EDHEC 2016

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

- Ainsi : $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} - 4I$.

$$\boxed{A^2 - 4A = -4I}$$

$$\boxed{\text{Donc } P(X) = X^2 - 4X + 4 \text{ est } \textbf{un} \text{ polynôme annulateur de degré 2 de } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul P.
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si P est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, P$ est toujours un polynôme annulateur puisque :
$$(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A) = 0$$
Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
On peut en obtenir d'autres. Par exemple $Q(X) = (X - 5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
$$Q(A) = (A - 5\,I)\ P(A) = 0$$
- Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.

□

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

Démonstration.

- On remarque que $P(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. Ainsi, l'unique racine de P est 2.
Or le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de A.

$$\boxed{\text{Autrement dit : Sp}(A) \subset \{2\}.}$$

Commentaire

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !). Par exemple, comme $Q(X) = (X-5)\, P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.
- On dit généralement que les racines d'un polynôme annulateur sont des valeurs propres **possibles** de A (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). Il faut alors démontrer qu'elles sont réellement des valeurs propres.

- Montrons maintenant que 2 est une valeur propre de A (*i.e.* $\{2\} \subset \mathrm{Sp}(A)$).

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A-2I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \dim\left(\ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\ \right)\\ &= \dim\left(\ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\ \right) \ = \ 1 < 3\end{aligned}$$

La matrice $A-2I$ n'est pas inversible, ce qui signifie que 2 est valeur propre de A.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f) = \{2\}}$$

Commentaire

- On peut aussi affimer que $A - 2\,I$ est non inversible en remarquant que cette matrice possède deux vecteurs colonnes (ou lignes) égaux (colinéaires suffirait).

□

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, A possède 2 comme unique valeur propre.
- Supposons par l'absurde que A est diagonalisable.
Il existe alors $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$A = P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}P^{-1} = P\,(2\,I_3)\,P^{-1} = 2\,PP^{-1} = 2\,I_3$$

ce qui est impossible puisque $A \neq 2\,I_3$.

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

- Montrons que A est inversible.
On sait que $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$. Donc en particulier, 0 n'est pas valeur propre de A.

$$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ est inversible.}}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de démontrer que A n'est pas diagonalisable en déterminant la dimension de $E_2(A)$, espace propre associé à l'unique valeur propre 2.
  On démontre alors que $\dim(E_2(A)) = 2 \neq 3$ (*cf* question suivante).
- Concernant l'inversibilité de A on utilise :

  $$A \text{ non inversible } \Leftrightarrow 0 \text{ est valeur propre de } A$$

  On peut aussi démontrer l'inversibilité de A en déterminant son inverse par la méthode proposée en ***5.b)***.
- Toutes les méthodes donnant le bon résultat sont acceptées. Évidemment, les méthodes les plus longues produisent une perte de temps et sont pénalisantes à terme.

$\square$

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

Démonstration.

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_2(f) & \Longleftrightarrow & f(u) = 2\,u \\
& \Longleftrightarrow & (f - 2\,Id)(u) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & (A - 2\,I_3)\,U = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \; x - y + z = 0 \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \; x = y - z \right.
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(f) & = & \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(u) = 2u \right\} \\
& = & \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y - z \right\} \\
& = & \left\{ (y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0), (-1, 0, 1)\right)
\end{array}$$

- Notons $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2) est :
  × génératrice de $E_2(f)$.
  × libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires.
  C'est donc une base de $E_2(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u_1, u_2) \text{ est une base de } E_2(f).}$$

Commentaire

- Comme A est la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.
- Par contre, comme on le voit ici : $E_2(A) \neq E_2(f)$. En effet :
  - × le sous espace-propre $E_2(A)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, espace vectoriel dont les vecteurs sont des matrices de taille 3×1.
  - × le sous-espace propre $E_2(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel dont les vecteurs sont des triplets de réels.

  Ce qu'on peut résumer par : $(x, y, z) \neq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

□

4. a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.
- Montrons que la famille $\big((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :
  $$\lambda_1 \cdot (1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$
  Ceci équivaut au système :
  $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
  $$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
  $$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
  $$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$
  (par remontées successives)

  La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.
- De plus, $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, u_3) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3$).
- $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, u_3). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, u_3) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\mathrm{Card}(\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3))}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, u_3))}$ n'ont aucun sens !

□

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

Démonstration.
Notons $U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment que $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit que $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- On a démontré précédemment que $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit que $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u_3)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = A \times U_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant (U_1, U_2, U_3).
  Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Ce qui équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & 4 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & - & \beta & & & = & 1 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & & & = & 2 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

  On en déduit que $f(u_3) = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$.
  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'énoncé, $N = T - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- De plus : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
  (on peut aussi noter que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^2 \ N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = 0$)
- Les matrices $2I$ et N commutent puisque I commute avec toute matrice carrée de même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

$$
\begin{aligned}
T^n &= (2\,I + N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\,I)^{n-k} \ N^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ 2^{n-k} \, I^{n-k} \ N^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ 2^{n-k} \, I \ N^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ 2^{n-k} \ N^k && \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N}, \ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \ 2^{n-k} \ N^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \ 2^{n-k}} \ N^k && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \ 2^{n-k} \ N^k && \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2, \ N^k = 0\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} \ 2^n \ N^0 + \binom{n}{1} \ 2^{n-1} \ N^1 \ = \ 2^n \ I + n \ 2^{n-1} \ N
\end{aligned}
$$

- Enfin : $2^0 \ I + 0 \ 2^{-1} \ N = I$ et $T^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ T^n = 2^n \ I + n \ 2^{n-1} \ N.}$$

- De plus, comme $N = T - 2I$, on obtient :

$$T^n \ = \ 2^n \ I + n \ 2^{n-1} \ (T - 2I) \ = \ 2^n \ I + n \ 2^{n-1} \ T - n \ 2^n \ I \ = \ n \ 2^{n-1} \ T - (n-1) \ 2^n \ I$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ T^n = n \ 2^{n-1} \ T - (n-1) \ 2^n \ I.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la deuxième somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.

□

5. a) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$

- Remarquons tout d'abord, à l'aide de la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} T^n & = & n2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I & \\ \text{Ainsi } \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)^n & = & n2^{n-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(Id) & \textit{(par définition de } T \textit{ et } I\textit{)} \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(n2^{n-1}\ f - (n-1)\ 2^n\ Id\big) & \textit{(par linéarité de l'application } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(.)\textit{)} \end{array}$$

  Enfin, comme $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n)$, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(n2^{n-1}\ f - (n-1)\ 2^n\ Id\big)$$

  L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(.)$ étant bijective, on en conclut :

$$\boxed{f^n = n2^{n-1}\ f - (n-1)\ 2^n\ Id}$$

- En appliquant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ de part et d'autre de cette égalité, on obtient, à l'aide des propriétés listées au-dessus :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = n2^{n-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Id)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\, 2^n\ I}$$

Commentaire

- Il faut comprendre que l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ établit un isomorphisme entre l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
  La base $\mathscr{B}$ étant fixée, cela signifie que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ possède une unique représentation matricielle dans $\mathscr{B}$ et qu'inversement toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle dans $\mathscr{B}$ d'un unique endomorphisme.
- Le passage du monde des endomorphismes vers le monde matriciel (application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$) est parfois appelé « passerelle endomorphisme-matrice ».
  Le passage du monde matriciel vers le monde des endomorphismes (la réciproque de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$) est parfois appelé « passerelle matrice-endomorphisme ».
  On peut donc rédiger comme suit.

