EML 2016

EXERCICE I

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.

Démonstration.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose :

$$\lambda_1 \cdot I_3 + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \qquad (1)$$

Or :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot I_3 + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 &= \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_1 + 2\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'égalité (1) entraîne alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \ \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre.}}$$

□

3. ***a)*** Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.

Démonstration.

$$\boxed{A \text{ est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.}}$$ □

b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)***, la matrice A est diagonalisable. Donc il existe une matrice P inversible (P est la concaténation des vecteurs des bases des sous-espaces propres de A) et une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
- Déterminons les valeurs propres de A.
  Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que la matrice $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\text{rg}(A - \lambda I) < 3$.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - \lambda I) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 - \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda^2) L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda + \lambda(1 - \lambda^2) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

On obtient une réduite triangulaire supérieure.
Elle est donc non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.
Ses 2 premiers coefficients diagonaux sont 1 et 1 (et $1 \neq 0$), et on a :

$$\lambda + \lambda(1 + \lambda^2) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda(2 - \lambda^2) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda(\sqrt{2} - \lambda)(\sqrt{2} + \lambda) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

Ainsi : $\text{rg}(A - \lambda I) < 3 \ \Leftrightarrow\ \lambda \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

$$\boxed{\text{Las valeurs propres de } A \text{ sont } -\sqrt{2},\ 0 \text{ et } \sqrt{2}.}$$

- Déterminons une base de $E_{\sqrt{2}}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{\sqrt{2}}(A) & \Longleftrightarrow & (A - \sqrt{2}\, I)X = 0 \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ -\sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}\,L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & = & -z \\ & & y & = & \sqrt{2}\,z \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + \sqrt{2}\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z + 2z = z \\ y & = & \sqrt{2}\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

  Finalement on obtient l'expression de $E_{\sqrt{2}}(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_{\sqrt{2}}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \sqrt{2}\,X\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \text{ et } y = \sqrt{2}\,z\} \\[6pt]
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{2}\,z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} = \{ \ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\[6pt]
& = & \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

  On sait donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

  × engendre $E_{\sqrt{2}}(A)$,

  × est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{\sqrt{2}}(A).}$$

- Déterminons une base de $E_0(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_0(A) & \Longleftrightarrow & AX = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_0(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_0(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \text{ et } y = 0\} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{R}\} = \{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

On sait donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_0(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(A).}$$

- Déterminons une base de $E_{-\sqrt{2}}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-\sqrt{2}}(A) & \Longleftrightarrow & (A + \sqrt{2}\, I)X = 0 \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{2}\, L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & \sqrt{2}\, y & = & -z \\ & & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - \sqrt{2}\, L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z + 2z = z \\ y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right.
\end{array}$$

  Finalement on obtient l'expression de $E_{-\sqrt{2}}(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-\sqrt{2}}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -\sqrt{2}\, X\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \text{ et } y = -\sqrt{2}\, z\} \\[6pt]
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2}\, z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} = \{ \ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\[6pt]
& = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

  On sait donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

  × engendre $E_{-\sqrt{2}}(A)$, d'après le point précédent,

  × est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{-\sqrt{2}}(A).}$$

- On rappelle que la matrice P est la concaténation des vecteurs des bases des sous-espaces propres de A, et la matrice D des valeurs propres de A.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On obtient donc la décomposition suivante :}\\ A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.\end{array}}$$

□

4. Montrer : $A^3 = 2A$.

Démonstration.

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$$

$$\boxed{A^3 = 2A}$$

□

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & = & \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ aI + bA + cA^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \text{Vect}\left(I, A, A^2\right) \end{array}$$

De plus, $(I, A, A^2) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^3$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

- Montrons que (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$.
La famille (I, A, A^2) :
  × engendre $\mathcal{E}$ (d'après le point précédent),
  × est libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ d'après la question ***2.***

$$\boxed{(I, A, A^2) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

- Déterminons la dimension de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\dim(\mathcal{E}) = \text{Card}((I, A, A^2)) = 3}$$

□

6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.
On sait que $\mathcal{E} = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$, donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2$.

$$AM = A(a{\cdot}I{+}b{\cdot}A{+}c{\cdot}A^2) = a{\cdot}A{+}b{\cdot}A^2{+}c{\cdot}A^3 = a{\cdot}A{+}b{\cdot}A^2{+}2c{\cdot}A = (a{+}2c){\cdot}A{+}b{\cdot}A^2 \in \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{E},\ AM \in \mathcal{E}.}$$

□

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.***, $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$.

$$f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = A(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN = \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N)$$

  Donc f est une application linéaire.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$$

□

8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- $f(I) = A = 0 \times I + 1 \cdot A + 0 \cdot A^2$. Donc $\text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f(I)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(A) = A^2 = 0 \cdot I + 0 \cdot A + 1 \cdot A^2$. Donc $\text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f(A)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $f(A^2) = A^3 = 2A = 0 \cdot I + 2 \cdot A + 0 \cdot A^2$. Donc $\text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f(A^2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{F = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

9. ***a)*** Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(M) &= f(f(f(M))) = f(f(AM)) = f(A \times AM) = f(A^2M) \\ &= A \times A^2M = A^3M = 2AM = 2f(M) \end{aligned}$$

$$\boxed{f \circ f \circ f = 2f}$$

□

b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f.
Notons M un vecteur propre associé à λ. Par définition : $f(M) = \lambda \cdot M$.

