n - c| < \varepsilon_1] \ \subset \ [U_n \geqslant t].}$$

D'où, par propriétés d'une probabilité :

$$\mathbb{P}([|U_n - c| < \varepsilon_1]) \leqslant \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) \leqslant 1$$

Or, d'après l'énoncé :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| < \varepsilon_1]) = 1$$

$$\boxed{\text{Donc, par théorème d'encadrement : } \forall t < c,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } t > c \\ 1 & \text{si } t < c \end{array}\right. .}$$

□

b) On suppose $\ell > c$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{\ell - c}{2}$.
En remarquant que $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$, montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant c + \varepsilon$.
En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 0$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$: $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Or, pour tout $n \geqslant N$:

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

En particulier, pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n \geqslant \ell - \varepsilon = c + \varepsilon$$

$$\boxed{\text{D'où, à partir du rang } N : u_n \geqslant c + \varepsilon.}$$

- Soit $n \geqslant N$. Alors : $u_n \geqslant c + \varepsilon$.
Donc :

$$[U_n \geqslant u_n] \subset [U_n \geqslant c + \varepsilon]$$

D'où, d'après les propriétés d'une probabilité :

$$0 \leqslant \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) \leqslant \mathbb{P}([U_n \geqslant c + \varepsilon])$$

Or, d'après la question ***9.a)*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant c + \varepsilon]) = 0$.

$$\boxed{\text{Donc, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 0.}$$

Commentaire

- On utilise ici la définition de la convergence d'une suite (u_n) vers ℓ :

$$((u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow (|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon))$$

- Démontrons : $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$.
D'une part :

$$\ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell - c}{2} = \frac{2\ell - (\ell - c)}{2} = \frac{\ell + c}{2}$$

D'autre part :

$$c + \varepsilon = c + \frac{\ell - c}{2} = \frac{2c + (\ell - c)}{2} = \frac{\ell + c}{2}$$

On a donc bien : $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$.

□

c) Montre de même que si $\ell < c$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 1$.

Démonstration.
On pose $\varepsilon' = \dfrac{c-\ell}{2}$.

- D'après l'énoncé $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
  Donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N'$:
  $$u_n \leqslant \ell + \varepsilon'$$
  $$\boxed{\text{D'où, puisque } \ell+\varepsilon' = c-\varepsilon' \text{, à partir du rang } N' : u_n \leqslant c-\varepsilon'.}$$
- Soit $n \geqslant N'$. Alors : $u_n \leqslant c - \varepsilon'$. Donc :
  $$\left[U_n \geqslant c-\varepsilon'\right] \subset [U_n \geqslant u_n]$$
  D'où, d'après les propriétés d'une probabilité :
  $$\mathbb{P}(\left[U_n \geqslant c-\varepsilon'\right]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) \ \leqslant\ 1$$
  Or, d'après la question ***9.a)*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant c-\varepsilon']) = 1$.
  $$\boxed{\text{Donc, par théorème d'encadrement, si } \ell < c : \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 1.}$$

Commentaire

Détaillons l'égalité $\ell + \varepsilon' = c - \varepsilon'$.
D'une part :
$$\ell + \varepsilon' \ = \ \ell + \frac{c-\ell}{2} \ = \ \frac{2\ell+(c-\ell)}{2} \ = \ \frac{\ell+c}{2}$$
D'autre part :
$$c - \varepsilon' \ = \ c - \frac{c-\ell}{2} \ = \ \frac{2c-(c-\ell)}{2} \ = \ \frac{\ell+c}{2}$$
On a donc bien : $\ell + \varepsilon' = c - \varepsilon'$.

□

10. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\beta \geqslant 1$, la variable aléatoire Y_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par $Y_n = X_{\lfloor n\beta\rfloor, n}$ où $\lfloor n\beta \rfloor$ désigne la partie entière de $n\beta$ et on pose $\theta' = r_\beta(X)$.
Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que : $\mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon])$.

Démonstration.
On a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) & \\ = & \mathbb{P}([-\varepsilon \leqslant Y_n - \theta' \leqslant \varepsilon]) & \\ = & \mathbb{P}([\theta' - \varepsilon \leqslant Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) & \\ = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon] \setminus [Y_n < \theta' - \varepsilon]) & \\ = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon] \cap [Y_n < \theta' - \varepsilon]) & \\ = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n < \theta' - \varepsilon]) & \textit{(car } [Y_n < \theta' - \varepsilon] \subset [Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]\textit{)} \\ = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon]) & \textit{(car, d'après } \textbf{\textit{8.b)}}\textit{, } X_{\lfloor n\beta\rfloor,n} \textit{ est une v.a.r. à densité)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon])}$$

□

b) En déduire que :

$$\mathbb{P}(\big[|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon\big]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) - \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$

Démonstration.

- Par définition de la v.a.r. Y_n :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) &= \mathbb{P}(\big[X_{\lfloor n\,\beta \rfloor, n} \leqslant \theta' + \varepsilon\big]) \\ &= \mathbb{P}(\big[N_{\theta'+\varepsilon,n} \geqslant \lfloor n\,\beta \rfloor\big]) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.a)}}\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right) \qquad \textit{(car } n > 0\textit{)} \end{aligned}$$

- De même :

$$\mathbb{P}(\big[Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon\big]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$

- Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(\big[|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon\big]) = \mathbb{P}(\big[Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon\big]) - \mathbb{P}(\big[Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon\big])$$

$$\boxed{\text{Donc : } \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right) - \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right).}$$

□

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = 1$.
Que peut-on en déduire concernant l'estimateur Y_n de $r_\beta(X)$?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le résultat obtenu à la question précédente, on souhaite appliquer les résultats des questions ***9.b)*** et ***9.c)*** à :

  1) $U_n = \dfrac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n}$ et $u_n = \dfrac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}$

  2) $U_n = \dfrac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n}$ et $u_n = \dfrac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}$

  Commençons par le premier cas.
  On démontre que toutes les hypothèses d'application des questions ***9.b)*** ou ***9.c)*** sont vérifiées.

