

ECRICOME 2016

EXERCICE 1

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y) , on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent \mathbb{R} :

$$E = \{M(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En déterminer une base et donner sa dimension.

Démonstration.

• Par définition de E , on a :

$$\begin{aligned} E &= \{M(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \{x \cdot M(1, 0) + y \cdot M(0, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x \cdot A + y \cdot B \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(A, B) \end{aligned}$$

De plus, $(A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- La famille (A, B) :
 - × engendre E (d'après le point précédent),
 - × est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, car elle est constituée de 2 matrices non proportionnelles.

D'où (A, B) est une base de E .

- Déterminons la dimension de E .

$$\dim(E) = \text{Card}((A, B)) = 2$$

Commentaire

Deux méthodes sont à disposition pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E .

- Utiliser la définition d'un sous-espace vectoriel de E :

1. Montrer que $F \subset E$.
2. Montrer que $0_E \in F$.
3. Montrer que :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall(u_1, u_2) \in F^2, \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in F$$

- Montrer que F s'écrit comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille d'éléments de E (c'est la méthode employée dans cette question).

On privilégiera la seconde méthode dès que possible. En particulier, si l'énoncé demande une base de F , il est certain qu'il faut exprimer F comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille de E . Par défaut (et par défaut seulement), on utilisera la définition d'un sous-espace vectoriel. □

2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- Déterminons $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 1 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1(A) \iff (A - 1 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = -z \\ 2y = z \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} 2x & = & -z \\ & 2y & = & z \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & -\frac{1}{2}z \\ y & = & \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_1(A)$ suivante :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{1}{2}z \text{ et } y = \frac{1}{2}z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Comme $E_1(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 1 est bien valeur propre de A , d'espace propre associé $E_1(A)$.

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

- Déterminons $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 2 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff (A - 2 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y = -2z \\ 4y = 3z \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2x & = & -z \\ 4y & = & 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{4}z \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_2(A)$ suivante :

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{1}{2}z \text{ et } y = \frac{3}{4}z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Comme $E_2(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 2 est bien valeur propre de A , d'espace propre associé $E_2(A)$.

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

- Déterminons $E_3(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 3 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 X \in E_3(A) &\iff (A - 3 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3}}{\iff} \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x + y = 2z \\ y = z \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x = z \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_3(A)$ suivante :

$$\begin{aligned}
 E_3(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Comme $E_3(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 3 est bien valeur propre de A , d'espace propre associé $E_3(A)$.

$$E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Commentaire

Il est important de lire l'énoncé de ce type de questions en entier pour choisir une méthode de résolution. En effet :

- × si l'énoncé demande simplement de montrer qu'un réel λ est valeur propre d'une matrice A , alors on vérifiera $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$ pour ce réel λ particulier.
(ou $\det(A - \lambda I_2) = 0_{\mathbb{R}}$ si A est une matrice d'ordre 2)
- × si l'énoncé demande de montrer qu'un réel λ est valeur propre d'une matrice A et de déterminer le sous-espace propre associé, alors on détermine directement $E_\lambda(A)$ et comme $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ alors $E_\lambda(A)$ est bien le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

- On sait que :
 - × $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
 - × A possède 3 valeurs propres **distinctes**.

Donc A est diagonalisable.

Commentaire

- On aurait aussi pu justifier la diagonalisabilité de A d'une autre façon. Détaillons cette manière de procéder. On sait que :
 - × $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
 - × $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) + \dim(E_3(A)) = 3$
 Donc A est diagonalisable.
- Pour pouvoir rédiger ainsi, il faut déterminer au préalable les dimensions et donc une base de chacun des 3 sous-espaces propres de A . Par exemple, pour $E_1(A)$, on rédigerait de la manière suivante. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:
 - × engendre $E_1(A)$,
 - × est libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.
 C'est donc une base de E .
 D'où $\dim(E_1(A)) = \text{Card} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 1$.

□

3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $(1 \ -2 \ 1)$, et telle que :

$$A = PD_A P^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

D'après la question 2., la matrice A est diagonalisable.

Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D_A diagonale telles que $A = PD_A P^{-1}$.