- D'après la question précédente :

$$(f \circ f \circ f)(M) = 2f(M) = 2\lambda \cdot M$$

- En raisonnant comme à la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f \circ f)(M) & = & f(f(f(M))) & \\ & = & f(f(\lambda M)) & \textit{(par définition de } M\textit{)} \\ & = & f(\lambda f(M)) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & f(\lambda \cdot (\lambda \cdot M)) & \textit{(par définition de } M\textit{)} \\ & = & f(\lambda^2 \cdot M) \ = \ \lambda^2 \cdot f(M) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & \lambda^2 \cdot (\lambda \cdot M) \ = \ \lambda^3 \cdot M & \end{array}$$

- En combinant les deux résultats précédents, on obtient :

$$\lambda^3 M = 2\lambda M \quad \text{ou encore} \quad (\lambda^3 - 2\lambda)\ M = 0$$

Or M est un vecteur propre, donc $M \neq 0$. Ainsi, $\lambda^3 - 2\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{Toute valeur propre } \lambda \text{ de } f \text{ vérifie } \lambda^3 = 2\lambda.}$$

□

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Démonstration.

- D'après la question précédente, si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda^3 - 2\lambda = 0$.
  (c'est une implication, pas une équivalence !)
  Or :

$$\lambda^3 - 2\lambda = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}}$$

  Ceci permet d'affirmer que $-\sqrt{2}$, 0, et $\sqrt{2}$ sont les seules valeurs propres possibles de f. Il reste à déterminer lesquelles sont réellement valeurs propres.

- Il reste à montrer que $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\} \subset \mathrm{Sp}(f)$.
  - Déterminons $E_{\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Ker}(f - \sqrt{2} \cdot \mathrm{id})$.

    Soit $M \in \mathcal{E}$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(I,A,A^2)}(M)$.

$$\begin{aligned}
M \in E_{\sqrt{2}}(f) &\iff (f - \sqrt{2}\,\mathrm{id})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\
&\iff (F - \sqrt{2}\,I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\,x & & & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\,y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & - & \sqrt{2}\,y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \sqrt{2}\,z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

    On obtient donc :

$$\begin{aligned}
E_{\sqrt{2}}(f) &= \left\{ M \in \mathcal{E} \mid f(M) = \sqrt{2}\,M \right\} \\
&= \{ x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 \mid x = 0 \text{ et } y = \sqrt{2}\,z \} \\
&= \left\{ 0 \cdot I + \sqrt{2}\,z \cdot A + z \cdot A^2 \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z(\sqrt{2}\,A + A^2) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}\,A + A^2 \right)
\end{aligned}$$

    En particulier, $E_{\sqrt{2}}(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$ donc $\sqrt{2}$ est valeur propre de f.

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt{2} \text{ est valeur propre de } f \text{ et le sous-espace propre associé est :} \\ E_{\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}\,A + A^2 \right) \end{array}}$$

Commentaire

On profite de ce premier calcul pour faire un point sur les objets étudiés :

× $\mathcal{E} = \text{Vect}\big(I, A, A^2\big)$ est un ev de dimension 3.

Ainsi, tout élément $M \in \mathcal{E}$ s'écrit sous la forme $M = x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2$.

Ce qui revient à dire que M a pour coordonnées (x, y, z) dans la base (I, A, A^2).

Il ne faut pas confondre la notion de coordonnées de M avec la matrice représentative de M dans la base (I, A, A^2) : $X = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq (x, y, z)$.

× $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

L'espace $\mathcal{E}$ étant de dimension 3, la matrice représentative de f dans la base (I, A, A^2) est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $F = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

× $E_\lambda(f) = \{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = \lambda M\}$ est un sev de $\mathcal{E}$ donc un ensemble dont les éléments sont des sont des matrices de $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

× $E_\lambda(F) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid FX = \lambda X\}$ est un sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc un ensemble dont les éléments sont des vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Il faut donc bien comprendre que, de manière générale : $E_\lambda(f) \neq E_\lambda(F)$.

En revanche, $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(F)$: f a les mêmes valeurs propres que toute matrice qui le représente.

– Déterminons $E_0(f) = \text{Ker}(f - 0 \cdot \text{id}) = \text{Ker}(f)$.

Soit $M \in \mathcal{E}$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(M)$.

$$\begin{array}{rcl}
M \in \text{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(M) = 0_{\mathcal{E}} \\
 & \Longleftrightarrow & FX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
 & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & -2z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} E_0(f) & = & \{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = 0\} \\ & = & \{x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 \mid x = -2z \text{ et } y = 0\} \\ & = & \big\{(-2z) \cdot I + 0 \cdot A + z \cdot A^2 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \big\{z(-2I + A^2) \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \text{Vect}\left(-2I + A^2\right) \end{array}$$

En particulier, $E_0(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$ donc 0 est valeur propre de f.