  × D'après la question ***7.*** :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} - F_X(\theta' + \varepsilon)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En choisissant } c = F_X(\theta' + \varepsilon) \text{ et } U_n = \dfrac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n}\text{, on a bien :} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]) = 0.\end{array}}$$

× Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}$.
Montrons maintenant que (u_n) converge et déterminons sa limite.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière :

$$\lfloor n\,\beta \rfloor \ \leqslant\ n\,\beta \ <\ \lfloor n\,\beta \rfloor + 1$$

Donc :

$$n\,\beta - 1 \ <\ \lfloor n\,\beta \rfloor \leqslant n\,\beta$$

Comme $n > 0$, on obtient :

$$\beta - \frac{1}{n} \ <\ \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n} \ \leqslant\ \beta$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\beta + \dfrac{1}{n}\right) = \beta$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc, par théorème d'encadrement : } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \beta. \\ \text{On choisit alors : } \ell = \beta.\end{array}}$$

× Pour savoir si l'on applique la question ***9.b)*** ou la question ***9.c)***, il faut maintenant comparer les réels c et ℓ.
Par définition de $r_\beta(X)$:

$$\ell < c \ \Leftrightarrow\ \beta < F_X(\theta' + \varepsilon) \ \Leftrightarrow\ F_X(r_\beta(X)) < F_X(\theta' + \varepsilon)$$

Or, comme $X \in \mathcal{D}$, la fonction F_X est une bijection strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.
Donc :

$$\ell < c \ \Leftrightarrow r_\beta(X) < \theta' + \varepsilon$$

Or $\theta' = r_\beta(X)$ et $\varepsilon > 0$, donc la dernière assertion est vraie.

$$\boxed{\text{Par équivalence, on obtient donc : } \ell < c.}$$

× On est donc ici dans le cadre d'application de la question ***9.c)***. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right) = 1.}$$

× On démontrerait de même, avec la question ***9.b)***, en choisissant :

$$U_n = \frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n}, \quad u_n = \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}, \quad c = F_X(\theta' - \varepsilon) \quad \text{et} \quad \ell = \beta$$

la convergence suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\,\beta \rfloor}{n}\right]\right) = 0.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après la question précédente, on obtient donc :} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = 1 - 0 = 1.\end{array}}$$

- On sait :
$$\mathbb{P}\big(\big[|Y_n - \theta'| > \varepsilon\big]\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\big[|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon\big]\big)$$
Donc, d'après ce qui précède :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\big[|Y_n - \theta'| > \varepsilon\big]\big) = 0$$
D'où (Y_n) converge en probabilité vers θ'.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ est un estimateur convergent de } \theta' = r_\beta(X).}$$

Commentaire

Il peut être intéressant de garder en tête le résultat suivant : $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
Ce résultat est à savoir redémontrer. Détaillons cette démonstration.
Soit $x \in \,]0, +\infty[$.
Par définition de la partie entière : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Donc :
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$
D'où, comme $x > 0$:
$$1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$$
Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.
Ainsi, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$. C'est-à-dire : $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

□

11. On suppose que l'on a défini un fonction d'en-tête `function R = triCroissant(T)` qui renvoie le tableau des valeurs se trouvant dans `T` rangées dans l'ordre croissant.
Par exemple, si `T=[0 -1 0 2 4 2 3]` alors `disp(triCroissant(T))` affiche :

```
ans  =
     -1.   0.   0.   2.   2.   3.   4.
```

Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function r = VaR(X,beta)` qui renvoie la valeur de l'estimation obtenue avec l'estimateur Y_n pour $r_\beta(X)$ si le tableau `X` contient la réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et `beta` la valeur de β.

Démonstration.

```
function r = VaR(X,beta)
  n = length(X)
  Z = triCroissant(X)
  r = Z(floor(n ⋆ beta))
endfunction
```

Détaillons l'obtention de cette fonction.
D'après la question précédente, on sait que $Y_n = X_{\lfloor n\,\beta \rfloor, n}$ est un estimateur convergent de $r_\beta(X)$.
Pour déterminer Y_n à partir de $X_1, \ldots, X_n$, on souhaite donc :

1) définir n. Il s'agit de la taille de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$.
Donc on stocke cette valeur dans la variable `n` avec la commande suivante :

```
n = length(X)
```

2) obtenir une réalisation de $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$, c'est-à-dire ordonner une réalisation de $X_1, \ldots, X_n$ dans l'ordre croissant.
On stocke ce nouveau vecteur dans la variable `Z` avec la commande suivante :

```
Z = triCroissant(x)
```

3) sélectionner dans ce vecteur la réalisation de $X_{\lfloor n\,\beta \rfloor, n}$, ce qui correspond à la $\lfloor n\,\beta \rfloor^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur `Z`.
On stocke ce résultat dans la variable de sortie `r`, ce qui donne :

```
r = Z(floor(n * beta))
```

où la commande `floor` correspond à la fonction partie entière. □

Partie III - L'« Expected Shortfall » (ES)

On conserve les notations de la partie I.
Pour qu'une mesure de risque soit acceptable, on souhaite qu'elle vérifie un certaines propriétés.
On dit qu'une fonction ρ définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles est une **mesure de risque cohérente** sur $\mathcal{D}$ si elle vérifie les quatre propriétés :

(R_1) $\forall X \in \mathcal{D}, \forall c \in \mathbb{R},\ \rho(X+c) = \rho(X) + c\,;$

(R_2) $\forall X \in \mathcal{D}, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)\,;$

(R_3) $\forall (X,Y) \in \mathcal{D}^2$, si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ alors $\rho(X) \leqslant \rho(Y)\,;$

(R_4) $\forall (X,Y) \in \mathcal{D}^2$, telles que $X+Y \in \mathcal{D}$, $\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$.