  On rappelle :

$$T^n = n2^{n-1}\ T - (n-1)\, 2^n\ I$$

  × Comme T est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$, on en déduit, par la passerelle matrice-endomorphisme :

$$f^n = n2^{n-1}\ f - (n-1)\, 2^n\ Id$$

  × Comme A est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3), on en déduit, par la passerelle endomorphisme-matrice :

$$A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\, 2^n\ I$$

Commentaire

On pouvait procéder autrement.
Notons $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Alors :

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ &= P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \ = \ P \times T \times P^{-1} \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.
(la récurrence n'est pas explicitement demandée dans le sujet, il n'est donc pas utile de la faire)
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I$. Donc :

$$\begin{aligned} A^n &= P\ T^n\ P^{-1} \ = \ P\ (n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I)\ P^{-1} \\ &= n\ 2^{n-1}\ P\ T\ P^{-1} - (n-1)\ 2^n\ P\ P^{-1} \\ &= n\ 2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I \end{aligned}$$

Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = n\ 2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I$. □

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

Démonstration.
D'après la question ***1.***, $A^2 - 4A = -4I$.

On en déduit que $-\dfrac{1}{4}\ (A^2 - 4A) = I$. Et ainsi :

$$A \times \left(-\frac{1}{4}\ (A - 4I) \right) = I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse : } A^{-1} = -\frac{1}{4}\ (A - 4I).}$$
□

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5a*** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned} n\ 2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I &= (-1)\ 2^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 2^{-1}\ I \\ &= (-1)\ \frac{1}{2^2}\ A - (-2)\ \frac{1}{2}\ I \ = \ -\frac{1}{4}\ A + I \\ &= -\frac{1}{4}(A - 4I) \ = \ A^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule trouvée à la question } \textit{\textbf{5.a)}} \text{ reste valable pour } n = -1.}$$
□

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt$.

1. Étude de f_n.

a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$.
Donner le sens de variation de f_n.

Démonstration.
Dans la suite, notons g la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$.

- La fonction g est continue sur $[n, +\infty[$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ où :

  × $g_1 : t \mapsto \sqrt{t}$ est :
    - continue sur $[n, +\infty[$ (car $n \geqslant 0$),
    - telle que $g_1([n, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.

  × $g_2 : t \mapsto \exp(t)$, continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, g admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$.

- Soit $x \in [n, +\infty[$. Par définition :

$$f_n(x) = \int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt = [\ G(t)\ ]_n^x = G(x) - G(n)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [n, +\infty[\text{ car } G \text{ l'est.}}$$

(f_n est la somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ et d'une constante)

- De plus :

$$f_n'(x) = G'(x) - 0 = g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$$

- On remarque enfin que $f_n'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est strictement croissante sur } [n, +\infty[.}$$

Commentaire

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction f_n est la primitive de g sur $[n, +\infty[$ qui s'annule au point n. On en déduit immédiatement que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ et : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n'(x) = g(x)$.
- L'intérêt de la démonstration précédente est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers. Imaginons par exemple une fonction h_n définie par :

$$\forall x \in [n, +\infty[,\ h_n(x) = \int_n^{x^2} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt = [\ G(t)\ ]_n^{x^2} = G(x^2) - G(n)$$

  La fonction h_n `N'EST PAS` une primitive de g.
  L'expression ci-dessus permet toutefois de conclure que h_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ comme composée de $x \mapsto x^2$ par G toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in [n, +\infty[,\ h_n'(x) = 2x \times G'(x^2) = 2x \times g(x^2) = 2x\ \mathrm{e}^{\sqrt{x^2}} = 2x\ \mathrm{e}^{x}$$

- Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de dériver sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in [n, +\infty[$.

- Soit $t \in [n, x]$. Remarquons tout d'abord :

$$t \geqslant n \Leftrightarrow \sqrt{t} \geqslant \sqrt{n} \quad \textit{(car } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)}$$

$$\Leftrightarrow e^{\sqrt{t}} \geqslant e^{\sqrt{n}} \quad \textit{(car } t \mapsto e^t \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)}$$

$$\boxed{\forall t \in [n, x], \ g(t) \geqslant e^{\sqrt{n}}}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \geqslant n$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{n}}\, dt & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ f_n(x) & \geqslant & e^{\sqrt{n}}\,(x-n) & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \end{array}$$

  En effet, $e^{\sqrt{n}} > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - n) = +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par théorème de comparaison : } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.}$$

Commentaire

- Dans cette question, il s'agit de déterminer la limite de $f_n(x)$ quand $\boldsymbol{x} \to +\infty$ (à n fixé) et non pas la limite de $f_n(x)$ quand $\boldsymbol{n} \to +\infty$ (à x fixé).
- Une lecture précise du sujet doit permettre de ne pas faire ce type de confusions.

□

c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Notons tout d'abord : $f_n(n) = \displaystyle\int_n^n e^{\sqrt{t}}\, dt = 0$.
- La fonction f_n est :
  × continue sur l'intervalle $[n, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

  Ainsi, f_n réalise une bijection de $[n, +\infty[$ dans $f_n\big([n, +\infty[\big)$.

$$f_n\big([n, +\infty[\big) = [f_n(n), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [0, +\infty[$$

- Comme $1 \in [0, +\infty[$, on en déduit que 1 admet un unique antécédent $u_n \in [n, +\infty[$ par la fonction f_n.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe un unique réel } u_n \in [n, +\infty[\text{ tel que } f_n(u_n) = 1.}$$

□

2. Étude de la suite (u_n).

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de u_n, on sait que $u_n \in [n, +\infty[$. Ainsi, $u_n \geqslant n$.
- Or : $n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème de comparaison, } \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

□

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Démonstration.

- Soit $t \in [n, u_n]$. Remarquons tout d'abord :

$$n \leqslant t \leqslant u_n \Leftrightarrow \sqrt{n} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{u_n} \quad \textit{(car } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{t}} \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}} \quad \textit{(car } t \mapsto e^t \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)}$$

$$\boxed{\forall t \in [n, u_n], \ \mathrm{e}^{\sqrt{n}} \leqslant g(t) \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($u_n \geqslant n$) :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{n}}\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}\, dt \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
\mathrm{e}^{\sqrt{n}}\, (u_n - n) & \leqslant & f_n(u_n) & \leqslant & \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}\, (u_n - n) \\
& & \shortparallel & & \\
& & 1 & &
\end{array}$$

- Ainsi : $\mathrm{e}^{\sqrt{n}}\, (u_n - n) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Par multiplication par } \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \geqslant 0, \text{ on obtient : } u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}$$

- Et : $1 \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}\, (u_n - n)$.

$$\boxed{\text{Par multiplication par } \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant 0, \text{ on obtient : } \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n}$$

□

3. *a)* Utiliser la question *2.b)* pour compléter les commandes **Scilab** suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n = 0
while ------
    n = ------
end
disp(n)
```

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$
- Afin de trouver un entier n tel que $u_n - n \leqslant 10^{-4}$, il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\mathrm{e}^{-\sqrt{N}} \leqslant 10^{-4}$$
- On obtient alors, par transitivité :
$$u_N - N \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{N}} \leqslant 10^{-4}$$
- Il s'agit donc de trouver le premier entier N tel que $\mathrm{e}^{-\sqrt{N}} \leqslant 10^{-4}$.
Pour ce faire, on teste successivement tous les entiers naturels.
On arrête l'itération dès le premier entier qui satisfait cette relation.