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \text{ est valeur propre de } f \text{ et le sous-espace propre associé est :} \\ E_0(f) = \text{Vect}\left(-2I + A^2\right) \end{array}}$$

– Déterminons $E_{-\sqrt{2}}(f) = \text{Ker}(f + \sqrt{2} \cdot \text{id})$.

Soit $M \in \mathcal{E}$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(M)$.

$$\begin{array}{rcl} M \in E_{-\sqrt{2}}(f) & \iff & (f + \sqrt{2}\,\text{id})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\ & \iff & (F + \sqrt{2}\,I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\,x & & & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\,y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & & \sqrt{2}\,y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -\sqrt{2}\,z \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} E_{-\sqrt{2}}(f) & = & \big\{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = -\sqrt{2}M\big\} \\ & = & \{x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 \mid x = 0 \text{ et } y = -\sqrt{2}\,z\} \\ & = & \big\{0 \cdot I - \sqrt{2}\,z \cdot A + z \cdot A^2 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \big\{z(-\sqrt{2}\,A + A^2) \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \text{Vect}\left(-\sqrt{2}\,A + A^2\right) \end{array}$$

En particulier, $E_{-\sqrt{2}}(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$ donc $-\sqrt{2}$ est valeur propre de f.

$$\boxed{\begin{array}{c} -\sqrt{2} \text{ est valeur propre de } f \text{ et l'espace propre associé est :} \\ E_{-\sqrt{2}}(f) = \text{Vect}\left(-\sqrt{2}\,A + A^2\right) \end{array}}$$

Commentaire

- On peut vérifier que les matrices obtenues sont bien des vecteurs propres de f. Par exemple :
$$f(\sqrt{2}\,A + A^2) = A(\sqrt{2}\,A + A^2) = \sqrt{2}\,A^2 + A^3$$
D'après la question ***4.***, $A^3 = 2A$. Donc :
$$f(\sqrt{2}\,A + A^2) = \sqrt{2}\,A^2 + 2A = \sqrt{2}(\sqrt{2}\,A + A^2)$$
Donc $\sqrt{2}\,A + A^2$ est bien vecteur propre
- On aurait pu déterminer $E_{\sqrt{2}}(F)$, $E_0(F)$, $E_{-\sqrt{2}}(F)$.
$$E_{\sqrt{2}}(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad E_0(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad E_{\sqrt{2}}(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
- Insistons une nouvelle fois sur la différence coordonnées / matrice représentative.
  - × $M = 0 \cdot I + \sqrt{2} \cdot A + 1 \cdot A^2$ a pour coordonnées $(0, \sqrt{2}, 1)$ dans la base (I, A, A^2).
  - × la matrice représentative de M dans cette base est :
$$X = \mathrm{Mat}_{(I,A,A^2)}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?

Démonstration.

- 0 est une valeur propre de f, donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$.
On en conclut que l'application linéaire f n'est pas injective.
$$\boxed{f \text{ n'est pas bijectif.}}$$
- f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et on sait que :
  - × $\dim(\mathcal{E}) = 3$ d'après la question ***5.***,
  - × f possède 3 valeurs propres **distinctes**.
$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

Le premier point de cette question amène à plusieurs remarques.
- Tout d'abord, rappelons qu'une application quelconque f (pas forcément linéaire) est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Telle que la réponse est rédigée, on utilise ici le fait que :
$$f \text{ bijective} \ \Rightarrow \ f \text{ injective}$$
et donc, par contraposée :
$$f \text{ non injective} \ \Rightarrow \ f \text{ non bijective}$$
- Dans le cas où f est une application linéaire, on sait de plus que :
$$f \text{ injective} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$
La combinaison de ces deux points permet de conclure la première partie de la question.

Commentaire

- Dans le cas où $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application linéaire et que $\mathcal{E}$ **est de dimension finie** :

$$f \text{ bijective } \Leftrightarrow f \text{ injective } \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f$$

L'hypothèse de dimension finie est primordiale pour la première équivalence (les autres sont toujours vraies). Autrement dit, il existe des applications linéaires injectives et non bijectives si $\mathcal{E}$ est de dimension infinie (et seulement dans ce cas).

- Cela signifie que si f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, de dimension finie, qui n'admet pas 0 comme valeur propre, on doit rédiger comme suit :

0 n'est pas valeur propre de f, donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$.
On en conclut que l'application linéaire f est injective.
Ainsi, comme $\mathcal{E}$ **est de dimension finie**, f est bijective.
(l'oubli de cette hypothèse risque d'être sanctionné)

- Par contre, on peut utiliser, sans citer d'hypothèse, l'équivalence :

$$\text{La matrice } A \text{ est inversible } \Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } A$$

En effet, la notion de matrice sous-entend que l'on se trouve en dimension finie. □

11. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Cas de $\text{Ker}(f)$: On sait que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(-2I + A^2\right)$ (question ***9.***).

