ESSEC I 2016

On s'intéresse dans ce problème à deux mesures du risque utilisées par les marchés financiers.
Pour cela, on considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, qui modélisent des pertes financières subies par des acteurs économiques sur une période donnée.
Toutes les variables aléatoires définies dans ce problème sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité X vérifiant :

- X admet une espérance notée $\mathbb{E}(X)$.
- il existe un intervalle I_X (dont on admet l'unicité) sur lequel la fonction de répartition de X, notée F_X, réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.
  On note G_X la bijection réciproque, définie de $]0,1[$ sur I_X. Les notations F_X et G_X seront utilisées dans tout le sujet.

Dans tout le problème β est un réel appartenant à $]0,1[$ et représentant un niveau de confiance.

Partie I - Définition et propriétés de la « Value at Risk »

1. Soit $X \in \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe un unique réel v tel que $\mathbb{P}([X \leqslant v]) = \beta$, et que l'on a $v = G_X(\beta)$.

- On définit alors $r_\beta(X)$ appelé la « Value at Risk »au niveau de confiance β de X, par $r_\beta(X) = G_X(\beta)$. C'est une grandeur qui permet d'évaluer le risque pris par l'acteur qui détient l'actif dont les pertes sont modélisées par X.
- **On remarque que $r_\beta(X)$ est égal au capital minimal qu'il faut détenir pour être en mesure de couvrir les pertes de l'actif associé à X avec une probabilité égale à β.**

2. On suppose que, dans cette question, X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$.

a) Rappeler la valeur de $F_X(x)$ pour tout réel x.

b) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que l'on a $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\beta)$.

3. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 pour X et de paramètres μ et s^2 pour Y.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ la densité usuelle de cette loi.

a) (i) Justifier que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. On note Φ^{-1} la bijection réciproque.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F_X(x)$ en fonction de Φ, m, σ et x.

(iii) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que $r_\beta(X) = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)$.

b) Quelle est la loi de $X+Y$?
En déduire $r_\beta(X+Y)$ en fonction de m, μ, σ, s et β.

c) Pour quels $\beta \in]0,1[$ a-t-on $r_\beta(X+Y) \leqslant r_\beta(X) + r_\beta(Y)$?

4. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, c un réel et λ un réel strictement positif.
On pose $Y = X + c$ et $Z = \lambda X$ et on admet que Y et Z appartiennent à $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c$.

b) Montrer que $r_\beta(Z) = \lambda\, r_\beta(X)$.

5. Soit X et Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathcal{D}$ et telles que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.

a) Comparer, pour tout réel x, $F_X(x)$ et $F_Y(x)$.

b) En déduire que $r_\beta(X) \leqslant r_\beta(Y)$.

Partie II - Estimation de la valeur de $r_\beta(X)$

Dans la pratique la loi de X n'est pas totalement connue et on a besoin d'avoir une idée assez précise de la « Value at Risk » ne connaissant qu'un certain nombre de valeurs de cette variable.
On modélise cette situation en supposant, dans cette partie, que la loi de X dépend d'un paramètre θ inconnu appartenant à un sous ensemble Θ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, que $r_\beta(X) = g(\theta)$ où g est une fonction définie sur Θ et que pour tout $\theta \in \Theta$, $X \in \mathcal{D}$.
On utilise aussi les hypothèses et notations suivantes :

- $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles appartenant à $\mathcal{D}$, mutuellement indépendantes, de même loi que X.
- pour tout $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on ordonne $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ dans l'ordre croissant et on note alors $X_{1,n}(\omega), \dots, X_{n,n}(\omega)$ les valeurs obtenues.
  En particulier, $X_{1,n}(\omega)$ est la plus petite des valeurs $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et $X_{n,n}(\omega)$ la plus grande.
- on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, les $X_{k,n}$ sont des variables aléatoires.
- pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on définit la variable aléatoire $N_{x,n}$ ainsi :
  pour tout $\omega \in \Omega$, $N_{x,n}(\omega)$ est le nombre d'indices k compris entre 1 et n tels que l'on ait $X_k(\omega) \leqslant x$.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_{x,n}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de $N_{x,n}$.

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il y a égalité entre les événements $[X_{k,n} \leqslant x]$ et $[N_{x,n} \geqslant k]$.

b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{k,n} \leqslant x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

et que $X_{k,n}$ est une variable aléatoire à densité.

9. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et c un réel. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([|U_n - c| \geqslant \varepsilon]) = 0$$

On considère $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergente de réels et on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

a) Établir que : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > c \\ 1 & \text{si } t < c \end{cases}$.

b) On suppose $\ell > c$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{\ell - c}{2}$.
En remarquant que $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$, montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant c + \varepsilon$.
En déduire que $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 0$.

c) Montrer de même que si $\ell < c$, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([U_n \geqslant u_n]) = 1$.

10. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\beta \geqslant 1$, la variable aléatoire Y_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par $Y_n = X_{\lfloor n\beta \rfloor, n}$ où $\lfloor n\beta \rfloor$ désigne la partie entière de $n\beta$ et on pose $\theta' = r_\beta(X)$.
Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que : $\mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon]) - \mathbb{P}([Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon])$.

b) En déduire que :

$$\mathbb{P}(\big[|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon\big]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) - \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon]) = 1$.
Que peut-on en déduire concernant l'estimateur Y_n de $r_\beta(X)$?