```
while exp(-sqrt(n)) > 10 ^ (-4)
    n = n + 1
end
```

Commentaire

- La terminaison du programme présenté est assuré par le fait que $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant \varepsilon$.
C'est notamment vrai pour $\varepsilon = 10^{-4}$.
- L'énoncé original contenait une coquille sans gravité. En effet, la quesiton posée demandait de trouver le premier n tel que v_n est inférieur ou égal à 10^{-4}.
Or, la suite (v_n) n'est introduite qu'en question *4*.

$\square$

b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$.
Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$.

Démonstration.

- On cherche à déterminer l'entier N précédent. Or :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4} & \Leftrightarrow & -\sqrt{n} \leqslant \ln(10^{-4}) = -4\ln(10) & \textit{(car } x \mapsto \ln(x) \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{n} \geqslant 4\ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant \big(4\ln(10)\big)^2 & \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, le premier entier vérifiant la relation : $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4}$ est l'entier $N = \lceil (4\ln(10))^2 \rceil$.
(où $x \mapsto \lceil x \rceil$ désigne la fonction partie entière par excès)
- Cherchons maintenant une valeur approchée de $(4\ln(10))^2$.
D'après l'énoncé : $\ln(10) \simeq 2,3$, donc $4\ln(10) \simeq 9,2 \geqslant 9$.
On en déduit :
$$\big(4\ln(10)\big)^2 \geqslant 9^2 = 81$$
La seule solution possible parmi celles proposées est $n = 85$.

$$\boxed{\text{Le script affiche } n = 85.}$$

$\square$

4. On pose $v_n = u_n - n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***2.b)***, $\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$. Autrement dit :
$$\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant v_n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$
- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = \lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u} = 0$.
  En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} = \lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u} = 0$.
  En effet, on rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (question ***2.a)***) et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.}$$ □

b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

Démonstration.

- Notons h la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par :
$$h(x) = \sqrt{1+x}$$
- La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $x \in\ ]-1, +\infty[$, on a :
$$h'(x) = \frac{1}{2}\ (1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad h''(x) = -\frac{1}{4}\ (1+x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4}\ \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{4}\ \frac{1}{(1+x)\ \sqrt{1+x}}$$
Or : $1 + x > 0$ et donc $\sqrt{1+x} > 0$. On en déduit :
$$\forall x \in\ ]-1, +\infty[,\ h''(x) < 0$$
- La fonction h est donc concave.
Sa courbe représentative est donc située en dessous de ses tangentes.
En particulier, elle est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0. Ainsi :
$$\forall x \in [-1, +\infty[,\ h(x) \ \leqslant\ h(0) + h'(0)\ (x - 0)$$
Enfin : $h(0) = \sqrt{1+0} = 1$ et $h'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in [-1, +\infty[,\ \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}}$$

Commentaire

- On a dérivé h grâce à l'écriture : $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.
Il faut savoir passer d'une écriture à l'autre dans les calculs.
- Le membre droit de l'inégalité souhaitée est un polynôme de degré 1. Sa représentation graphique est une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto 1 + \dfrac{x}{2} - \sqrt{1+x}$.

□

c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \exp\left(-\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad -\sqrt{u_n} \geqslant -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}} && \textit{(car } x \mapsto \ln(x) \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \frac{v_n}{2n} && \textit{(car } \sqrt{n} > 0 \textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{u_n}{n}} \leqslant 1 + \frac{v_n}{2n} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{v_n + n}{n}} \leqslant 1 + \frac{v_n}{2n} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + \frac{v_n}{n}} \leqslant 1 + \frac{\frac{v_n}{n}}{2}
\end{aligned}$$

- En appliquant le résultat de la question ***4.b)*** à $x = \dfrac{v_n}{n}$ (ce qui est licite car $\dfrac{v_n}{n} \geqslant 0 > -1$), on démontre la dernière inégalité.
Par raisonnement par équivalence, la première inégalité l'est alors aussi.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)}$$

Commentaire

- Le mode de raisonnement le plus habituel est celui par implication : on part d'une hypothèse et par une suite logique de propositions, on aboutit au résultat souhaité.
- Ici, on raisonne par équivalence : on démontre que le résultat souhaité a la même valeur de vérité qu'une proposition plus simple à démontrer. Le fait que l'on travaille par équivalence permet de s'assurer que l'on peut remonter de cette proposition jusqu'au résultat. Ce mode de démonstration est adapté à cette question car le résultat à démontrer ne semble pas directement impliqué par une hypothèse à disposition.
- Le programme officiel interdit l'utilisation du symbole $\Leftrightarrow$ comme abréviation. L'utilisation de ce symbole n'est pas neutre et doit être réservée au mode de raisonnement par équivalence.

$\square$

d) Déduire de l'encadrement obtenu en ***2.b)*** que : $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***2.b)*** :

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{n}} \geqslant u_n - n &\geqslant e^{-\sqrt{u_n}} \\ &\geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \quad \textit{(d'après la question 4.c))} \end{aligned}$$

- Comme $e^{-\sqrt{n}} > 0$, on obtient :

$$1 \geqslant \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \geqslant \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$$

- Or, d'après la question ***4.a)***, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
  On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = e^0 = 1$.
  Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$.

$$\boxed{u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}}$$

□

Exercice 3

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0,1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.
- On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([Z=1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z=-1]) = 1-p$$

- Enfin,on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

- On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3,1])$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-3,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.}$$

- D'après l'énoncé, $V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,3])$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } x \in [-1,3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}.}$$

Commentaire

- Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours.
- Ici, il suffit de connaître la fonction de répartition d'une variable $U \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ (avec $a < b$) :

$$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

□

2. a) Établir, grâce au système complet d'évènements $([Z=1], [Z=-1])$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La famille $\big([Z=1], [Z=-1]\big)$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([X \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([Z=1] \cap [X \leqslant x]) + \mathbb{P}([Z=-1] \cap [X \leqslant x]) \\
& = & \mathbb{P}([Z=1] \cap [U \leqslant x]) + \mathbb{P}([Z=-1] \cap [V \leqslant x]) \quad \textit{(par définition de } X\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}([Z=1]) \times \mathbb{P}([U \leqslant x]) + \mathbb{P}([Z=-1]) \times \mathbb{P}([V \leqslant x]) \quad \textit{(car } Z \textit{ est indépendante de } U \textit{ et de } V\textit{)} \\
& = & p \times \mathbb{P}([U \leqslant x]) + (1-p) \times \mathbb{P}([V \leqslant x]) \\
& = & p \times F_U(x) + (1-p) \times F_V(x)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ \ F_X(x) = p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x).}$$

□

b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.
  - Si $Z(\omega) = 1$ alors, par définition, $X(\omega) = U(\omega)$.
    Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3,1])$ alors $U(\omega) \in [-3,1]$.
    Dans ce cas, $X(\omega) \in [-3,1]$.

– Si $Z(\omega) = -1$ alors, par définition, $X(\omega) = V(\omega)$.
Comme $V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,3])$ alors $U(\omega) \in [-1,3]$.

Dans ce cas, $X(\omega) \in [-1,3]$.

Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in [-3,1] \cup [-1,3] = [-3,3]$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X(\Omega) \subset [-3,3].}$$

Commentaire

- On peut supposer ici qu'une argumentation moins formelle serait acceptée par le correcteur. Comme X prend les mêmes valeurs que U ou V (selon les valeurs prises par Z), on peut écrire :
$$X(\Omega) \subset U(\Omega) \cup V(\Omega) = [-3,1] \cup [-1,3] = [-3,3]$$
- On peut aussi supposer qu'une disjonction de cas écrite sans les ω (cas $Z = 1$ et cas $Z \neq 1$) serait acceptée. Cependant, il faut bien comprendre que toute v.a.r. Z est une application $Z : \Omega \to \mathbb{R}$. Écrire « si $Z = 1$ » signifie donc que l'on considère tous les éléments $\omega \in \Omega$ tels que $Z(\omega) = 1$ c'est à dire tous les éléments ω qui réalisent l'événement $[Z = 1]$.
- Une dernière possibilité est d'écrire la rédaction (correcte) suivante :
  – si l'événement $[Z = 1]$ est réalisé alors X prend la même valeur que U, v.a.r. qui prend ses valeurs dans $[-3,1]$.
  – si l'événement $[Z = -1]$ est réalisé alors X prend la même valeur que V, v.a.r. qui prend ses valeurs dans $[-1,3]$.

  Ainsi, X prend ses valeurs dans $[-3,1] \ \cup \ [-1,3] = [-3,3]$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.
  – Si $x < -3$ alors $[X \leqslant x] = \varnothing$.
  On en déduit que $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 0$.
  – Si $x \in [-3,-1]$ alors, d'après la question précédente :
$$F_X(x) \ = \ p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x) \ = \ p\frac{x+3}{4} + (1-p) \times 0 \ = \ p\ \frac{x+3}{4}$$
  – Si $x \in [-1,1]$ alors, d'après la question précédente :
$$F_X(x) \ = \ p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x) \ = \ p\ \frac{x+3}{4} + (1-p)\frac{x+1}{4} \ = \ \frac{x+2p+1}{4}$$
  – Si $x \in [1,3]$ alors, d'après la question précédente :
$$F_X(x) \ = \ p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x) \ = \ p \times 1 + (1-p)\ \frac{x+1}{4} \ = \ p + (1-p)\ \frac{x+1}{4}$$
  – Si $x > 3$ alors $[X \leqslant x] = \Omega$.
  On en déduit que $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ p\ \dfrac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-3,-1] \\ \dfrac{x+2p+1}{4} & \text{si } x \in [-1,1] \\ p + (1-p)\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } x \in [1,3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}}$$ □

c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

Démonstration.

- La fonction F_X est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$.
    En effet, elle est de classe $\mathcal{C}^0$ (même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,3[\,\cup\,]3,+\infty[$ car polynomiale sur chacun de ces intervalles.
    De plus, elle est continue en -3 car : $\lim\limits_{x\to(-3)^-} F_X(x) = F_X(-3) = \lim\limits_{x\to(-3)^+} F_X(x) = 0$.
    De la même manière, elle est aussi continue en -1, 1 et 3.
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,3[\,\cup\,]3,+\infty[\, = \mathbb{R}\setminus\{-3,-1,1,3\}$.

  Ainsi, X est une variable à densité.
- Afin d'obtenir une densité f_X, on dérive F_X sur les intervalles **ouverts**.
  Soit $x\in\mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent :
  - × si $x\in\,]-\infty,-3[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = 0$.
  - × si $x\in\,]-3,-1[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = \dfrac{p}{4}$.
  - × si $x\in\,]-1,1[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = \dfrac{1}{4}$.
  - × si $x\in\,]1,3[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = \dfrac{1-p}{4}$.
  - × si $x\in\,]3,+\infty[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = 0$.

  Enfin, on **choisit**, par exemple, $f_X(-3)=0$, $f_X(-1)=\dfrac{1}{4}$, $f_X(1)=\dfrac{1}{4}$ et $f_X(3)=0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x\in\mathbb{R},\quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant -3 \\ \dfrac{p}{4} & \text{si } x\in\,]-3,-1[\\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x\in[-1,1] \\ \dfrac{1-p}{4} & \text{si } x\in\,]1,3[\\ 0 & \text{si } x\geqslant 3 \end{cases}}$$

Commentaire

Il faut bien comprendre qu'on peut prendre n'importe quelle valeur positive pour f_n en -3, -1, 1 et 3. On peut ainsi construire une infinité de densités de Y_n.
C'est pourquoi on parle d'**une** densité.

□

d) Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, puis les déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ f_X(t)\ dt$.

- Remarquons tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \ = \ \int_{-3}^{3} t\ f_X(t)\ dt$$
car f est nulle en dehors de $[-3, 3]$.
- La fonction $t \mapsto t\ f(t)$ est **continue par morceaux** sur $[-3, 3]$.
On en déduit que $\displaystyle\int_{-3}^{3} t\ f_X(t)\ dt$ est bien définie et que X admet une espérance donnée par :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-3} t\ 0\ dt} + \int_{-3}^{-1} t\ \frac{p}{4}\ dt + \int_{-1}^{1} t\ \frac{1}{4}\ dt + \int_{1}^{3} t\ \frac{1-p}{4}\ dt + \cancel{\int_{3}^{+\infty} t\ 0\ dt} \\
&= \frac{p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{3} \\
&= \frac{p}{8}\ ((-1)^2 - (-3)^2) + \frac{1}{8}\ (1^2 - (-1)^2) + \frac{1-p}{8}\ (3^2 - 1^2) \\
&= \frac{p}{8}\ (1-9) + \frac{1}{8}\ \cancel{(1-1)} + \frac{1-p}{8}\ (9-1) \\
&= \frac{1}{8}\ (-8\ p + 8\ (1-p)) \\
&= -p + (1-p) \ = \ 1 - 2p
\end{aligned}$$
- De même, la fonction $t \mapsto t^2\ f(t)$ est **continue par morceaux** sur $[-3, 3]$. On en déduit que $\displaystyle\int_{-3}^{3} t^2\ f_X(t)\ dt$ est bien définie et que X admet un moment d'ordre 2 donné par :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\ dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-3} t^2\ 0\ dt} + \int_{-3}^{-1} t^2\ \frac{p}{4}\ dt + \int_{-1}^{1} t^2\ \frac{1}{4}\ dt + \int_{1}^{3} t^2\ \frac{1-p}{4}\ dt + \cancel{\int_{3}^{+\infty} t^2\ 0\ dt} \\
&= \frac{p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{1}^{3} \\
&= \frac{p}{12}\ ((-1)^3 - (-3)^3) + \frac{1}{12}\ (1^3 - (-1)^3) + \frac{1-p}{12}\ (3^3 - 1^3) \\
&= \frac{p}{12}\ (-1+27) + \frac{1}{12}\ (1+1) + \frac{1-p}{12}\ (27-1) \ = \ \frac{1}{12}\ (26\ p + 2 + 26\ (1-p)) \\
&= \frac{1}{6}\ (13\ p + 1 + 13\ (1-p)) \ = \ \frac{1}{6}\ (\cancel{13\ p} + 1 + 13 - \cancel{13\ p}) \ = \ \frac{14}{6} \ = \ \frac{7}{3}
\end{aligned}$$
- Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{7}{3} - (1-2p)^2 = \frac{7}{3} - (1 - 4p + 4p^2) = \frac{4}{3} + 4p - 4p^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) = 1 - 2p \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X) = \frac{4}{3} + 4p - 4p^2.}$$

Commentaire

Revenons sur l'hypothèse de continuité par morceaux.

- Tout d'abord, il faut se rendre compte que la fonction $h : t \mapsto t\ f_X(t)$ `N'EST PAS` continue sur $[-3, 3]$. En fait, elle n'est pas continue en -3, ni en -1, ni en 1, ni en 3. Par contre h est continue sur $]-\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.
- Pour autant, cela ne signifie pas que l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{-1} h(t)\ dt$ est impropre.
  En effet, la fonction $h_{|]-3,-1[}$ (restriction de h sur l'ensemble $]-3, -1[$) :
  × admet une limite finie en -3 (égale à $-3\ \frac{p}{4}$),
  × admet une limite finie en -1 (égale à $-\frac{p}{4}$).
  Ainsi, $h_{|]-3,-1[}$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[-3, -1]$ ce qui justifie que l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{-1} h(t)\ dt$ est bien définie.
  Mais c'est la fonction $h_{|]-3,-1[}$ qui est prolongée par continuité et en aucun cas h (ce qui n'aurait pas de sens : la fonction h est définie en -3 et en -1, il n'y a pas lieu de la prolonger en ces points).
- La notion de continuité par morceaux décrit complètement cette situation :
  × h est continue sur les intervalles ouverts $]-\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$ *(ici, elle n'est pas continue en -3, -1, 1, 3)*.
  × h admet une limite finie à gauche en tous ces points.
  × h admet une limite finie à droite en tous ces points.
  (la limite à gauche est éventuellement différente de la limite à droite)
  Ainsi, h est **continue par morceaux** sur $[-3, 3]$.

□

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

a) Vérifier que l'on a :

$$X = U\ \frac{1+Z}{2} + V\ \frac{1-Z}{2}$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $Z(\omega) = 1$ alors $X(\omega) = U(\omega)$ et :

$$U(\omega)\ \frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\ \frac{1-Z(\omega)}{2} = U(\omega)\ \frac{1+1}{2} + \cancel{V(\omega)\ \frac{1-1}{2}} = U(\omega) = X(\omega)$$

- Si $Z(\omega) \neq 1$ alors $Z(\omega) = -1$, $X(\omega) = V(\omega)$ et :

$$U(\omega)\ \frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\ \frac{1-Z(\omega)}{2} = \cancel{U(\omega)\ \frac{1-1}{2}} + V(\omega)\ \frac{1+1}{2} = V(\omega) = X(\omega)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \omega \in \Omega,\ \ X(\omega) = U(\omega)\ \frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\ \frac{1-Z(\omega)}{2}.}$$

□

b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que U et V admettent une espérance car elles suivent des lois uniformes. De plus :
$$\mathbb{E}(U) = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(V) = \frac{-1+3}{2} = 1$$
- Les v.a.r. Z, $\dfrac{1+Z}{2}$ et $\dfrac{1-Z}{2}$ sont finies donc admettent une espérance. De plus :
$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} z \ \mathbb{P}([Z=z]) = -1 \ \mathbb{P}([Z=-1]) + 1 \ \mathbb{P}([Z=1]) = -(1-p) + p = 2p-1$$
Et par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{E}(1) + \mathbb{E}(Z)\right) = \frac{1}{2} \left(\cancel{1} + 2p - \cancel{1}\right) = p$$
$$\mathbb{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{E}(1) - \mathbb{E}(Z)\right) = \frac{1}{2} \left(1 - 2p + 1\right) = 1-p$$
- Les v.a.r. U et Z sont indépendantes.
Par le lemme des coalitions, on en déduit que les v.a.r. U et $\dfrac{1+Z}{2}$ sont indépendantes.
On en déduit que la v.a.r. $U \ \dfrac{1+Z}{2}$ admet une espérance comme produit de v.a.r. indépendantes admettant une espérance. De plus :
$$\mathbb{E}\left(U \ \frac{1+Z}{2}\right) \ = \ \mathbb{E}(U) \ \mathbb{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) = -p$$
- De même, les v.a.r. V et Z sont indépendantes.
Par le lemme des coalitions, on en déduit que les v.a.r. V et $\dfrac{1-Z}{2}$ sont indépendantes.
On en déduit que la v.a.r. $V \ \dfrac{1-Z}{2}$ admet une espérance comme produit de v.a.r. indépendantes admettant une espérance. De plus :
$$\mathbb{E}\left(V \ \frac{1-Z}{2}\right) \ = \ \mathbb{E}(V) \ \mathbb{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = 1-p$$
- Enfin, d'après la question précédente, X s'écrit comme la somme de deux v.a.r. qui admettent une espérance. On en déduit que X admet une espérance. Par linéarité, on obtient :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(U \ \frac{1+Z}{2} + V \ \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(U \ \frac{1+Z}{2}\right) + \mathbb{E}\left(V \ \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= -p + (1-p) = 1-2p \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On retrouve bien que } X \text{ admet une espérance et que } \mathbb{E}(X) = 1-2p.}$

□

c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.
On procède comme dans la question précédente.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(U \ \frac{1+Z}{2} + V \ \frac{1-Z}{2}\right)^2 = \left(U \ \frac{1+Z}{2}\right)^2 + UV \ \frac{1-Z^2}{4} + \left(V \ \frac{1-Z}{2}\right)^2 \\ &= U^2 \ \frac{1+2Z+Z^2}{4} + UV \ \frac{1-Z^2}{4} + V^2 \ \frac{1-2Z+Z^2}{4} \end{aligned}$$

  Or, comme $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$, $Z^2(\Omega) = \{1\}$ et ainsi $Z^2 = 1$ (Z^2 est la variable constante égale à 1). On en déduit :

$$\begin{aligned} X^2 &= U^2 \ \frac{1+2Z+1}{4} + \cancel{UV \ \frac{1-1}{4}} + V^2 \ \frac{1-2Z+1}{4} \\ &= U^2 \ \frac{1+Z}{2} + V^2 \ \frac{1-Z}{2} \end{aligned}$$

- Les v.a.r. U et V, qui suivent des lois uniformes, admettent un moment d'ordre 2 puisqu'elles admmettent une variance. On peut déduire de la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{E}(U^2) = \mathbb{V}(U) + (\mathbb{E}(U))^2 = \frac{(1-(-3))^2}{12} + (-1)^2 = \frac{16}{12} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$\mathbb{E}(V^2) = \mathbb{V}(V) + (\mathbb{E}(V))^2 = \frac{(3-(-1))^2}{12} + 1^2 = \frac{16}{12} + 1 = \frac{7}{3}$$

- Les v.a.r. U^2, $\frac{1+Z}{2}$ admettent une espérance et sont indépendantes.
  On en déduit que la v.a.r. produit $U^2 \ \frac{1+Z}{2}$ admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}\left(U^2 \ \frac{1+Z}{2}\right) = \mathbb{E}(U^2) \ \mathbb{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) = \frac{7}{3} \ p$$

- Les v.a.r. V^2, $\frac{1-Z}{2}$ admettent une espérance et sont indépendantes.
  On en déduit que la v.a.r. produit $V^2 \ \frac{1-Z}{2}$ admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}\left(V^2 \ \frac{1-Z}{2}\right) = \mathbb{E}(V^2) \ \mathbb{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = \frac{7}{3} \ (1-p)$$

- X^2 admet une espérance car est la somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
  Enfin, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}\left(U^2 \ \frac{1+Z}{2} + V^2 \ \frac{1-Z}{2}\right) = \mathbb{E}\left(U^2 \ \frac{1+Z}{2}\right) + \mathbb{E}\left(V^2 \ \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= \frac{7}{3} \ p + \frac{7}{3} \ (1-p) = \frac{7}{3} \ (p + (1-p)) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(X^2) = \frac{7}{3}.}$$

□

4. a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Déterminer la loi de $2T-1$.

Démonstration.

- Comme $T \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $T(\Omega) = \{0, 1\}$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} (2T-1)(\Omega) & = & \{2u-1 \mid u \in T(\Omega)\} \\ & = & \{2 \times (-1) - 1, 2 \times -1\} \\ & = & \{-1, 1\} \end{array}$$

$$\boxed{(2T-1)(\Omega) = \{-1, 1\}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{lclclcl} \mathbb{P}([2T-1=-1]) & = & \mathbb{P}([2T=0]) & = & \mathbb{P}([T=0]) & = & 1-p \\ \mathbb{P}([2T-1=1]) & = & \mathbb{P}([2T=2]) & = & \mathbb{P}([T=1]) & = & p \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } 2T-1 \text{ et } Z \text{ suivent la même loi.}}$$

Commentaire

- Dire que deux v.a.r. discrètes Z_1 et Z_2 suivent la même loi ne signifie pas que $Z_1 = Z_2$.
Cela ne signifie pas non plus que $\mathbb{P}([Z_1 = Z_2]) = 1$.
Cela signifie simplement :
  - × $Z_1(\Omega) = Z_2(\Omega)$,
  - × $\forall z \in Z_1(\Omega)$, $\mathbb{P}([Z_1 = z]) = \mathbb{P}([Z_2 = z])$.
- Comme $Z(\Omega) = \{-1, 1\} \neq \{0, 1\}$, la v.a.r. Z ne suit pas une loi de Bernoulli.
De manière générale, une v.a.r. qui ne prend que deux valeurs ne suit pas pour autant une loi de Bernoulli. Pour que ce soit le cas, il faut que ces deux valeurs soient 0 et 1.

□

b) On rappelle que `grand(1,1,'unf',a,b)` et `grand(1,1,'bin',p)` sont des commandes **Scilab** permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Écrire des commandes **Scilab** permettant de simuler U, V, Z, puis X.

Démonstration.

- Pour simuler les v.a.r. U, V et T, il suffit d'utiliser les instructions données.