  La famille $(-2I + A^2)$:

  × engendre $\text{Ker}(f)$ d'après la question ***9.***,

  × est libre dans $\mathcal{E}$ car elle est constituée d'une unique matrice non nulle.

$$\boxed{(-2I + A^2) \text{ est une base de } \text{Ker}(f).}$$

- Cas de $\text{Im}(f)$:

  On sait que (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. Donc, par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f(I), f(A), f(A^2)\right) = \text{Vect}\left(A, A^2, 2A\right) = \text{Vect}\left(A, A^2\right)$$

  Donc la famille (A, A^2) :

  × engendre $\text{Im}(f)$,

  × est libre car elle est constituée de 2 matrices non proportionnelles.

$$\boxed{(A, A^2) \text{ est une base de } \text{Im}(f).}$$

Commentaire

On remarque que :
- × comme $(-2I + A^2)$ est une base de $\text{Ker}(f)$, alors :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \text{Card}((-2I + A^2)) = 1$$

- × comme (A, A^2) est une base de $\text{Im}(f)$, alors :

$$\text{rg}(g) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{Card}((A, A^2)) = 2$$

On retrouve donc bien le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = 3 = \dim(\mathcal{E})$$

□

12. a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.
Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
& f(M) = I + A^2 \\
\Leftrightarrow \quad & f(a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2) = I + A^2 \\
\Leftrightarrow \quad & a \cdot f(I) + b \cdot f(A) + c \cdot f(A^2) = I + A^2 \\
\Leftrightarrow \quad & a \cdot A + b \cdot A^2 + 2c \cdot A = I + A^2 \\
\Leftrightarrow \quad & I - (a + 2c) \cdot A + (1 - b) \cdot A^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & 0 \\ -(a+2c) & = & 0 \\ 1-b & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(car la famille } (I, A, A^2) \textit{ est libre)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ce système n'admettant pas de solution, l'équation } f(M) = I + A^2 \text{ n'admet pas de solution.}}$$

Commentaire

On pouvait rédiger différemment.
- Comme $f(M) \in \text{Im}(f)$, si l'équation $f(M) = I + A^2$ est vérifiée alors : $I + A^2 \in \text{Im}(f)$.
  De plus : $A^2 \in \text{Vect}\left(A, A^2\right) = \text{Im}(f)$.
  On en déduit, par soustraction : $I = (I + A^2) - A^2 \in \text{Im}(f)$.
  Or (I, A, A^2) est une famille libre et $I \neq 0$ donc $I \in \text{Vect}\left(A, A^2\right)$ est impossible.

□

b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathcal{E}$.
Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $N = a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2$. Alors :

$$\begin{array}{cl} & f(N) = A + A^2 \\ \Leftrightarrow & f(a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2) = A + A^2 \\ \Leftrightarrow & a \cdot f(I) + b \cdot f(A) + c \cdot f(A^2) = A + A^2 \\ \Leftrightarrow & a \cdot A + b \cdot A^2 + 2c \cdot A = A + A^2 \\ \Leftrightarrow & (a + 2c - 1) \cdot A + (b - 1) \cdot A^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccc} a & & + & 2c & = & 1 \\ & b & & & = & 1 \end{array} \right. \qquad \textit{(car } (A, A^2) \textit{ sous-famille de } (I, A, A^2) \textit{ est libre)} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 - 2c \\ b & = & 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{L'ensemble des solutions de l'équation } f(N) = A + A^2 \text{ est :} \\ \{(1 - 2c) \cdot I + A + c \cdot A^2 \mid c \in \mathbb{R}\}. \end{array}}$$

□

EXERCICE II

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme $f = f_1 + f_2$ où :
  - $\times$ $f_1 : t \mapsto t\ln(t)$ continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$,
  - $\times$ $f_2 : t \mapsto t^2$ continue sur $]0, +\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{t \to 0} t\ln(t) = 0$. De plus, $\lim\limits_{t \to 0} t^2 = 0$.
  Donc $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0 = f(0)$.
  Donc f est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

□

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme $f = f_1 + f_2$ où :
$\times$ $f_1 : t \mapsto t\ln(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
$\times$ $f_2 : t \mapsto t^2$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

$$\boxed{\forall t \in\ ]0, +\infty[,\ f'(t) = 2t - \left(1 \times \ln(t) + \cancel{t} \times \frac{1}{\cancel{t}}\right) = 2t - \ln(t) - 1}$$

$$\boxed{\forall t \in\ ]0, +\infty[,\ f''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t - 1}{t}}$$

□

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $t \in\ ]0, +\infty[$. Comme $t > 0$, $f''(t) = \dfrac{2t - 1}{t}$ est du signe de $2t - 1$. Or :

$$2t - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ 2t \geqslant 1 \ \Leftrightarrow\ t \geqslant \frac{1}{2}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Détaillons les éléments de ce tableau.

– $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{2} \times \dfrac{1}{\cancel{2}} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \cancel{1} + \ln(2) - \cancel{1} = \ln(2)$

– $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 \underset{t \to 0}{\sim} -\ln(t)$. Donc : $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = +\infty$.

– $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 = 2t \left(1 - \dfrac{\ln(t)}{2t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} 2t$, car $1 - \dfrac{\ln(t)}{2t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissances comparées.
Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$.