12. Montrer que l'espérance est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

Démonstration.
Montrons que l'espérance vérifie les propriétés (R_1) à (R_4).
Soit $(X,Y) \in \mathcal{D}^2$. Soit $(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

- Par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(X+c) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(c) = \mathbb{E}(X) + c \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\lambda\, X) = \lambda\, \mathbb{E}(X)$$
Donc (R_1) et (R_2) sont vérifiées.
- Par croissance de l'espérance :
$$\text{si pour tout } \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega),\ \text{alors } \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$$
Donc (R_3) est vérifiée.
- Par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$
Donc, en particulier : $\mathbb{E}(X+Y) \leqslant \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
Ainsi, (R_4) est vérifiée.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'espérance est une mesure de risque sur } \mathcal{D}.}$$

□

13. La « Value at Risk » r_β est-elle une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$ pour toute valeur de $\beta \in\,]0,1[$? On détaillera si chacune des propriétés de (R_1) à (R_4) est satisfaite ou non.

Démonstration.

- D'après la question **4.a)**, r_β vérifie (R_1).
- D'après la question **4.b)**, r_β vérifie (R_2).
- D'après la question **5.**, r_β vérifie (R_3).
- D'après la question **3.**, si on considère :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, s^2\right)$$

Alors $r_{\frac{1}{4}}$ ne vérifie pas (R_4).
(en fait, pour tout $\beta < \frac{1}{2}$, r_β ne satisfait pas (R_4))

$$\boxed{\text{On en déduit que } r_\beta \text{ n'est pas une mesure de risque cohérente pour tout } \beta \in\,]0,1[.}$$

Commentaire

Attention : la question **3.** démontre :

$$\beta < \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ (R_4) \text{ n'est pas vérifié.}$$

Elle utilise pour cela un contre-exemple.
Cependant, ce résultat n'est pas une équivalence !
En particulier, rien ne dit :

$$\beta \geqslant \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ (R_4) \text{ est vérifiée.}$$

Pour démontrer un tel résultat, il faudrait considérer deux v.a.r. X et Y dans $\mathcal{D}$ quelconque (et non des v.a.r. gaussiennes).

□

Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, admettant une densité f_X. On définit l' « Expected Shortfall » de X de niveau de confiance β par :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\, dx \quad (1)$$

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout $\beta \in\,]0,1[$, ES_β est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$, assez « proche » de r_β.

14. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $ES_\beta(X)$ est bien définie, et que $ES_\beta(X) \geqslant r_\beta(X)$.

Démonstration.

- Comme $X \in \mathcal{D}$, en particulier la v.a.r. X admet une espérance.
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$ converge absolument.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$ converge aussi absolument.

$$\boxed{\text{On en déduit que } ES_\beta(X) \text{ est bien définie.}}$$

- Soit $x \geqslant r_\beta(X)$.
Alors, comme $f_X(x) \geqslant 0$ (car f_X est une densité), on obtient :
$$r_\beta(X)\, f_X(x) \ \leqslant \ x\, f_X(x)$$
Par croissance de l'intégrale (les bornes sont bien ordonnées) et comme les intégrales en présence convergent :
$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} r_\beta(X)\, f_X(X)\ dx \leqslant \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx$$
Or :
$$\begin{aligned}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} r_\beta(X)\, f_X(x)\ dx \ &= \ r_\beta(X) \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(x)\ dx \ = \ r_\beta(X)\, \mathbb{P}([X \geqslant r_\beta(X)]) \\ &= \ r_\beta(X)(1 - F_X(r_\beta(X)))\end{aligned}$$
De plus, par définition de $r_\beta(X)$: $F_X(r_\beta(X)) = \beta$. Donc :
$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} r_\beta(X)\, f_X(x)\ dx \ = \ r_\beta(X)(1-\beta)$$
D'où :
$$r_\beta(X)(1-\beta) \ \leqslant \ \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx$$
Comme $1-\beta > 0$:
$$\frac{1}{\cancel{1-\beta}} r_\beta(X)\cancel{(1-\beta)} \ \leqslant \ \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx$$
$$\boxed{\text{On en déduit, par définition de } ES_\beta(X) : r_\beta(X) \leqslant ES_\beta(X).}$$
□

b) À l'aide du changement de variable $t = F_X(x)$, établir :
$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 G_X(t)\ dt \quad (2)$$

Démonstration.
Soit $A \geqslant r_\beta(X)$.
On effectue le changement de variable $\boxed{t = F_X(x)}$.

$$\left|\begin{array}{l} t = F_X(x) \text{ (et donc } x = G_X(t)) \\ \hookrightarrow dt = f_X(x)\ dx \\ \bullet\ x = r_\beta(X) \ \Rightarrow \ t = F_X(r_\beta(X)) = \beta \\ \bullet\ x = A \ \Rightarrow \ t = F_X(A) \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : t \mapsto G_X(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_X (car $X \in \mathcal{D}$).
On obtient finalement :
$$\int_{r_\beta(X)}^{A} x\, f_X(x)\ dx = \int_\beta^{F_X(A)} G_X(t)\ dt$$
Or, comme F_X est une fonction de répartition : $\lim\limits_{A\to+\infty} F_X(A) = 1$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\int_\beta^1 G_X(t)\ dt.}$$
□

On pourra utiliser (1) ou (2) au choix dans la suite pour définir $ES_\beta(X)$.

15. a) Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_1).

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{D}$. Soit $c \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***4.a)*** : $r_\beta(X+c) = r_\beta(X) + c$.
- De plus, d'après la démonstration de la question ***4.a)*** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X+c}(x) = F_X(x-c)$$

On a admis en question ***4.a)*** que $X + c \in \mathcal{D}$. En particulier, $(X+c)$ est une v.a.r. à densité. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+c}(x) = f_X(x-c)$$

- On obtient alors avec (1) :

$$ES_\beta(X+c) \ = \ \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X+c)}^{+\infty} x\, f_{X+c}(x)\ dx \ = \ \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)+c}^{+\infty} x\, f_X(x-c)\ dx$$

On effectue le changement de variable $\boxed{t = x - c}$.

$$\left|\begin{array}{l} t = x - c \text{ (et donc } x = t + c) \\ \hookrightarrow dt = \ dx \\ \bullet\ x = r_\beta(X) + c \ \Rightarrow \ t = r_\beta(X) \\ \bullet\ x = +\infty \ \Rightarrow \ t = +\infty \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : t \mapsto t + c$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[r_\beta(X), +\infty[$.
On obtient finalement :

$$\begin{aligned} ES_\beta(X+c) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} (t+c) f_X(t)\ dt \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left(\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt + c \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(t)\ dt \right) \\ &= ES_\beta(X) + \frac{c}{1-\beta}(1 - F_X(r_\beta(X))) \\ &= ES_\beta(X) + \frac{c}{\cancel{1-\beta}}\cancel{(1-\beta)} && \textit{(par définition de } r_\beta(X)\textit{)} \\ &= ES_\beta(X) + c \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } ES_\beta \text{ vérifie } (R_1).}$$

□

b) Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_2).

