EDHEC 2016

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

4. ***a)*** On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I$$

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt$.

1. Étude de f_n.

a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Étude de la suite (u_n).

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

3. ***a)*** Utiliser la question ***2.b)*** pour compléter les commandes **Scilab** suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n = 0
while ------
    n = ------
end
disp(n)
```

b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$.
Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$.

4. On pose $v_n = u_n - n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

d) Déduire de l'encadrement obtenu en ***2.b)*** que : $u_n - n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 3

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0,1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.
- On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}([Z=1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z=-1]) = 1-p$$
- Enfin,on note X la variable aléatoire, définie par :
$$\forall \omega \in \Omega, \ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$
- On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

2. ***a)*** Établir, grâce au système complet d'évènements $([Z=1], [Z=-1])$, que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_X(x) = p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x)$$

b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :
$$x < -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

d) Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

a) Vérifier que l'on a :

$$X = U\ \frac{1+Z}{2} + V\ \frac{1-Z}{2}$$

b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

4. *a)* Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Déterminer la loi de $2T - 1$.

b) On rappelle que `grand(1,1,'unf',a,b)` et `grand(1,1,'bin',p)` sont des commandes **Scilab** permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Écrire des commandes **Scilab** permettant de simuler U, V, Z, puis X.

Problème

Partie I : Questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

1. *a)* Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$.

c) Établir par encadrement que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt = 0$.

d) En déduire que : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geqslant m,\ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) \ = \ \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k - j])$$

b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \in [\![n, +\infty]\!],\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1}\ x^n\ (1-x)^{k-n}$$

c) En déduire, pour tout x de $]0, 1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}\ (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

d) On rappelle que la commande `grand(1,n,'geom',p)` permet à **Scilab** de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 :')
S = ------
disp(S)
```

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ \ln(p)}$$

1. *a)* Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = k]) = u_k$$

2. *a)* Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{-q\ (q + \ln(p))}{(p\ \ln(p))^2}$.

3. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $[X = k]$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question ***1***) de la partie 1, pour montrer que :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

b) Après avoir montré que, pour tout couple (k, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = -\frac{p^n\ q^n}{n\ \ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}\ \left(q^2\right)^{k-n}$$

En déduire, grâce à la question ***3)*** de la première partie, l'égalité :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = -\frac{q^n}{n\ (1+q)^n\ \ln(p)}$$

c) Vérifier que l'on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y = k]\right) = 1$.

d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln(p)$ et q.

e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Y) = -\dfrac{q\ (q + (1+q)\ \ln(p))}{(\ln(p))^2}$.