Plus précisément, la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A et la matrice D_A est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$, $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ sont des bases respectives de $E_1(A)$, $E_2(A)$ et $E_3(A)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On obtient bien : $A = PD_A P^{-1}$.

□

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

Démonstration.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. On retrouve ainsi que P est inversible.

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Finalement $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□

5. En notant X_1 , X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P , calculer BX_1 , BX_2 et BX_3 . En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_B P^{-1}$$

Démonstration.

• On a : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. D'où : $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot X_1$.

• On a : $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. D'où : $BX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -1 \cdot X_2$.

• On a : $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. D'où : $BX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot X_3$.

Finalement, $BX_1 = 0 \cdot X_1$, $BX_2 = -1 \cdot X_2$ et $BX_3 = -1 \cdot X_3$.

- D'après les calculs précédents : $X_1 \in E_0(B)$ et $(X_2, X_3) \in (E_{-1}(B))^2$. Or :
 - × (X_1) est une famille libre de $E_0(B)$, car elle est constituée d'un unique vecteur non nul,
 - × (X_2, X_3) est une famille libre de $E_{-1}(B)$, car elle est constituée de 2 vecteurs non colinéaires.
 La famille (X_1, X_2, X_3) est la concaténation de 2 familles libres de vecteurs propres associées à des valeurs propres **distinctes**.

Ainsi, la famille (X_1, X_2, X_3) est libre.

On obtient alors :

- × la famille (X_1, X_2, X_3) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
- × $\text{Card}((X_1, X_2, X_3)) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

Donc (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B . La matrice B est donc diagonalisable dans cette base. On en déduit que $B = PD_B P^{-1}$ où P est la matrice obtenue par concaténation des vecteurs X_1 , X_2 et X_3 de la base et D_B est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice B (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

Plus précisément : $B = PD_B P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

□

6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$$

Démonstration.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 M(x, y) &= x \cdot A + y \cdot B \\
 &= x \cdot PD_A P^{-1} + y \cdot PD_B P^{-1} && \text{(d'après les questions 3. et 5.)} \\
 &= P(x \cdot D_A + y \cdot D_B)P^{-1} \\
 &= P \left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= PD(x, y)P^{-1}
 \end{aligned}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$, où $D(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$

□

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

Démonstration.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Commençons par démontrer que :

$$M(x, y) \text{ est inversible} \Leftrightarrow D(x, y) \text{ est inversible}$$

(\Rightarrow) Supposons que la matrice $M(x, y)$ est inversible.

On a l'égalité suivante : $D(x, y) = P^{-1}M(x, y)P$.

Ainsi $D(x, y)$ est inversible comme produit de trois matrices inversibles.

(\Leftarrow) De même, si $D(x, y)$ est inversible, alors $M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$.

$$M(x, y) \text{ est inversible si et seulement si } D(x, y) \text{ est inversible.}$$

- On en déduit alors :

$$M(x, y) \text{ est inversible} \Leftrightarrow D(x, y) \text{ est inversible}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x - y \neq 0 \\ 3x - y \neq 0 \end{cases} \quad (\text{car } D(x, y) \text{ est une} \\ \text{matrice diagonale})$$

$$\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, M(x, y) \text{ est inversible si et seulement si } \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x - y \neq 0 \\ 3x - y \neq 0 \end{cases} .$$

□

8. Montrer que B^2 est un élément de E . La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = -B$$

$$\text{Or } B \in E. \text{ Donc } B^2 = -B \in E.$$

- Par ailleurs :

$$A^2 = (PD_A P^{-1})^2 = PD_A P^{-1} \times PD_A P^{-1} = P(D_A)^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Pour savoir si $A^2 \in E$, on cherche à savoir s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D(x, y)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ 2x - y & = & 4 \\ 3x - y & = & 9 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ -y & = & 2 \\ -y & = & 6 \end{cases}$$

$$\text{Ceci est impossible, donc } A^2 \notin E.$$

□

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

9. Que vaut X_0 ?

Démonstration.

$$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

10. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Notons $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$CX_n = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n - c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

On a bien trouvé C tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = CX_n$.