- Or $\ln(2) > 0$. Donc : $\forall t \in]0, +\infty[$, $f'(t) > 0$.
De plus : $f(t) = t^2 - t\ln(t) = t^2 \left(1 - \dfrac{\ln(t)}{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^2$ par croissances comparées.
Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.
On obtient donc le tableau de variations suivant pour f :

t	0		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\square$

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.

Démonstration.

- Soit $t \in]0, +\infty[$. Calculons le taux d'accroissement de f en 0.

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t^2 - t\ln(t)}{t} = \frac{\cancel{t}(t - \ln(t))}{\cancel{t}} = t - \ln(t)$$

Donc : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Donc la courbe } C \text{ admet une demi-tangente verticale en } 0.}$$

$\square$

b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.

Démonstration.
D'après la question précédente, f'' s'annule en changeant de signe uniquement en $\dfrac{1}{2}$.
De plus : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

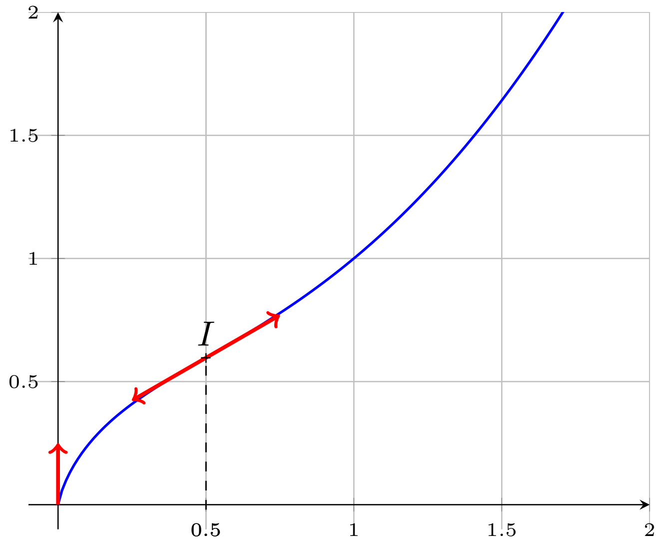
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique point d'inflexion } I \text{ en } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)\right).}$$

$\square$

c) Tracer l'allure de C.

Démonstration.
La courbe C admet pour tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\ \ln(2)\right) + \ln(2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{4} + \ln(2) x \end{aligned}$$



□

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $[0, +\infty[$,
  - × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

  Ainsi, f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$. De plus :

  $$f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim_{t \to +\infty} f(t) \right[= [0, +\infty[$$

  Or $1 \in [0, +\infty[$, donc l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution α sur $[0, +\infty[$.
- De plus $f(1) = 1^2 - 1 \times \ln(1) = 1$. Donc $\alpha = 1$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(t) = 1 \text{ admet 1 comme unique solution sur } [0, +\infty[.}$$

Commentaire

- Il faut tout de suite repérer cette question comme une application du théorème de la bijection. Et s'empresser d'y répondre !
- Attention de ne pas seulement vérifier que 1 est solution de l'équation $f(t) = 1$. Il faut bien montrer ici que c'est **la seule** solution sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

□

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

Démonstration.

- F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$.
- Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$.

$$\partial_1(F)(x,y) = \ln(y) - y \times \frac{1}{x} = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

$$\partial_2(F)(x,y) = x \times \frac{1}{y} - \ln(x) = \frac{x}{y} - \ln(x)$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \partial_1(F)(x,y) = \ln(y) - \frac{y}{x} \ \text{ et } \ \partial_2(F)(x,y) = \frac{x}{y} - \ln(x)}$$

□

7. a) Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. Montrer que (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

Démonstration.
Le couple (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(F)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(F)(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \ln(y) & = & \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} & = & \ln(x) \end{array} \right.$$

- On sait que $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, c'est-à-dire $x > 0$ et $y > 0$. On en déduit : $\dfrac{x}{y} > 0$.
  Ainsi, si (x,y) est un point critique de F, $\ln(x) = \dfrac{x}{y} > 0$, et par stricte croissance de la fonction exponentielle, $x > e^0 = 1$.
  On a donc déjà $x > 1$.
- On reprend alors la résolution du système.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ln(y) & = & \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} & = & \ln(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x\ln(y) & = & y \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & = & y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x\ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right) & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & = & y \end{array} \right.$$

La première équation devient alors :

$$\begin{array}{rcl} x\ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right) = \dfrac{x}{\ln(x)} & \Leftrightarrow & x\,(\ln(x) - \ln(\ln(x))) = \dfrac{x}{\ln(x)} \\ & \Leftrightarrow & \cancel{x}\ln(x)\,(\ln(x) - \ln(\ln(x))) = \cancel{x} \quad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & (\ln(x))^2 - \ln(x)\,\ln(\ln(x)) = 1 \\ & \Leftrightarrow & f(\ln(x)) = 1 \end{array}$$

On en déduit alors que, si (x,y) est un point critique de F, alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & > & 1 \\ f(\ln(x)) & = & 1 \\ y & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \end{array}\right.$$

- Réciproquement, si (x,y) vérifie ces trois conditions, alors $\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  D'où (x,y) est un point critique de F.

$$\boxed{\text{Finalement } (x,y) \text{ est un point critique de } F \text{ si et seulement si : } \left\{\begin{array}{l} x > 1 \\ f(\ln(x)) = 1 \\ y = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{array}\right.}$$

□

b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e,e).