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***4.b)*** : $r_\beta(\lambda\, X) = \lambda\, r_\beta(X)$.
- De plus, d'après la démonstration de la question ***4.b)*** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{\lambda\, X}(x) = F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

On a admis en question ***4.b)*** que $\lambda X \in \mathcal{D}$. En particulier, λX est une v.a.r. à densité.
On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\lambda X}(x) = \frac{1}{\lambda} f_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

- On obtient alors avec (1) :

$$ES_\beta(\lambda X) \; = \; \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(\lambda X)}^{+\infty} x \, f_{\lambda X}(x) \; dx \; = \; \frac{1}{1-\beta} \int_{\lambda r_\beta(X)}^{+\infty} x \, \frac{1}{\lambda} f_X\left(\frac{x}{\lambda}\right) \; dx$$

On effectue le changement de variable $\boxed{t = \dfrac{x}{\lambda}}$.

$$\left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x}{\lambda} \text{ (et donc } x = \lambda t) \\ \hookrightarrow dt = \dfrac{1}{\lambda} \; dx \quad \text{ et } \quad dx = \lambda \; dt \\ \bullet \; x = \lambda r_\beta(X) \; \Rightarrow \; t = r_\beta(X) \\ \bullet \; x = +\infty \; \Rightarrow \; t = +\infty \text{ (car } \lambda > 0) \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : t \mapsto \lambda t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[r_\beta(X), +\infty[$.
On obtient finalement :

$$\begin{aligned} ES_\beta(\lambda X) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} \lambda t \, f_X(t) \; dt \\ &= \lambda \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t \, f_X(t) \; dt \\ &= \lambda \, ES_\beta(X) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } ES_\beta \text{ vérifie } (R_2).}$

□

16. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Montrer que $ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.b)*** : $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$.
  Donc, en particulier : $r_\beta(X) \geqslant 0$. D'où :

$$ES_\beta(X) \; = \; \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \, f_X(x) \; dx \; = \; \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} \lambda \, x \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \; dx$$

- Soit $A \geqslant r_\beta(X)$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\left| \begin{array}{lllllll} u(x) & = & x & \quad & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \quad & v(x) & = & -\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[r_\beta(X), A]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{r_\beta(X)}^{A} \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx &= \Big[-x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \Big]_{r_\beta(X)}^{A} + \int_{r_\beta(X)}^{A} \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx \\
&= -A\mathrm{e}^{-\lambda\, A} + r_\beta(X)\, \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} + \left[-\frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \right]_{r_\beta(X)}^{A} \\
&= -A\mathrm{e}^{-\lambda\, A} + r_\beta(X)\, \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} - \frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, A} + \frac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right) - A\mathrm{e}^{-\lambda\, A} - \frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, A}
\end{aligned}$$

- Or : $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, A} = 0$.

  De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{A \to +\infty} A\mathrm{e}^{-\lambda\, A} = 0$.

  Donc :

$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx = \mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right)$$

- Or, d'après la question ***2.b)*** : $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$. Donc :

$$\mathrm{e}^{-\lambda\, r_\beta(X)} = \mathrm{e}^{-\cancel{\lambda} \times \left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}} \ln(1-\beta)\right)} = \mathrm{e}^{\ln(1-\beta)} = 1-\beta$$

  D'où :

$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx = (1-\beta) \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right)$$

- On en déduit :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{\cancel{1-\beta}} \times \cancel{(1-\beta)} \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right) = r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda}}$$

□

b) En déduire que $ES_\beta(X) \underset{\beta \to 1}{\sim} r_\beta(X)$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\frac{ES_\beta(X)}{r_\beta(X)} = \frac{r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda}}{r_\beta(X)} = 1 + \frac{1}{\lambda\, r_\beta(X)}$$

Or, d'après la question ***2.b)*** : $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$. Donc :

$$\frac{ES_\beta(X)}{r_\beta(X)} = 1 + \frac{1}{\cancel{\lambda} \left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}} \ln(1-\beta)\right)} = 1 - \frac{1}{\ln(1-\beta)}$$

De plus : $\lim\limits_{\beta \to 1} \ln(1-\beta) = -\infty$. D'où :

$$\lim_{\beta \to 1} \frac{ES_\beta(X)}{r_\beta(X)} = 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } ES_\beta(X) \underset{\beta \to 1}{\sim} r_\beta(X)}$$

□

17. On suppose dans cette question que X suit la loi normale centrée réduite.

a) Montrer $ES_\beta(X) = \dfrac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))}$.

Démonstration.
Par définition de φ :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \ = \ \frac{1}{1-\beta} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Soit $A \in [r_\beta(X), +\infty[$.

$$\int_{r_\beta(X)}^{A} x \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \ = \ \Big[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_{r_\beta(X)}^{A} \ = \ -\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{(r_\beta(X))^2}{2}}$$

Or : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = 0$.
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$ converge et : $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \mathrm{e}^{-\frac{(r_\beta(X))^2}{2}}$.
De plus, par définition de $r_\beta(X)$: $\beta = \Phi(r_\beta(X))$. Donc :

$$ES_\beta(X) \ = \ \frac{1}{1-\Phi(r_\beta(X))} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{(r_\beta(X))^2}{2}} \ = \ \frac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))}$$

$$\boxed{ES_\beta(X) = \frac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))}}$$

□

b) Pour tout $x > 0$, établir l'égalité : $1 - \Phi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \, dt$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Par définition de Φ :

$$1-\Phi(x) \ = \ 1 - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) \, dt \ = \ \int_x^{+\infty} \varphi(t) \, dt \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \times t \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

- Soit $A \geqslant x$. On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante.