• On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $C = M(x, y)$.

$$C = M(x, y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x & = & 3 \\ -2x + 2y & = & 4 \\ 2x - y & = & -1 \\ -x - y & = & -4 \\ 4x - 3y & = & -5 \\ -2x + y & = & 1 \\ -2y & = & -6 \\ 4x - 4y & = & -8 \\ -x + y & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 3 \end{cases}$$

Finalement : $C = M(1, 3)$

□

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

Démonstration.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : X_n = C^n X_0$.

► **Initialisation :**

$$C^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0.$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. : $X_{n+1} = C^{n+1} X_0$).

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= C X_n && \text{(d'après la question 10)} \\ &= C \times (C^n X_0) && \text{(par hypothèse de} \\ & && \text{récurrence)} \\ &= C^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

□

12. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• $C = M(1, 3)$. Donc, d'après la question 6. :

$$C = P D(1, 3) P^{-1}$$

Donc, par récurrence immédiate :

$$C^n = P (D(1, 3))^n P^{-1}$$

• Or, comme $n \geq 1$: $(D(1, 3))^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned} C^n &= P (D(1, 3))^n P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ (-1)^n & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2(-1)^n & 2 - 2(-1)^n & -1 \\ -1 + 3(-1)^n & -2 + 3(-1)^n & 1 \\ -2 + 4(-1)^n & -4 + 4(-1)^n & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• Enfin :

$$X_n = C^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 - 2(-1)^n & 2 - 2(-1)^n & -1 \\ -1 + 3(-1)^n & -2 + 3(-1)^n & 1 \\ -2 + 4(-1)^n & -4 + 4(-1)^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2(-1)^n \\ -1 + 3(-1)^n \\ -2 + 4(-1)^n \end{pmatrix}$$

Par définition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} a_n = 1 - 2(-1)^n \\ b_n = -1 + 3(-1)^n \\ c_n = -2 + 4(-1)^n \end{cases}$ et pour $n = 0$: $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ □

EXERCICE 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

a) Étudier les variations de la fonction g_0 , définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0 .

Démonstration.

- La fonction g_0 est dérivable sur $[0, +\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1+x)^2$ dérivable sur $[0, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle ($\forall x \in [0, +\infty[, (1+x)^2 \neq 0$).
- Soit $x \in [0, +\infty[$.

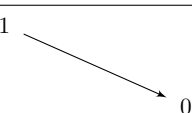
$$g'_0(x) = -2 \frac{1}{(1+x)^3} < 0$$

Donc la fonction g_0 est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Commentaire

Notons que, pour dériver g_0 , on utilise bien ici la formule de dérivation de l'inverse d'une fonction (et non la formule de dérivation d'un quotient).

- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^2 = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+x)^2} = 0$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_0(x) = 0$.
- On obtient finalement le tableau de variations suivant :

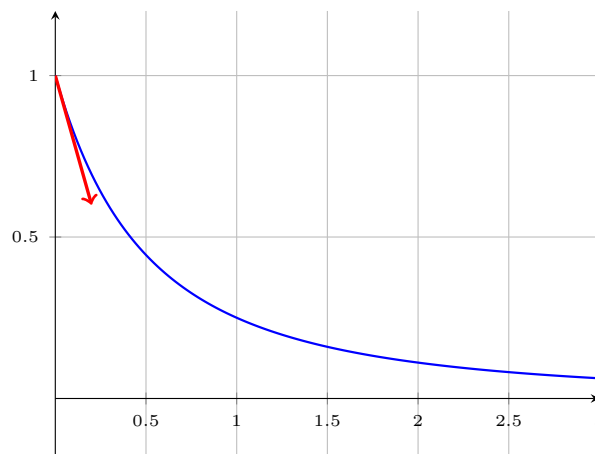
x	0	$+\infty$
Signe de $g'_0(x)$	-	
Variations de g_0	1 	

- L'équation de la tangente à g_0 en 0 est :

$$y = g_0(0) + g'_0(0)(x - 0)$$

L'équation de la tangente à g_0 en 0 est : $y = -2x + 1$.

- On obtient la courbe représentative de g_0 .



□

b) Pour $n \geq 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, g'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 2 \ln(1+x)$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geq 1$.