Démonstration.

- Soit $(x,y) \in \,]0,+\infty[^2$. D'après la question précédente, si (x,y) est un point critique de F, alors, en particulier $f(\ln(x)) = 1$.
- D'après la question ***5.***, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$: $\alpha = 1$.
  Donc $\ln(x) = 1$ et $x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- On obtient alors : $y = \dfrac{\mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e})} = \mathrm{e}$. D'où $(x,y) = (\mathrm{e},\mathrm{e})$.
- Réciproquement :

$$\partial_1(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 0$$

  Donc (e,e) est un point critique de F.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } F \text{ admet } (\mathrm{e},\mathrm{e}) \text{ pour unique point critique.}}$$

□

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e,e) ?

Démonstration.
Pour savoir si (e,e) est un extremum local pour F, on détermine les valeurs propres de la matrice hessienne de F en (e,e).

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur cet ouvert.
- Soit $(x,y) \in \,]0,+\infty[^2$.

$$\nabla^2(F)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(x,y) & \partial^2_{1,2}(F)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(F)(x,y) & \partial^2_{2,2}(F)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

Donc on obtient :

$$\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} & \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} & -\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$$

- La matrice $\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e})$ est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où $\mathrm{Sp}(\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e})) = \{\mathrm{e}^{-1}, -\mathrm{e}^{-1}\}$.

$\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e})$ admet deux valeurs propres de signe contraire,
donc (e,e) n'est pas un extremum local pour F (c'est un point selle).

Commentaire

On rappelle qu'on utilise ici le théorème suivant :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un **ouvert** U et soit (x_0, y_0) un **point critique** de f.

- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0). On parle de *point col* ou *point selle*.
- Si 0 est valeur propre de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$, alors on ne peut rien conclure a priori.

□

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

▸ **Initialisation** :
$u_0 = \dfrac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$).

- Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  En particulier $u_n \geqslant 0$. Donc $f(u_n)$ est bien défini. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
- On sait que : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Or, d'après la question ***3.***, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc :
  $$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
  On a donc déjà : $u_{n+1} \leqslant 1$.
- D'après l'énoncé, on sait que : $\ln(2) > 0,69$. Donc :
  $$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \ > \ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}0,69 \ > \ \frac{1}{4} + 0,34 = 0,25 + 0,34 = 0,59$$
  Donc : $u_{n+1} \geqslant 0.59 > \dfrac{1}{2}$.

Finalement $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right].}$$

□

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1}$.

- **Initialisation** :
  D'après la question précédente : $u_1 \geqslant \dfrac{1}{2} = u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$).
  Par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
  Or la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc :

$$\begin{array}{ccc} f(u_n) & \leqslant & f(u_{n+1}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ u_{n+1} & & u_{n+2} \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

□

11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)

Démonstration.

- La suite (u_n) est :
  × croissante, d'après la question ***10.***,
  × majorée par 1, d'après la question ***9.***,
  Elle est donc convergent vers un réel ℓ.
- De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Donc, par passage à la limite dans cette inégalité : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.
- On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Donc, par passage à la limite et par continuité de f sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \ell = f(\ell) \quad &\Leftrightarrow \quad \ell = \ell^2 - \ell\ \ln(\ell) \\ &\Leftrightarrow \quad \cancel{\ell} = \cancel{\ell}(\ell - \ln(\ell)) \qquad \textit{(car } \ell \geqslant \tfrac{1}{2}\textit{, donc en particulier } \ell \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = \ell - \ln(\ell) \end{aligned}$$

  Donc $\ell = f(\ell)$ si et seulement si $g(\ell) = 1$ où $g : t \mapsto t - \ln(t)$.

- Étudions alors la fonction g sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  - La fonction g est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ comme somme de fonctions dérivables sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  - Soit $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  $$g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$
  Comme $t > 0$, $g'(t)$ est du signe de $t - 1$. Ainsi :
  $$g'(t) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; t - 1 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; t \geqslant 1$$
  - On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	$\frac{1}{2}$		1
Signe de $g'(t)$		$-$	
Variations de g	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	1

  - La fonction g est donc :
    × continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (car dérivable sur cet intervalle),
    × strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  Ainsi g réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sur $g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. De plus :
  $$g\left(\left[\tfrac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[g(1), g\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] = \left[1, \tfrac{1}{2} + \ln(2)\right]$$
  Or $1 \in \left[1, \frac{1}{2} + \ln(2)\right]$, donc l'équation $g(t) = 1$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  De plus $g(1) = 1$. Donc l'unique solution de l'équation $g(t) = 1$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est 1.
- Or $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $g(\ell) = 1$. Donc $\ell = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

□

12. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Démonstration.

```
n = 0
u = 1/2
while 1 - u >= 10 ^ (-4)
  u = u ^ 2 - u * log(u)
  n = n + 1
end
disp(n)
```