```
U = grand(1,1,'unf',-3,1)
V = grand(1,1,'unf',-1,3)
T = grand(1,1,'bin',p)
```

- Pour les v.a.r. Z et X on utilise les questions ***3.a)*** et ***4.a)***.

```
Z = 2 * T - 1
X = U * (1+Z)/2 + V * (1-Z)/2
```

Commentaire

- Ces quelques lignes ne sont utilisables que si `p` est préalablement défini. Pour ce faire, on peut ajouter une ligne : `p = input('Entrer une valeur pour p : ')` en début de programme afin que l'utilisateur entre une valeur pour `p`.
  Une autre manière de régler ce problème est de transformer ce programme en une fonction de paramètre `p`.
- Dans le programme, on a écrit : `Z = 2 * T - 1`. Autrement dit, on a décidé de simuler la v.a.r. Z en lui donnant pour valeurs celles d'une v.a.r. qui suit la même loi. Au-delà de la v.a.r. , c'est ici la loi qu'on cherche à simuler. Ainsi, n'importe quelle v.a.r. qui suit cette loi fait l'affaire.
- Comme dit précédemment, la v.a.r. `Z` ne suit pas une loi de Bernoulli.
  Toutefois, on a vu en question précédente :

$$\mathbb{P}([Z=-1]) \;=\; \mathbb{P}([T=0]) \;=\; 1-p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z=1]) \;=\; \mathbb{P}([T=1]) \;=\; p$$

  On peut exploiter ce point pour écrire `Z` à l'aide d'une structure conditionnelle :