Calculer soigneusement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

Démonstration.

Soit $n \geq 1$.

- La fonction g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ car elle est le quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in [0, +\infty[, (1+x)^2 \neq 0$).
- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= \frac{n \frac{(\ln(1+x))^{n-1}}{1+x} (1+x)^2 - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4} \\ &= \frac{n(1+x)(\ln(1+x))^{n-1} - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^7} \\ &= \frac{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1} (n - 2 \ln(1+x))}{(1+x)^7} \end{aligned}$$

Comme $x \geq 0$, on a :

$$1+x \geq 1 \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \geq 0$$

On obtient alors : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$g'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow n - 2 \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 2 \ln(1+x).$$

- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} g'_n(x) \geq 0 &\Leftrightarrow n \geq 2 \ln(1+x) \Leftrightarrow \frac{n}{2} \geq \ln(1+x) \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{n}{2}} \geq 1+x && \text{(car } x \mapsto e^x \text{ est strictement} \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{n}{2}} - 1 \geq x && \text{croissante sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Or : $\frac{n}{2} \geq 0$. Donc, par croissance de $x \mapsto e^x$: $e^{\frac{n}{2}} \geq e^0 = 1$ et $e^{\frac{n}{2}} - 1 \geq 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{\frac{n}{2}} - 1$	$+\infty$
Signe de $g'_n(x)$	+	0	-
Variations de g_n	0	$\left(\frac{n}{2e}\right)^n$	0

- Détaillons les éléments de ce tableau.

- Tout d'abord :

$$g_n\left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right) = \frac{\left(\ln\left(\cancel{x} + e^{\frac{n}{2}} - \cancel{x}\right)\right)^n}{\left(\cancel{x} + e^{\frac{n}{2}} - \cancel{x}\right)^2} = \frac{\left(\ln\left(e^{\frac{n}{2}}\right)\right)^n}{\left(e^{\frac{n}{2}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2} \cdot 2}} = \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{1}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

- Et :

$$g_n(0) = \frac{(\ln(1+0))^n}{(1+0)^2} = \frac{(\ln(1))^n}{1^2} = 0$$

- Enfin : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = +\infty$.

Et : $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$, par croissances comparées.

Finalement, par composition de fonctions, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$.

Commentaire

Le calcul de $g_n\left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right)$ n'était pas indispensable dans cette question.

□

c) Montrer que, pour $n \geq 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

Démonstration.

Soit $n \geq 1$.

• La fonction g_n est :

- × croissante sur l'intervalle $\left[0, e^{\frac{n}{2}} - 1\right]$,
- × décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n}{2}} - 1, +\infty\right]$.

Sur $[0, +\infty[$, La fonction g_n admet un maximum M_n en $e^{\frac{n}{2}} - 1$ et, d'après la question 1.b), $M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$

Commentaire

Bien sûr, si le calcul de $g_n\left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right)$ n'a pas été effectué à la question précédente, il est obligatoire ici.

• On remarque :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{2e}\right)\right)$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(\frac{n}{2e}\right) = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{2e}\right)\right) = +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty$$

□

d) Montrer enfin que pour tout $n \geq 1$:

$$g_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Démonstration.

Soit $n \geq 1$.

• Tout d'abord, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = x^{\frac{3}{2}} g_n(x) = x^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

• En posant $y = 1+x$, on a :

$$x^{\frac{3}{2}} g_n(x) = x^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = (y-1)^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2}$$

Or :

$$(y-1)^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} y^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2} = \frac{(\ln(y))^n}{y^{\frac{1}{2}}}$$

De plus, par croissances comparées : $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(y))^n}{y^{\frac{1}{2}}} = 0$. Donc : $\lim_{y \rightarrow +\infty} (y-1)^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$.

• Finalement :

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = +\infty,$$

$$\times \lim_{y \rightarrow +\infty} (y-1)^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0.$$

On en déduit, par composition de fonctions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} g_n(x) = 0$.

$$\forall n \geq 1, g_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)$$

□

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$$

a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

Démonstration.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} g_0(t) dt$$

• La fonction g_0 est continue sur $[0, +\infty[$.

• Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A g_0(t) dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1$$

$$\text{Or } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+A} = 0.$$

Donc l'intégrale I_0 converge et vaut 1.

Commentaire

L'énoncé demande ici de démontrer la convergence de I_0 ET de calculer sa valeur. Dans ce cas, on se lancera directement dans le calcul de l'intégrale.

□

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.

Démonstration.

Soit $n \geq 1$.

• La fonction g_n est continue sur $[0, +\infty[$.

• $\times g_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)$

$\times \forall x \in [1, +\infty[, g_n(x) \geq 0$ et $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \geq 0$

\times L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant $\frac{3}{2}$, donc elle converge.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_n(x) dx$ converge.

• De plus, g_n est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc l'intégrale $\int_0^1 g_n(x) dx$ est bien définie.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x) dx$ converge.

Commentaire

Il est encore une fois important de bien lire la question : l'énoncé demande cette fois simplement de montrer la convergence de I_n (sans la calculer).

Dans ce cas, on pensera en priorité à l'utilisation d'une critère de comparaison / équivalence / négligeabilité. □

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n$$

Démonstration.

Soit $A \geq 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x) = (\ln(1+x))^{n+1} & u'(x) = (n+1) \frac{(\ln(1+x))^n}{1+x} \\ v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} & v(x) = -\frac{1}{1+x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A g_{n+1}(x) dx &= \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} dx \\ &= \left[-\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{1+x} \right]_0^A + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} dx \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} dx \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A g_n(x) dx \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$.

De plus l'intégrale I_n converge d'après la question 2.b). D'où :

$$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(x) dx = 0 + (n+1) \int_0^{+\infty} g_n(x) dx$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = (n+1)I_n$.

□

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : I_n = n!$.

► **Initialisation** :

D'après la question 2.a), $I_0 = 1 = 0!$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $I_{n+1} = (n+1)!$).

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (n+1)I_n && \text{(d'après la question 2.c)} \\ &= (n+1) \times n! && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$

□

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{n!} g_n(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

× Si $x < 0$: $f_n(x) = 0$. Donc : $f_n(x) \geq 0$.

× Si $x \geq 0$. D'après le tableau de variations dressé en question 1.b), on a : $f_n(x) = \frac{1}{n!} g_n(x) \geq 0$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \geq 0$.

• × La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est constante sur cet intervalle.

× La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ car la fonction g_n l'est.

Ainsi f_n est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

Commentaire

La continuité sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points suffit ici. Mais rien n'interdit d'utiliser l'étude de g_n pour conclure quant à la continuité de f_n en 0.

- Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et vaut 1.

Tout d'abord : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$, car f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

De plus, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ converge :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!} g_n(t) dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} I_n = \frac{1}{n!} n! && \text{(d'après la question 2.d)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et vaut 1.

Finalement, on a montré :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \geq 0$,
- f_n est continue sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en 0,
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et vaut 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité. □

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n .

- b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_n(t) dt$.
- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} t f_n(t) dt$$

- \times Démontrons : $\frac{1}{t} = o_{t \rightarrow +\infty}(t f_n(t))$.

$$\frac{\frac{1}{t}}{t f_n(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{t g_n(t)} = \frac{(1+t)^2}{t^2 (\ln(1+t))^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2 (\ln(1+t))^n} = \frac{1}{(\ln(1+t))^n}$$

Or : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln(1+t))^n} = 0$. Donc : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t}}{t f_n(t)} = 0$.

Ainsi : $\frac{1}{t} = o_{t \rightarrow +\infty}(t f_n(t))$.

× Pour tout $t \in [1, +\infty[: t f_n(t) \geq 0$ et $\frac{1}{t} \geq 0$.

× L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 1, donc elle diverge.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t f_n(t) dt$ diverge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$ diverge.

X_n n'admet pas d'espérance.

Commentaire

Il y a plusieurs réflexes à acquérir pour ce type de questions :

- 1) l'énoncé demande de déterminer l'existence de $\mathbb{E}(X_n)$ **UNIQUEMENT**, donc on privilégiera l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité.
- 2) l'énoncé ne demande pas « Montrer que X_n admet une espérance », mais « X_n admet-elle une espérance ? ». Il y a donc de fortes chances que la réponse attendue soit « X_n n'admet **PAS** d'espérance ». C'est pourquoi on cherche ici à montrer en priorité $\frac{1}{t} = o_{t \rightarrow +\infty}(t f_n(t))$ plutôt que $t f_n(t) = o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$.

