EML 2016

EXERCICE I

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.

2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

3. ***a)*** Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.

b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. Montrer : $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.

6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.

9. ***a)*** Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.

b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?

11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

12. ***a)*** Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

EXERCICE II

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- ***a)*** Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.
- ***b)*** Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.
- ***c)*** Tracer l'allure de C.

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x, y) de $]0, +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0, +\infty[^2$.

7. ***a)*** Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

- ***b)*** Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)

12. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

EXERCICE III

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\, dt$ converge.

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\,f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. ***a)*** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.