```
T = grand(1,1,'bin',p)
if T == 0 then
    Z = -1
else
    Z = 1
end
```

- Une fois `U`, `V` et `Z` codées, on peut aussi coder `X` en se servant de sa définition initiale.

```
if Z == 1 then
    X = U
else
    X = V
end
```

□

Problème

Partie I : Questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in [0,x]$. Par conséquent, $t \leqslant x < 1$ et donc $t \neq 1$. Ainsi :

$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \;=\; \sum_{p=0}^{n-1} t^{p} \;=\; \frac{1-t^n}{1-t}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,x],\ \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \;=\; \frac{1-t^n}{1-t}}$$

□

b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\, dt$.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto \sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$ (polynôme de degré $n-1$) est continue sur $[0,x]$. Il en est donc de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{1-t^n}{1-t}$ puisque ces deux fonctions coïncident sur $[0,x]$.
- On déduit de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\right) dt &= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= -\int_0^x \frac{-1}{1-t}\, dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \\
&= -\left[\ \ln(|1-t|)\ \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \\
&= -\left[\ \ln(1-t)\ \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt && \textit{(car } 1-t>0 \textit{ puisque } t<1\textit{)} \\
&= -(\ln(1-x) - \cancel{\ln(1)}) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt
\end{aligned}$$

On remarque enfin, par linéarité de l'intégration :

$$\int_0^x \left(\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\right) dt = \sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1}\, dt = \sum_{p=1}^{n} \left[\ \frac{t^p}{p}\ \right]_0^x = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt}$$

□

c) Établir par encadrement que l'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\, dt = 0$.

Démonstration.
Soit $t \in [0,x]$. Ce qui signifie que $0 \leqslant t \leqslant x$.

- Tout d'abord, par croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 \leqslant t^n \leqslant x^n$$

- D'autre part :

comme	$0 \leqslant t \leqslant x$	
alors	$0 \geqslant -t \geqslant -x$	
et	$1 \geqslant 1-t \geqslant 1-x$	
enfin	$1 \leqslant \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$	*(par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$)*

- Toutes les quantités étant positives, on déduit des deux précédentes inégalités :

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{x^n}{1-x}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{1-t}$ est continue sur $[0,x]$.
  Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant x)$:
  $$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{1-x}\,dt = \frac{x^n}{1-x}\int_0^x 1\,dt = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$
- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = 0$ car, comme $x \in [0,1[$, $x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  On en déduit donc, par théorème d'encadrement, que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, et que cette limite est nulle.

  $$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0}$$

Commentaire

Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de passer à la limite sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- D'après la question ***1.b)***, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}$ admet une limite finie lorsque $n \to +\infty$ car s'écrit comme la somme de deux quantités ayant une limite finie.
- Par passage à la limite, on en déduit :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} & = & -\ln(1-x) & - & \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \\ \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} & = & -\ln(1-x) & - & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).}$$

□

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geqslant m, \ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

Démonstration.
L'entier m étant fixé, démontrons par récurrence : $\forall q \geqslant m$, $\mathcal{P}(q)$
où $\mathcal{P}(q)$: $\sum\limits_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$.

1) **Initialisation** :

- D'une part : $\sum\limits_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1$.
- D'autre part : $\binom{m+1}{m+1} = 1$.

D'où $\mathcal{P}(m)$.

2) **Hérédité** : soit $q \geqslant m$.
Supposons $\mathcal{P}(q)$ et démontrons $\mathcal{P}(q+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \binom{q+2}{m+1}$).
Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} \\ &= \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \binom{q+2}{m+1} && \textit{(par la formule du triangle de Pascal)} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(q+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall q \geqslant m, \ \mathcal{P}(q).}$$

□

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) \ = \ \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k - j])$$

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S_n(\omega) \ = \ \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \ \geqslant \ \sum_{k=1}^{n} 1 \ = \ n$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } S_n(\Omega) \subset [\![n, +\infty[\![.}$$

Commentaire

Cette question amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Même si cela ne correspond pas directement à la définition, il est d'usage courant de confondre, dans le cas des v.a.r. discrètes, l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$) et l'ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle (dans le cas où X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$).
- C'est certainement ce que le concepteur du sujet a en tête dans cette question. Les v.a.r. X_k étant indépendantes, il est aisé de démontrer que S_n peut prendre toutes les valeurs de $[\![n, +\infty[\![$ avec probabilité non nulle. Si on accepte la confusion entre $X(\Omega)$ et $\mathrm{Supp}(X)$, on peut alors rédiger comme suit.
  Rappelons que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$.
  Les variables X_k étant mutuellement indépendantes, on en déduit :

$$S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$$

- La famille $\big([S_n = j]\big)_{j \in [\![n,+\infty[\![}$ forme un système complet d'événements.
  Soit $k \geqslant n+1$. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) & = & \sum\limits_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [S_{n+1} = k]) \\
& = & \sum\limits_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [S_n + X_{n+1} = k]) \\
& = & \sum\limits_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k - j]) \\
& = & \sum\limits_{\substack{j = n \\ k-j \in X_{n+1}(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k - j]) \\
& & + \cancel{\sum\limits_{\substack{j = n \\ k-j \notin X_{n+1}(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k - j])} \quad \textit{(car } [X_{n+1} = k-j] = \varnothing \textit{)} \\
& = & \sum\limits_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k - j])
\end{array}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} k-j \in X_{n+1}(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ j \in [\![n, +\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant k-j \\ n \leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant k-1 \\ n \leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ n \leqslant j \leqslant k-1\right.$$

$$\boxed{\forall k \geqslant n+1,\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j]\ \cap\ [X_{n+1} = k-j])}$$

Commentaire

- Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET}\ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a, b, c, d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

  où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET}\ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a, c) \leqslant i \leqslant \min(b, d)}$$

  (à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

- On peut alors rédiger comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} k-j \in X_{n+1}(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ j \in [\![n, +\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant k-j < +\infty \\ n \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-k \leqslant -j < +\infty \\ n \leqslant j < +\infty \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\infty < j \leqslant k-1 \\ n \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ n \leqslant j \leqslant k-1\right.$$

□

b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \in [\![n, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1}\ x^n\ (1-x)^{k-n}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![n, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{k-1}{n-1}\ x^n\ (1-x)^{k-n}$.

1) **Initialisation** :
Soit $k \in [\![1, +\infty[\![$.

- D'une part : $\mathbb{P}([S_1 = k]) = \mathbb{P}([X_1 = k]) = (1-x)^{k-1}\ x$ car $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(x)$.
- D'autre part : $\dbinom{k-1}{1-1}\ x^1\ (1-x)^{k-1} = \dbinom{k-1}{0}\ x^1\ (1-x)^{k-1} = x\ (1-x)^{k-1}$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
(*i.e.* $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \binom{k-1}{n}\ x^{n+1}\ (1-x)^{k-(n+1)}$).

Soit $k \in \llbracket n+1, +\infty \llbracket$.

$$\begin{array}{cll}
& \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) & \\
= & \sum\limits_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j] \ \cap \ [X_{n+1} = k-j]) & \\
= & \sum\limits_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j]) \ \times \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k-j]) & \textit{(car } S_n \textit{ et } X_{n+1} \textit{ sont indépendantes (*))} \\
= & \sum\limits_{j=n}^{k-1} \left(\binom{j-1}{n-1} x^n \ (1-x)^{j-n} \right) \times \mathbb{P}([X_{n+1} = k-j]) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= & \sum\limits_{j=n}^{k-1} \left(\binom{j-1}{n-1} x^n \ (1-x)^{j-n} \right) \ (1-x)^{k-j-1} \ x & \textit{(car } X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{G}(x)\textit{)} \\
= & \sum\limits_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1} & \\
= & (x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1}) \sum\limits_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} & \textit{(car } x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1} \textit{ est indépendant de l'indice de sommation } j\textit{)} \\
= & (x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1}) \sum\limits_{j=n-1}^{k-2} \binom{j}{n-1} & \\
= & (x^{n+1} \ (1-x)^{k-n-1}) \binom{k-1}{n} & \textit{(d'après la question } \textbf{2.} \textit{ avec } q = k-2,\ m = n-1\textit{)}
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

(*) En effet, X_{n+1} est indépendante de X_1, X_2, $\ldots$, X_n.
On en déduit, par le lemme des coalitions, que X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \ldots + X_n$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

□

c) En déduire, pour tout x de $]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

Démonstration.
Soit $x \in]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $\big([S_n = k]\big)_{k \in \llbracket n, +\infty \llbracket}$ forme un système complet d'événements.
On en déduit :

$$\begin{array}{ccc}
\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k]) & = & 1 \\
\shortparallel & & \\
\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^n \ (1-x)^{k-n} & & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, en multipliant de part et d'autre par } \dfrac{1}{x^n} \text{ :} \\ \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \dfrac{1}{x^n}\end{array}}$$

□

d) On rappelle que la commande `grand(1,n,'geom',p)` permet à **Scilab** de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 :')
S = ------
disp(S)
```