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \dfrac{1}{t} & \quad & u'(t) & = & -\dfrac{1}{t^2} \\[2ex] v'(t) & = & t \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} & \quad & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_x^A \frac{1}{t} \, t \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \ &= \ \Big[-\frac{1}{t} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \Big]_x^A - \int_x^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} \, dt \\ &= \ -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{-A^2}{2}}}{A} + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} \, dt \end{aligned}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{A} = 0$.

  De plus :

$$\int_x^A \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,dt \;=\; -\frac{e^{\frac{-A^2}{2}}}{A} + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^A \frac{1}{t}\,t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \;=\; -\frac{e^{\frac{-A^2}{2}}}{A} + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \sqrt{2\pi}\int_x^A \varphi(t)\,dt$$

  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,dt$ converge, car l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge.

- On en déduit :

$$\begin{aligned}1-\Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,dt\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,dt\\ &= \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ 1-\Phi(x) \;=\; \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt}$$

□

c) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\displaystyle 0 \leqslant \int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{x^2}\,(1-\Phi(x))$.

En déduire que : $\displaystyle 1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Soit $t \geqslant x$. Alors, par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $]0,+\infty[$: $\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

  De plus : $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$. Donc :

$$0 \;\leqslant\; \frac{1}{t^2} \;\leqslant\; \frac{1}{x^2}$$

  Or, comme φ est une densité, en particulier : $\varphi(t) \geqslant 0$. D'où :

$$0 \;\leqslant\; \frac{\varphi(t)}{t^2} \;\leqslant\; \frac{\varphi(t)}{x^2}$$

- Par croissance de l'intégrale (les bornes sont bien ordonnées) et comme les intégrales en présence sont convergentes :

$$0 \;\leqslant\; \int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \;\leqslant\; \int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{x^2}\,dt$$

- Or :

$$\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{x^2}\,dt \;=\; \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt \;=\; \frac{1}{x^2}\,\mathbb{P}([X \geqslant x]) \;=\; \frac{1}{x^2}(1-\Phi(x))$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x > 0,\ 0 \;\leqslant\; \int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \;\leqslant\; \frac{1}{x^2}(1-\Phi(x)).}$$

Commentaire

Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
Afin de comparer deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$:

1) on cherche d'abord à comparer leurs intégrandes, c'est-à-dire montrer :

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t) \quad \text{ou} \quad \forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant g(t)$$

2) on utilise ensuite la croissance de l'intégrale (si les bornes a et b sont bien ordonnées, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

Soit $x > 0$.

- D'après la question précédente :

$$-\frac{1}{x^2}(1-\Phi(x)) \ \leqslant\ -\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \ \leqslant\ 0$$

  Donc, d'après la question ***17.b)***, en ajoutant $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ à chaque membre de cet encadrement :

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{1}{x^2}(1-\Phi(x)) \ \leqslant\ 1-\Phi(x) \ \leqslant\ \frac{\varphi(x)}{x}$$

- On en déduit :

$$1-\Phi(x) \ \leqslant\ \frac{\varphi(x)}{x} \ \leqslant\ 1-\Phi(x) + \frac{1}{x^2}(1-\Phi(x)) = (1-\Phi(x))\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

  D'où, comme $1-\Phi(x) > 0$:

$$1 \ \leqslant\ \frac{\frac{\varphi(x)}{x}}{1-\Phi(x)} \ \leqslant\ 1+\frac{1}{x^2}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$.

  Donc, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\varphi(x)}{x}}{1-\Phi(x)} = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } 1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}.}$$

□

d) En conclure que l'on a aussi dans ce cas : $ES_\beta(X) \underset{\beta\to1}{\sim} r_\beta(X)$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)(iii)*** : $r_\beta(X) = \Phi^{-1}(\beta)$.
  Or, d'après la question ***3.a)(i)***, la fonction Φ réalise une bijection strictement croissante de $]-\infty,+\infty[$ sur $]0,1[$.
  On en déduit : $\displaystyle\lim_{\beta\to1} \Phi^{-1}(\beta) = +\infty$. D'où : $\displaystyle\lim_{\beta\to1} r_\beta(X) = +\infty$.

- De plus, d'après la question précédente : $1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

  D'où : $1-\Phi(r_\beta(X)) \underset{\beta\to 1}{\sim} \dfrac{\varphi(r_\beta(X))}{r_\beta(X)}$.

  Ainsi, d'après la question ***17.a)*** :

$$ES_\beta(X) = \frac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))} \underset{\beta\to 1}{\sim} \frac{\varphi(r_\beta(X))}{\frac{\varphi(r_\beta(X))}{r_\beta(X)}} = \cancel{\varphi(r_\beta(X))}\ \frac{r_\beta(X)}{\cancel{\varphi(r_\beta(X))}} = r_\beta(X)$$

$$\boxed{ES_\beta(X) \underset{\beta\to 1}{\sim} r_\beta(X)}$$

□

Dans les questions qui suivent, X est une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

- On note h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \max(x,0)$.
- On admet que si U et V sont deux variables aléatoires telles que, $0 \leqslant U \leqslant V$ et $\mathbb{E}(V)$ existe alors $\mathbb{E}(U)$ existe et $0 \leqslant \mathbb{E}(U) \leqslant \mathbb{E}(V)$.
- On note pour tout événement A, $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement A. Rappelons qu'il s'agit de la variable aléatoire prenant la valeur 1 si A est réalisé, et la valeur 0 sinon.

18. a) Montrer que $h(X - r_\beta(X))$ admet une espérance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}\left(h(X-r_\beta(X))\right) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t)\ dt - (1-\beta)r_\beta(X)$$

où f_X désigne une densité de X.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  Par définition de la fonction h :

$$h(t-r_\beta(X)) \ = \ \max(t-r_\beta(X),0) \ = \ \begin{cases} t-r_\beta(X) & \text{si } t-r_\beta(X) \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall t\in\mathbb{R},\ h(t-r_\beta(X)) \ = \ \begin{cases} t-r_\beta(X) & \text{si } t \geqslant r_\beta(X) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $h(X - r_\beta(X))$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-r_\beta(X))f_X(t)\ dt$ converge absolument. Or :
  - × comme f_X est une densité : $\forall t\in\mathbb{R},\ f_X(t) \geqslant 0$;
  - × d'après ce qui précède : $\forall t\in\mathbb{R},\ h(t-r_\beta(X)) \geqslant 0$.