□

EXERCICE III

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a bien $-t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f(-t) - f(t) & = & \dfrac{e^{-(-t)}}{(1+e^{-(-t)})^2} - \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\ & = & \dfrac{e^{t}}{(1+e^{t})^2} - \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\ & = & \dfrac{e^{t}(1+e^{-t})^2 - e^{-t}(1+e^{t})^2}{(1+e^{t})^2(1+e^{-t})^2} \\ & = & \dfrac{e^{t}(1+2e^{-t}+e^{-2t}) - e^{-t}(1+2e^{t}+e^{2t})}{(1+e^{t})^2(1+e^{-t})^2} \\ & = & \dfrac{\cancel{e^{t}+2+e^{-t}} - (\cancel{e^{-t}+2+e^{t}})}{(1+e^{t})^2(1+e^{-t})^2} \ = \ 0 \end{array}$$

Donc $f(-t) = f(t)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

Commentaire

La méthode classique pour démontrer qu'une fonction f est paire est de prouver l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(-x) = f(x)$$

Lorsque ce calcul direct ne semble pas aboutir, on pensera à former $f(-x) - f(x)$.

En règle générale, pour démontrer l'égalité « $a = b$ », on peut :
- partir de a et, par une succession d'égalités, arriver à b.
- partir de b et, par une succession d'égalités, arriver à a.
- prouver $a = c$, puis $b = c$ par l'une des méthodes précédentes (méthode du « mi-chemin ».
- calculer $a - b$, pour prouver $a - b = 0$.

Pour choisir entre les deux premières méthodes, on retiendra qu'il est plus simple de transformer une expression « compliquée » en expression « simple » que l'inverse.
La dernière méthode est souvent efficace, notamment lorsque les autres ne semblent pas aboutir.

□

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Détaillons ce dernier point.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{e}^{-t} > 0 & \text{donc} & 1+\mathrm{e}^{-t} > 1 \\ & \text{et} & (1+\mathrm{e}^{-t})^2 > 1^2 \quad \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & \text{ainsi} & (1+\mathrm{e}^{-t})^2 > 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc $(1+\mathrm{e}^{-t})^2 > 0$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0}$$

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$ le sont. On étudie tout d'abord l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$.
  - La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.
  - Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A f(t)\ dt = \int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ dt = \left[\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\ \right]_0^A = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}} - \frac{1}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

  Ainsi, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

  On étudie maintenant l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt$.
  - On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \text{ (donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
  On a donc :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{-\infty} f(-u)(-\ du) = \int_{-\infty}^{0} f(-u)\ du = \int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$$

  La dernière égalité est obtenue car la fonction f est paire (d'après la question ***1.***).
  On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle.}}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a fait dans l'exemple).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Démonstration.
On note F_X la fonction de répartition de X. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, x]$.
Soit $B \in \,]-\infty, x]$.

$$\int_B^x f(t)\ dt = \int_B^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ dt = \left[\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\ \right]_B^x = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-B}} \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.}$$

□

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\ dt$ converge.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- × Tout d'abord : $t\, f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
  En effet :
  $$\frac{t\, f(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^2\, t f(t) = \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} = \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{1+2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{1} = t^3\,\mathrm{e}^{-t}$$
  Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\, t f(t) = 0$.

  On en déduit : $t\, f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

  × $\forall t \in [1, +\infty[,\ t\, f(t) \geqslant 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\, f(t)\ dt$ converge.

- La fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue sur le **segment** $[0, 1]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\, f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt \text{ converge.}}$$

Commentaire

L'énoncé demande simplement de déterminer la **nature** de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ (sans la calculer). Il faut donc privilégier pour cette question l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité d'intégrales de fonctions continues positives.
On évitera donc le calcul direct de l'intégrale car :
1. il est sans doute difficile,
2. il est peut-être même (souvent) impossible.

☐

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\, f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ f(t)\ dt$.
  L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt$ est convergente si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt$ le sont. Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge.
- Déterminons la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\ dt$.
  On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \text{ (donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{ et } \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
On a donc :

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_0^{-\infty} (\cancel{-}u)f(-u)(\cancel{-}\ du) = \int_0^{-\infty} uf(u)\ du = -\int_{-\infty}^{0} uf(u)\ du$$

La deuxième égalité est obtenue car la fonction f est paire (d'après la question ***1.***).
On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$ est convergente.

- Finalement, X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} t f(t)\, dt + \int_{0}^{+\infty} t f(t)\, dt = -\cancel{\int_{0}^{+\infty} t f(t)\, dt} + \cancel{\int_{0}^{+\infty} t f(t)\, dt} = 0$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

□

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $\varphi = h \circ g$ où :
  - × $g : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^x$:
    - dérivable sur $\mathbb{R}$,
    - telle que $g(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{e}^x > 0$).
  - × $h : y \mapsto \ln(y)$ dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} > 0$$

  Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction φ est :
  - × continue sur $]-\infty, +\infty[$ (car dérivable sur cet intervalle),
  - × strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $I = \varphi(]-\infty, +\infty[)$. De plus :

$$\varphi(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \to -\infty} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \right[=]0, +\infty[$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } I =]0, +\infty[.}$$

□

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

Démonstration.