Démonstration.

- On rappelle que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi $\mathcal{G}(x)$. L'instruction `grand(1,n,'geom',p)` permet de générer une matrice ligne $[x_1, \ldots, x_n]$ qui simule le n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.
- Pour simuler S_n, il suffit de faire la somme des coefficients de cette matrice ligne.

```
S = sum(grand(1,n,'geom',p))
```

Commentaire

Il est possible (mais moins élégant) de réaliser cette somme à l'aide d'une structure itérative. On obtient le programme suivant.

```
S = 0
tab = grand(1,n,'geom',p)
for i = 1:n
    S = S + tab(i)
end
```

$\square$

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ u_k = -\frac{q^k}{k \ \ln(p)}$$

1. a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $p \in \,]0,1[$, $\ln(p) < 0$.
- Comme $q = 1 - p \in \,]0,1[$, $q^k > 0$. On en déduit :

$$\frac{q^k}{k \ \ln(p)} < 0$$

(notons que $k \times \ln(p) \neq 0$ car $k \geqslant 1$ et $\ln(p) \neq 0$)

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \ u_k = -\frac{q^k}{k \ \ln(p)} > 0}$$

$\square$

b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord : $\sum\limits_{k=1}^{N} u_k \;=\; \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{-q^k}{k\ \ln(p)} \;=\; -\dfrac{1}{\ln(p)} \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{q^k}{k}$.
- Or, d'après la question ***1.d)*** de la partie 1, pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{x^k}{k}$ est convergente, de somme $-\ln(1-x)$. En appliquant ce résultat à $x = p \in\,]0,1[$, on obtient que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ est convergente, de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\frac{1}{\ln(p)}\ (-\ln(1-q)) = -\frac{1}{\ln(p)}\ (-\ln(p)) = 1$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1}$$

□

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = k]) = u_k$$

2. a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\ u_k$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{N} k\ u_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{-q^k}{\ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} q^k$$

- Or, comme $q \in\,]0,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} q^k$ est convergente.
  On en déduit que la v.a.r. X admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ u_k = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = -\frac{1}{\ln(p)}\ \frac{q^1}{1-q}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet pour espérance } \mathbb{E}(X) = -\frac{q}{p\ \ln(p)}.}$$

Commentaire

Il est indispensable de connaître les formules donnant la valeur d'une somme géométrique.

- Dans le cas d'une somme finie. Pour tout $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$$

- Dans le cas d'une somme infinie. Pour tout $q \in\,]-1,1[$, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q}$$

□

b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{-q\ (q+\ln(p))}{(p\ \ln(p))^2}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^2\ u_k$ est absolument convergente.
Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{N} k^2\ u_k = \sum_{k=1}^{N} k^{\cancel{2}}\ \frac{-q^k}{\cancel{k}\ \ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} k\ q^k = -\frac{q}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} k\ q^{k-1}$$

- Or, comme $q \in\ ]0,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\ q^{k-1}$ est convergente.
On en déduit que la v.a.r. X admet un moment d'ordre 2, donné par :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ u_k = -\frac{q}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} k\ q^{k-1} = -\frac{q}{\ln(p)}\ \frac{1}{(1-q)^2} = -\frac{q}{p^2\ \ln(p)}$$

- Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ & = & -\dfrac{q}{p^2\ \ln(p)} - \left(-\dfrac{q}{p\ \ln(p)}\right)^2 \\ & = & -\dfrac{q}{p^2\ \ln(p)} - \dfrac{q^2}{p^2\ (\ln(p))^2} \\ & = & \dfrac{-q\ \ln(p) - q^2}{p^2\ (\ln(p))^2} \ = \ \dfrac{-q\ (q+\ln(p))}{(p\ \ln(p))^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet pour variance } \mathbb{V}(X) = \dfrac{-q\ (q+\ln(p))}{(p\ \ln(p))^2}.}$$

Commentaire

Il faut aussi connaître la formule pour les sommes de séries géométriques dérivées première et deuxième. Pour tout $q \in\ ]-1,1[$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\ q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

□

3. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $[X = k]$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question ***1***) de la partie 1, pour montrer que :

$$\mathbb{P}([Y=0]) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, on sait que si l'événement $[X = k]$ est réalisé alors Y peut prendre toutes les valeurs de $[\![0, k]\!]$.
- Or $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Autrement dit, X peut prendre toutes les valeurs $k \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

- La famille $\big([X = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
  Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{-q^k}{k\ \ln(p)} \times \dbinom{k}{0}\ p^0\ (1-p)^k & \textit{(par définition de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
& = & \dfrac{-1}{\ln(p)} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{q^k}{k} \times q^k & \\
& = & \dfrac{-1}{\ln(p)} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(q^2)^k}{k} & \\
& = & \dfrac{\cancel{-}1}{\ln(p)}\ (\cancel{-}\ln(1-q^2)) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.c)}} \\
& & & \textit{partie 1 avec } x = q^2 \in \,]0,1[\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{\ln(p)}\ (\ln((1-q)(1+q))) & \\
& = & \dfrac{1}{\ln(p)}\ (\ln(p)+\ln(1+q)) \ = \ \dfrac{\ln(p)}{\ln(p)} + \dfrac{\ln(1+q)}{\ln(p)} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{P}([Y=0]) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}}$$

□

b) Après avoir montré que, pour tout couple (k, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{p^n\ q^n}{n\ \ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}\ \left(q^2\right)^{k-n}$$

En déduire, grâce à la question ***3)*** de la première partie, l'égalité :

$$\mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{q^n}{n\ (1+q)^n\ \ln(p)}$$

Démonstration.
Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On doit démontrer :

$$n \binom{k}{n} = k \binom{k-1}{n-1}$$

- Remarquons tout d'abord que si $n > k$, alors $n - 1 > k - 1$ et ainsi $\dbinom{k}{n} = \dbinom{k-1}{n-1} = 0$.