  Donc cela revient à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-r_\beta(X))f_X(t)\ dt$ converge.
- Toujours d'après ce qui précède, la fonction $t \mapsto h(t-r_\beta(X))$ est nulle en dehors de $[r_\beta(X), +\infty[$.
  Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-r_\beta(X))f_X(t)\ dt \ = \ \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} h(t-r_\beta(X))f_X(t)\ dt$$

- Soit $A \geqslant r_\beta(X)$.
  Par définition de la fonction $t \mapsto h(t - r_\beta(X))$ sur $[r_\beta(X), +\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_{r_\beta(X)}^{A} h(t - r_\beta(X)) f_X(t)\, dt &= \int_{r_\beta(X)}^{A} (t - r_\beta(X)) f_X(t)\, dt \\ &= \int_{r_\beta(X)}^{A} t\, f_X(t)\, dt - r_\beta(X) \int_{r_\beta(X)}^{A} f_X(t)\, dt\end{aligned}$$

- Or, $X \in \mathcal{D}$, donc la v.a.r. X admet une espérance.
  Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt$ converge absolument.
  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt$ converge absolument.
- De plus, par définition de $r_\beta(X)$:

$$\int_{r_\beta(X)}^{A} f_X(t)\, dt = F_X(A) - F_X(r_\beta(X)) = F_X(A) - \beta \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - \beta$$

- On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)) f_X(t)\, dt$ converge.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } h(X - r_\beta(X)) \text{ admet une espérance.}}$$

  De plus :

$$\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)) f_X(t)\, dt = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt - r_\beta(X)(1 - \beta)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X)) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt - (1 - \beta) r_\beta(X)}$$

□

b) En déduire :

$$ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}\left(h(X - r_\beta(X))\right)$$

Démonstration.
D'après l'équation (1) :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1 - \beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt$$

Or, d'après la question précédente :

$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt = \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) + (1 - \beta) r_\beta(X)$$

Donc :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1 - \beta}\Big(\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) + (1 - \beta) r_\beta(X)\Big) = \frac{1}{1 - \beta}\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) + r_\beta(X)$$

$$\boxed{ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1 - \beta}\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X)))}$$

□

19. En utilisant la méthode de Monte-Carlo, dont on supposera la validité, et la fonction `VaR` définie dans la question ***11.***, écrire une fonction **Scilab** qui calcule une valeur approchée de $ES_\beta(X)$ à partir de la réalisation d'un échantillon de taille n de la loi de X dont les valeurs se trouvent dans le tableau **Scilab** `X` et de la valeur de β se trouvant dans la variable **Scilab** `beta`.

Démonstration.
On souhaite obtenir une valeur approchée de $ES_\beta(X)$. Pour ce faire, on doit tout d'abord obtenir une valeur approchée de l'espérance de la v.a.r. $V = h(X - r_\beta(X))$.

- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de cette espérance est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10000$ par exemple) la v.a.r. V.
    Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(v_1, \dots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(V_1, \dots, V_N)$ de la v.a.r. V.
  - × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \ \simeq \ \mathbb{E}(V)$$

- Il reste à obtenir le N-uplet $(v_1, \dots, v_N)$. Pour ce faire, on dispose d'un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X.
  Cette observation permet d'obtenir $(v_1, \dots, v_N)$ en écrivant :

$$v_i \ = \ h\big(x_i - r_\beta(X)\big)$$

  Il est à noter que, comme le suggère l'énoncé, la valeur de $r_\beta(X)$ sera obtenue par l'appel à la fonction `VaR`.
- La valeur approchée de $ES_\beta(X)$ est alors obtenue par le calcul : $r_\beta(X) + \dfrac{1}{1-\beta} \, \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} v_i$.
- Ce qui aboutit à la fonction suivante :

```
1 function ES = ExpectedShortfall(X, beta)
2     N = length(X)
3     V = zeros(1, N)
4     r = VaR(X, beta)
5     for i=1:N
6         V(i) = max(X(i)-r, 0)
7     end
8     ES = r + 1/(1-beta) * 1/N * sum(V)
9 endfunction
```

  Détaillons les différents éléments de ce code :
  - × le paramètre **X** correspond à l'observation $(x_1, \dots, x_N)$.
  - × en ligne 2, on récupère la taille de l'échantillon fourni en paramètre.
  - × en ligne 3, on crée une matrice ligne de taille N permettant à terme de stocker l'observation $(v_1, \dots, v_N)$.
  - × en lignes 5 à 7, on effectue une boucle permettant d'obtenir successivement chaque v_i à l'aide de la valeur x_i fournit en paramètre.
  - × en ligne 8, on obtient la valeur approchée de $ES_\beta(X)$ en effectuant le calcul annoncé.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On s'est servi en ligne 6 de la fonction `max` prédéfinie en **Scilab**.
  Il était aussi possible d'utiliser une structure conditionnelle :

```
6        if X(i)-r > 0 then
7            V(i) = X(i)-r
8        else
9            V(i) = 0
10       end
```

- Enfin, il est possible de calculer la somme $\sum\limits_{i=1}^{N} v_i$ sans créer une matrice de taille N.
  Pour ce faire, on crée une variable `S` qu'on initialise à 0 et qu'on met à jour dans la boucle. On obtient le programme suivant :

```
1  function ES = ExpectedShortfall(X, beta)
2      N = length(X)
3      S = 0
4      r = VaR(X, beta)
5      for i=1:N
6          S = S + max(X(i)-r, 0)
7      end
8      ES = r + 1/(1-beta) * 1/N * S
9  endfunction
```

□

20. Soit Z une variable aléatoire telle que : $\mathbb{E}(Z) = 1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.

a) Justifier l'égalité entre variables aléatoires : $h(X - r_\beta(X)) = (X - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.
Deux cas se présentent.