Soit $y \in I$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(y) = x \quad &\Leftrightarrow \quad y = \varphi(x) \\
&\Leftrightarrow \quad y = \ln(1 + \mathrm{e}^x) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = 1 + \mathrm{e}^x && \textit{(car la fonction } x \mapsto \mathrm{e}^x \textit{ est bijective sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y - 1 = \mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(\mathrm{e}^y - 1) = x && \textit{(car la fonction } x \mapsto \ln(x) \textit{ est bijective sur }]0, +\infty[\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y \in I,\ \varphi^{-1}(y) = \ln(\mathrm{e}^y - 1)}$$

Commentaire

On remarque que la composition par ln est bien autorisée car, si $y \in I =]0, +\infty[$, alors $\mathrm{e}^y \in]1, +\infty[$. Et donc $\mathrm{e}^y - 1 \in]0, +\infty[$.

□

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$Y(\Omega) = (\varphi(X))(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big) \subset \,]0, +\infty[$$

En effet, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) = I = \,]0, +\infty[$ (d'après la question ***5.***)

- On obtient alors : $[Y \leqslant 0] = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0}$$

□

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x \leqslant 0$ alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc, on a :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  - Si $x > 0$.

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\varphi(X) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}(\big[X \leqslant \varphi^{-1}(x)\big]) & \textit{(car } \varphi \textit{ est strictement croissante, donc } \varphi^{-1} \textit{ également)} \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant \ln(\mathrm{e}^x - 1)]) \ = \ F_X(\ln(\mathrm{e}^x - 1)) & \\ & = & \dfrac{1}{1 + \exp(-\ln(\mathrm{e}^x - 1))} & \\ & = & \dfrac{1}{1 + \exp\left(\ln\left((\mathrm{e}^x - 1)^{-1}\right)\right)} & \\ & = & \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}} \ = \ \dfrac{1}{\frac{(\mathrm{e}^x - \cancel{1}) + \cancel{1}}{\mathrm{e}^x - 1}} \ = \ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} & \\ & = & \dfrac{\cancel{\mathrm{e}^x}\ (1 - \mathrm{e}^{-x})}{\cancel{\mathrm{e}^x}} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \end{array}$$

$$\boxed{F_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right.}$$

□

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On reconnaît une loi exponentielle : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}\,(1). \text{ On a alors } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{1} = 1 \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{1^2} = 1.}$$

□

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par noter que :

$$[T_n \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \ \cap \ \cdots \ \cap [X_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} \ [X_i \leqslant x]$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{T_n}(x) & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ [X_i \leqslant x]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x]\big)^n & \end{array}$$

- D'après la question ***3.*** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_1}(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)^n.}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([T_n - \ln(n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x + \ln(n)]) & \\ & = & F_{T_n}(x + \ln(n)) & \\ & = & \left(\dfrac{1}{1+\exp(-(x+\ln(n)))}\right)^n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.a)}}\textit{)} \\ & = & \Big(1 + \exp(-x - \ln(n))\Big)^{-n} & \end{array}$$

Or : $\exp(-x - \ln(n)) = \mathrm{e}^{-x-\ln(n)} = \mathrm{e}^{-x} \ \mathrm{e}^{-\ln(n)} = \mathrm{e}^{-x} \ \mathrm{e}^{\ln(n^{-1})} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}}$$

□

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche à déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$F_{U_n}(x) = \left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right)$$
- De plus : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, donc $\ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$. D'où :
$$-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n}\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cancel{n}} = -\mathrm{e}^{-x}$$
- Or la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par composition de **limites** :
$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On note } G \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } G : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x}).\\ \text{On a alors } \lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = G(x).\end{array}}$$

Montrons que G est une fonction de répartition.

- Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc, par continuité de exp en 0 :
$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^0 = 1$$
- De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x} = -\infty$. D'où :
$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = 0$$
- La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $G = h_2 \circ h_1$ où :
  × $h_1 : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ est :
    – continue sur $\mathbb{R}$,
    – telle que $h_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  × $h_2 : y \mapsto \exp(y)$ continue sur $\mathbb{R}$.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour la même raison et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g(x) = G'(x) = \mathrm{e}^{-x} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) > 0$$
Donc la fonction G est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est une fonction de répartition.}}$$

Montrons que G est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.

- On vient de démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction G est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car les fonctions h_1 et h_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité que l'on notera } V.}$$

- Pour déterminer une densité de V, on dérive la fonction G sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ est bien un intervalle ouvert). On en déduit que g est bien une densité de V.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La suite } (U_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } V \text{ de fonction de répartition } G : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x}) \\ \text{dont une densité est } g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \exp(-\mathrm{e}^{-x}).\end{array}}$$

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1. F est croissante.
  2. F est continue à droite en tout point.
  3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
  4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ***1.***, ***2.***, ***3.*** et ***4.*** peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- L'utilisation de la caractérisation ci-dessus ne semble apparaître que dans ce type de question traitant de la convergence en loi. Ce type de question apparaît aussi dans le sujet d'EML 2017.
  Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus.

□