- On suppose maintenant que $n \leqslant k$. Tout d'abord :

$$n \binom{k}{n} = n \, \frac{k!}{n! \, (k-n)!} = \frac{k!}{(n-1)! \, (k-n)!}$$

Par ailleurs :

$$k \binom{k-1}{n-1} = k \, \frac{(k-1)!}{(n-1)! \, ((k-\cancel{1})-(n-\cancel{1}))!} = \frac{k!}{(n-1)! \, (k-n)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \, n \binom{k}{n} = k \binom{k-1}{n-1}.}$$

- La famille $\big([X=k] \big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
  Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=n]) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=n]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \\
& = & \cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n])} & \textit{($\mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) = 0$ si $k<n$)} \\
& + & \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{-q^k}{k \, \ln(p)} \times \binom{k}{n} \, p^n \, (1-p)^{k-n} & \textit{(par définition de X et Y)} \\
& = & -\dfrac{p^n}{\ln(p)} \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\binom{k}{n}}{k} \, q^k \, q^{k-n} & \\
& = & -\dfrac{p^n \, q^n}{\ln(p)} \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\binom{k}{n}}{k} \, q^{k-n} \, q^{k-n} & \\
& = & -\dfrac{p^n \, q^n}{\ln(p)} \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n} \, (q^2)^{k-n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{p^n \, q^n}{n \, \ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \, (q^2)^{k-n}.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=n]) & = & -\dfrac{p^n \, q^n}{n \, \ln(p)} \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \, (1-(1-q^2))^{k-n} & \textit{(car $q^2 = 1-(1-q^2)$)} \\
& = & -\dfrac{p^n \, q^n}{n \, \ln(p)} \, \dfrac{1}{(1-q^2)^n} & \textit{(d'après la question \textbf{3.c}) avec $x = 1-q^2 \in \,]0,1[$)} \\
& = & -\dfrac{\cancel{p^n} \, q^n}{n \, \ln(p)} \, \dfrac{1}{\cancel{(1-q)^n} \, (1+q)^n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \, \mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{q^n}{n \, \ln(p) \, (1+q)^n}}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à k éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient k individus)
On souhaite alors construire une partie P à n éléments de cet ensemble contenant un élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de n individus dans lequel figure un représentant de ces individus).*
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à n éléments de E : $\binom{k}{n}$ possibilités.
On distingue ensuite un élément de cet ensemble P : $\binom{n}{1} = n$ possibilités.
(on choisit d'abord les n individus et on élit ensuite un représentant de ces individus)
Ainsi, il y a $n \binom{k}{n}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
On choisit ensuite $n-1$ éléments dans E qui, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{k-1}{n-1}$ possibilités.
(on choisit d'abord le représentant puis on lui adjoint un groupe de $n-1$ individus)
Ainsi, il y a $k \binom{k-1}{n-1}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat. □

c) Vérifier que l'on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = k]) = 1$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) = \mathbb{P}([Y=0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k])$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-q^k}{k\ (1+q)^k\ \ln(p)} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^k}{k} \\
&= \frac{\cancel{-}1}{\ln(p)} \left(\cancel{-}\ln\left(1 - \frac{q}{1+q}\right)\right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.d)}} \textit{ de la partie 1 (*))} \\
&= \frac{1}{\ln(p)}\ \ln\left(\frac{1}{1+q}\right) \\
&= -\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}
\end{aligned}$$

(*) On peut utiliser ce résultat car $0 < q < 1 + q$ et donc $0 < \dfrac{q}{1+q} < 1$.

- On en déduit, à l'aide de la question ***3.a)*** :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) = \left(1 + \cancel{\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}}\right) - \cancel{\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}} = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k]) = 1.}$$

□

d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln(p)$ et q.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum k\ \mathbb{P}([Y=k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) &= 0 \times \mathbb{P}([Y=0]) + \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \cancel{k}\ \frac{-q^k}{\cancel{k}\ \ln(p)\ (1+q)^k} \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{q}{1+q}\right)^k\end{aligned}$$

- Or, comme $\frac{q}{1+q} \in\ ]0,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \left(\frac{q}{1+q}\right)^k$ est convergente.

  On en déduit que la v.a.r. X admet une espérance, donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([Y=k]) \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{1+q}\right)^k \\ &= -\frac{1}{\ln(p)}\ \frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^1}{1-\frac{q}{1+q}} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)}\ \frac{q}{1+q}\ \frac{1}{1-\frac{q}{1+q}} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)}\ \frac{q}{(1+\cancel{q})-\cancel{q}} \ = \ -\frac{q}{\ln(p)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ admet pour espérance } \mathbb{E}(Y) = -\frac{q}{\ln(p)}.}$$

□

e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Y) = -\dfrac{q\ (q+(1+q)\ \ln(p))}{(\ln(p))^2}$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une variance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k^2\ \mathbb{P}([Y=k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} k^2\ \mathbb{P}([Y=k]) &= 0^2 \times \mathbb{P}([Y=0]) + \sum_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([Y=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{N} k^{\cancel{2}}\ \frac{-q^k}{\cancel{k}\ \ln(p)\ (1+q)^k} \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} k\ \left(\frac{q}{1+q}\right)^k \\ &= \frac{-q}{(1+q)\ \ln(p)} \sum_{k=1}^{N} k\ \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

- Or, comme $\frac{q}{1+q} \in \,]0,1[$, la série $\sum k \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$ est convergente.
On en déduit que la v.a.r. Y admet un moment d'ordre 2, donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \, \mathbb{P}([Y=k]) \\
&= -\frac{q}{(1+q)\ \ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \\
&= -\frac{q}{(1+q)\ \ln(p)} \frac{1}{\left(1-\frac{q}{1+q}\right)^2} \\
&= -\frac{q}{\cancel{(1+q)}\ \ln(p)} \frac{(1+q)^{\cancel{2}}}{((1+q)-q)^2} \ = \ -\frac{q\ (1+q)}{\ln(p)}
\end{aligned}$$

- Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\
&= -\frac{q\ (1+q)}{\ln(p)} - \left(-\frac{q}{\ln(p)}\right)^2 \\
&= -\frac{q\ (1+q)}{\ln(p)} - \frac{q^2}{(\ln(p))^2} \\
&= -\frac{q\ (1+q)\ \ln(p) + q^2}{(\ln(p))^2} \\
&= -\frac{q\ \left((1+q)\ \ln(p) + q\right)}{(\ln(p))^2}
\end{aligned}$$

La v.a.r. Y admet pour variance $\mathbb{V}(Y) = -\dfrac{q\ \left((1+q)\ \ln(p)+q\right)}{(\ln(p))^2}$.

Commentaire

- Il ne faut pas se laisser abuser par le signe devant les expressions de $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$:

$$\mathbb{V}(X) = -\frac{q\ (q+\ln(p))}{p\ (\ln(p))^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y) = -\frac{q\ \left((1+q)\ \ln(p)+q\right)}{(\ln(p))^2}$$

Ces deux quantités sont bien positives.

- Démontrons que cette première expression est positive.
Rappelons l'inégalité de convexité classique :

$$\forall x \in \,]-1,+\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x$$

En l'appliquant en $x = -q \in \,]-1,0[$, on obtient : $\ln(1-q) \leqslant -q$.
Ainsi : $q + \ln(p) \leqslant 0$ et $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.

- D'autre part, en multipliant l'inégalité obtenue par $1+q$:

$$(1+q)\ \ln(p) \leqslant -q\ (1+q) = -q - q^2 \leqslant -q$$

Ainsi, $(1+q)\ \ln(p) + q \leqslant 0$ et $\mathbb{V}(Y) \geqslant 0$.

□