- Si $X(\omega) > r_\beta(X)$, alors :
  - × par définition de la v.a.r. indicatrice $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}$: $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) = 1$.
    Donc :
    $$(X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) \;=\; X(\omega) - r_\beta(X)$$
  - × par définition de $t \mapsto h(t - r_\beta(X))$: $h(X(\omega) - r_\beta(X)) = X(\omega) - r_\beta(X)$.

  D'où :
  $$h(X(\omega) - r_\beta(X)) \;=\; (X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)$$
- Si $X(\omega) \leqslant r_\beta(X)$, alors :
  - × par définition de la v.a.r. indicatrice $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}$: $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) = 0$.
    Donc :
    $$(X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) \;=\; 0$$
  - × par définition de $t \mapsto h(t - r_\beta(X))$: $h(X(\omega) - r_\beta(X)) = 0$.

D'où :
$$h(X(\omega) - r_\beta(X)) \; = \; (X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}(\omega)$$
Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $h(X(\omega) - r_\beta(X)) = (X(\omega) - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}(\omega)$.

$$\boxed{h(X - r_\beta(X)) = (X - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}}$$

□

b) Montrer que $\mathbb{E}(XZ)$ existe et établir l'égalité :
$$ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) = \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}\left[(X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\right]$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.
  Donc, comme $|X|$ est à valeurs positives : $0 \; \leqslant \; |X|\, Z \; \leqslant \; \dfrac{1}{1-\beta}\, |X|$.
  D'où, comme Z est aussi à valeurs positives :
  $$0 \; \leqslant \; |XZ| \; \leqslant \frac{1}{1-\beta}\, |X| \quad (\star)$$
- Démontrons alors que $|X|$ admet une espérance.
  D'après le théorème de transfert, $|X|$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t| \; f_X(t) \; dt$ est absolument convergente.
  Or, comme $X \in \mathcal{D}$, alors X admet une espérance. Cela signifie que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \; f_X(t) \; dt$ est absolument convergente. Enfin, comme f est à valeurs positives :
  $$\forall t \in \mathbb{R}, \; |t \; f_X(t)| \; = \; |t| \; |f_X(t)| \; = \; |t| \; f_X(t)$$
  On en conclut que $|X|$ admet une espérance si et seulement si X admet une espérance.
  $$\boxed{\text{Et comme } X \text{ admet une espérance, il en est de même de } |X|.}$$
- Or, il est précisé dans l'énoncé la propriété suivante :
  $$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant U \leqslant V \\ \mathbb{E}(V) \text{ existe} \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}(U) \text{ existe} \\ 0 \leqslant \mathbb{E}(U) \leqslant \mathbb{E}(V) \end{array} \right. \qquad (\star\star)$$
  La propriété $(\star)$ étant vérifiée, et comme $|X|$ admet une espérance, on peut appliquer la propriété rappelée ci-dessus à $U = |XZ|$ et $V = \dfrac{1}{1-\beta}|X|$.
  On en déduit que la v.a.r. $|XZ|$ admet une espérance.
  $$\boxed{\text{Ainsi, } XZ \text{ admet une espérance.}}$$
- Il s'agit maintenant d'établir l'égalité énoncée.
  Tout d'abord, d'après la question ***20.a)*** :
  $$\begin{aligned} (X - r_\beta(X))\Big(\mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z\Big) \; &= \; (X - r_\beta(X))\, \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]} - (X - r_\beta(X))(1-\beta)Z \\ &= \; h(X - r_\beta(X)) - (1-\beta)XZ + (1-\beta)r_\beta(X)Z \end{aligned}$$

- De plus les v.a.r. $h(X - r_\beta(X))$, XZ et Z admettent une espérance.
  Ainsi, la v.a.r. $(X - r_\beta(X))\Big(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z\Big)$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
  Enfin, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big) \\
= \ & \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) - (1-\beta)\mathbb{E}(XZ) + (1-\beta)r_\beta(X)\mathbb{E}(Z) \\
= \ & (1-\beta)(ES_\beta(X) - \cancel{r_\beta(X)}) - (1-\beta)\mathbb{E}(XZ) + \cancel{(1-\beta)r_\beta(X)} \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{18.b)}} \textit{ et car } \mathbb{E}(Z) = 1 \textit{ d'après l'énoncé)} \\
= \ & (1-\beta)\Big(ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ)\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) = \frac{1}{1-\beta}\,\mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big)}$$

Commentaire

- Pour les v.a.r. à densité ou discrètes, la propriété :

  $$X \text{ admet une espérance } \Leftrightarrow \ |X| \text{ admet une espérance}$$

  est immédiate par définition de l'espérance (comme démontré plus haut).
- Elle est cependant bien moins triviale pour des v.a.r. quelconques puisque l'on n'a pas accès à une expression explicite de l'espérance.
  On peut cependant démontrer l'implication :

  $$|X| \text{ admet une espérance } \Rightarrow \ X \text{ admet une espérance}$$

- Détaillons cette démonstration.
  On suppose que $|X|$ admet une espérance.
  × On commence par définir les v.a.r. suivantes :

  $$X^+ = \frac{|X| + X}{2} \quad \text{et} \quad X^- = \frac{|X| - X}{2}$$

  La v.a.r. $X^+ = \max(X, 0)$ est la partie positive de X.
  La v.a.r. $X^- = -\min(X, 0)$ est la partie négative de X.
  × Par définition de X^+ et X^-, on a :

  $$0 \leqslant X^+ \leqslant |X| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant X^- \leqslant |X|$$

  Or $|X|$ admet une espérance.
  Donc, d'après la propriété ($\star\star$) de l'énoncé, les v.a.r. X^+ et X^- admettent des espérances.
  × Enfin, on remarque :

  $$X = X^+ - X^-$$

  Donc X admet une espérance en tant que différence de v.a.r. en admettant une.

□

c) En déduire que $ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \geqslant 0$.
Comment choisir Z pour que $ES_\beta(X) = \mathbb{E}(XZ)$?