11. On suppose que l'on a défini un fonction d'en-tête `function R = triCroissant(T)` qui renvoie le tableau des valeurs se trouvant dans `T` rangées dans l'ordre croissant.
Par exemple, si `T=[0 -1 0 2 4 2 3]` alors `disp(triCroissant(T))` affiche :

```
ans  =
     -1.   0.   0.   2.   2.   3.   4.
```

Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function r = VaR(X,beta)` qui renvoie la valeur de l'estimation obtenue avec l'estimateur Y_n pour $r_\beta(X)$ si le tableau `X` contient la réalisation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ et `beta` la valeur de β.

Partie III - L'« Expected Shortfall »(ES)

On conserve les notations de la partie I.
Pour qu'une mesure de risque soit acceptable, on souhaite qu'elle vérifie un certaines propriétés.
On dit qu'une fonction ρ définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles est une **mesure de risque cohérente** sur $\mathcal{D}$ si elle vérifie les quatre propriétés :

(R_1) $\forall X \in \mathcal{D},\ \forall c \in \mathbb{R},\ \rho(X + c) = \rho(X) + c$;

(R_2) $\forall X \in \mathcal{D},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$;

(R_3) $\forall (X, Y) \in \mathcal{D}^2$, si pour tout $\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ alors $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$;

(R_4) $\forall (X, Y) \in \mathcal{D}^2$, telles que $X + Y \in \mathcal{D},\ \rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$.

12. Montrer que l'espérance est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

13. La « Value at Risk » r_β est-elle une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$ pour toute valeur de $\beta \in]0, 1[$?
On détaillera si chacune des propriétés de (R_1) à (R_4) est satisfaite ou non.
Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, admettant une densité f_X. On définit l' « Expected Shortfall » de X de niveau de confiance β par :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\, dx \quad (1)$$

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout $\beta \in]0, 1[$, ES_β est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$, assez « proche » de r_β.

14. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $ES_\beta(X)$ est bien définie, et que $ES_\beta(X) \geqslant r_\beta(X)$.

b) À l'aide du changement de variable $t = F_X(x)$, établir :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 G_X(t)\, dt \quad (2)$$

On pourra utiliser (1) ou (2) au choix dans la suite pour définir $ES_\beta(X)$.

15. ***a)*** Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_1).

b) Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_2).

16. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Montrer que $ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \dfrac{1}{\lambda}$.

b) En déduire que $ES_\beta(X) \underset{\beta \to 1}{\sim} r_\beta(X)$.

17. On suppose dans cette question que X suit la loi normale centrée réduite.

a) Montrer $ES_\beta(X) = \dfrac{\varphi(r_\beta(X))}{1 - \Phi(r_\beta(X))}$.

b) Pour tout $x > 0$, établir l'égalité : $1 - \Phi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt$.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$: $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{x^2}(1 - \Phi(x))$.

En déduire que : $1 - \Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

d) En conclure que l'on a aussi dans ce cas : $ES_\beta(X) \underset{\beta \to 1}{\sim} r_\beta(X)$.

Dans les questions qui suivent, X est une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

- On note h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \max(x, 0)$.
- On admet que si U et V sont deux variables aléatoires telles que, $0 \leqslant U \leqslant V$ et $\mathbb{E}(V)$ existe alors $\mathbb{E}(U)$ existe et $0 \leqslant \mathbb{E}(U) \leqslant \mathbb{E}(V)$.
- On note pour tout événement A, $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement A. Rappelons qu'il s'agit de la variable aléatoire prenant la valeur 1 si A est réalisé, et la valeur 0 sinon.

18. ***a)*** Montrer que $h(X - r_\beta(X))$ admet une espérance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}\left(h(X - r_\beta(X))\right) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t)\, dt - (1-\beta) r_\beta(X)$$

où f_X désigne une densité de X.

b) En déduire :

$$ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}\left(h(X - r_\beta(X))\right)$$

19. En utilisant la méthode de Monte-Carlo, dont on supposera la validité, et la fonction `VaR` définie dans la question ***11.***, écrire une fonction **Scilab** qui calcule une valeur approchée de $ES_\beta(X)$ à partir de la réalisation d'un échantillon de taille n de la loi de X dont les valeurs se trouvent dans le tableau **Scilab** `X` et de la valeur de β se trouvant dans la variable **Scilab** `beta`.

20. Soit Z une variable aléatoire telle que : $\quad \mathbb{E}(Z) = 1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.

a) Justifier l'égalité entre variables aléatoires : $h(X - r_\beta(X)) = (X - r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}$.

b) Montrer que $\mathbb{E}(XZ)$ existe et établir l'égalité :

$$ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) = \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}\left[(X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)\right]$$

c) En déduire que $ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \geqslant 0$.
Comment choisir Z pour que $ES_\beta(X) = \mathbb{E}(XZ)$?

21. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des variables aléatoires Z sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}(Z) = 1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.
Justifier l'égalité : $\quad ES_\beta(X) = \max\limits_{Z \in \mathcal{K}} \mathbb{E}(XZ)$.

22. Démontrer que, pour tout $\beta \in]0,1[$, la fonction ES_β est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.