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \ = \ \frac{1}{1-\beta}\,\mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big)$$

Montrons donc :

$$(X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) \geqslant 0$$

Soit $\omega \in \Omega$. D'après l'énoncé : $0 \leqslant Z(\omega) \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$. Or :

$$0 \leqslant Z(\omega) \leqslant \frac{1}{1-\beta} \ \Leftrightarrow \ 0 \leqslant (1-\beta)Z(\omega) \leqslant 1 \ \Leftrightarrow \ -1 \leqslant -(1-\beta)Z(\omega) \leqslant 0$$

Deux cas se présentent alors.

- Si $X(\omega) > r_\beta(X)$, alors :
  - × $X(\omega) - r_\beta(X) > 0$;
  - × $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) = 1$. Donc : $0 \ \leqslant \ \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega) \ \leqslant \ 1$.

  D'où : $(X(\omega) - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega)) \ \geqslant \ 0$.
- Si $X(\omega) \leqslant r_\beta(X)$, alors :
  - × $X(\omega) - r_\beta(X) \leqslant 0$;
  - × $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) = 0$. Donc : $-1 \ \leqslant \ \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega) \ \leqslant \ 0$.

  D'où : $(X(\omega) - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega)) \ \geqslant \ 0$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega, \ (X(\omega) - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega) - (1-\beta)Z(\omega)) \ \geqslant \ 0$.

$$\boxed{(X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) \ \geqslant \ 0}$$

Par positivité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big) \ \geqslant \ 0$$

De plus : $\beta \in \,]0,1[$. Donc $\dfrac{1}{1-\beta} > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \geqslant 0.}$$

Tout d'abord :

$$\begin{array}{rll} & ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) = 0 & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{1}{1-\beta}\, \mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big) = 0 & \\ \Leftrightarrow & \mathbb{E}\Big((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\Big) = 0 & \textit{(car } \dfrac{1}{1-\beta} \neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & (X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) = 0 & \textit{(par positivité de l'espérance, car } (X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) \textit{ est une v.a.r. positive)} \\ \Leftrightarrow & \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z = 0 & \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité, donc n'est pas la v.a.r. constante égale à } r_\beta(X)\textit{)} \\ \Leftrightarrow & Z = \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} & \end{array}$$

Vérifions que $Z_0 = \dfrac{1}{1-\beta}$ vérifie les deux propriétés énoncées en début de question.

- Par définition d'une v.a.r. indicatrice : $0 \leqslant \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} \leqslant 1$.

  Donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.

  $$\boxed{\text{D'où : } 0 \leqslant Z_0 \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}.}$$

- Montrons que $\mathbb{E}(Z_0) = 1$.
  Pour cela, on note : $Y = \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}$.
  - × Par définition d'une v.a.r. indicatrice : $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.
  - × Donc la v.a.r. Y suit une loi de Bernoulli de paramètre :

  $$p = \mathbb{P}([Y=1]) = \mathbb{P}\Big(\big[\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} = 1\big]\Big) = \mathbb{P}([X > r_\beta(X)]) = 1 - F_X(r_\beta(X)) = 1 - \beta$$

  $$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(1-\beta)}$$

  On en déduit :

  $$\mathbb{E}(Z_0) = \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1-\beta} Y\right) = \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\cancel{1-\beta}}\cancel{(1-\beta)} = 1$$

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Z_0) = 1}$$

$$\boxed{\text{Finalement, en choisissant } Z_0 = \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}, \text{ on obtient : } ES_\beta(X) = \mathbb{E}(XZ_0).}$$ □

21. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des variables aléatoires Z sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}(Z) = 1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.
Justifier l'égalité : $ES_\beta(X) = \max\limits_{Z \in \mathcal{K}} \mathbb{E}(XZ)$.

Démonstration.

- D'après la question ***20.c)*** :
$$\forall T \in \mathcal{K}, \ ES_\beta(X) \geqslant \mathbb{E}(XT)$$
Cette inégalité est vérifiée pour tout $T \in \mathcal{K}$.
Donc : $ES_\beta(X) \geqslant \max\limits_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ))$.
- De plus : $ES_\beta(X) = \mathbb{E}(XZ_0)$ et $Z_0 \in \mathcal{K}$. Donc : $\max\limits_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ)) = \mathbb{E}(XZ_0)$.

$$\boxed{\text{D'où : } ES_\beta(X) \ = \ \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ))}$$

□

22. Démontrer que, pour tout $\beta \in \,]0, 1[$, la fonction ES_β est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

Démonstration.
Soit $\beta \in \,]0, 1[$.

- On sait déjà, d'après les questions ***15.a)*** et ***15.b)*** que ES_β vérifie (R_1) et (R_2).
- Soit $(X, Y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $X \leqslant Y$.
Soit $T \in \mathcal{K}$. Alors, comme $T \geqslant 0$: $XT \leqslant YT$.
Donc, par croissance de l'espérance :
$$\mathbb{E}(XT) \ \leqslant \ \mathbb{E}(YT) \ \leqslant \ \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(YZ))$$
Cette inégalité est réalisée pour tout $T \in \mathcal{K}$.
D'où : $\max\limits_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ)) \leqslant \max\limits_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(YZ))$.
D'après la question précédente, on en déduit :
$$ES_\beta(X) \leqslant ES_\beta(Y)$$
$$\boxed{\text{Ainsi, } ES_\beta \text{ vérifie } (R_3).}$$
- Soit $(X, Y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $X + Y \in \mathcal{D}$.
Soit $T \in \mathcal{D}$. Alors, par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}((X+Y)T) \ = \ \mathbb{E}(XT) + \mathbb{E}(YT) \ \leqslant \ \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ)) + \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(YZ))$$
Cette inégalité est réalisée pour tout $T \in \mathcal{K}$. D'où :
$$\max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}((X+Y)Z)) \ \leqslant \ \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(XZ)) + \max_{Z \in \mathcal{K}} (\mathbb{E}(YZ))$$
D'après la question précédente, on en déduit :
$$ES_\beta(X+Y) \ \leqslant \ ES_\beta(X) + ES_\beta(Y)$$
$$\boxed{\text{Ainsi, } ES_\beta \text{ vérifie } (R_4).}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } ES_\beta \text{ est une mesure de risque cohérente sur } \mathcal{D}.}$$

□