□

c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x < 0$.

$$F_n(x) = \mathbb{P}([X_n \leq x]) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = 0 \quad (\text{car : } \forall t < 0, f_n(t) = 0)$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x < 0, F_n(x) = 0$

□

d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geq 0$.

Démonstration.

Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \mathbb{P}([X_0 \leq x]) = \int_{-\infty}^x f_0(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{0!} g_0(t) dt && (\text{car } x \geq 0) \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^x \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Finalemment : $\forall x \geq 0, F_0(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$

□

e) Soit $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \mathbb{P}([X_k \leq x]) = \int_0^{+\infty} f_k(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{k!} g_k(t) dt \quad (\text{car } x \geq 0) \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^k}{(1+t)^2} dt \end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = (\ln(1+t))^k & u'(t) = k \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{1+t} \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} & v(t) = -\frac{1}{1+t} \end{array} \right.$$

L'IPP est valide car u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, x]$.

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \frac{1}{k!} \left(\left[-\frac{(\ln(1+t))^k}{1+t} \right]_0^x + k \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2} dt \right) \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{k}{k!} \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2} dt \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2} dt \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \int_0^x f_{k-1}(t) dt \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}} \quad \square$$

f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \geq 0$.

• D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

• On somme alors ces égalités pour k variant de 0 à n . On obtient :

$$\sum_{k=1}^n (F_k(x) - F_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} \right) = -\frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

Par télescopage, on a alors :

$$F_n(x) - F_0(x) = -\frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

- Or, d'après la question 3.d) : $F_0(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$. Donc :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= F_0(x) - \frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \quad (\text{car : } \frac{(\ln(1+x))^0}{0!} = 1) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 0, F_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$

□

g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < 0$, alors : $F_n(x) = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$.
- Si $x \geq 0$, alors : $F_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$.

Or $\sum_{n \geq 0} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$ est la série exponentielle de paramètre $\ln(1+x)$.

Elle est donc convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} = \exp(\ln(1+x)) = 1+x$$

Ainsi la suite $(F_n(x))_{n \geq 1}$ converge et on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x} (1+x) = 1 - 1 = 0$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$.

□

h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une v.a.r. X de fonction de répartition G telle que (X_n) converge en loi vers X .

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où G est continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = G(x)$$

Or, d'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = 0$.

Ceci est absurde car G est une fonction de répartition, donc, en particulier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$.

La suite (X_n) ne converge pas en loi.

Commentaire

Il convient d'insister ici sur la définition de la convergence en loi. (X_n) converge en loi vers X si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F_X est continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

En particulier :

- 1) cette convergence n'a pas besoin d'être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle peut ne pas être vérifiée pour les points de discontinuité de F_X .
- 2) on s'intéresse bien ici aux points de continuité de F_X et non de F_{X_n} .

□

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

Démonstration.

- Sans perte de généralité, on considère pour la suite que : $X_n(\Omega) = [0, +\infty[$.
Donc $\ln(1 + X_n)$ est bien définie.

Ainsi, Y_n est bien définie.

- Déterminons $Y_n(\Omega)$, où $Y_n = h(X_n)$ avec $h : x \mapsto \ln(1 + x)$.

Comme précisé précédemment : $X_n(\Omega) = [0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y_n(\Omega) &= h(X_n)(\Omega) = h(X_n(\Omega)) \\ &= h([0, +\infty[) \\ &= [h(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[&& \text{(car } h \text{ est continue et strictement} \\ && \text{croissante sur } [0, +\infty[) \\ &= [0, +\infty[&& \text{(car } h(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty) \end{aligned}$$

Ainsi : $Y_n(\Omega) = [0, +\infty[$

□

b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_n = \ln(1 + X_n)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \ln(1+t) f_n(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ln(1+t) f_n(t) \geq 0$$

- Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 \ln(1+t)f_n(t) &= \ln(1+t) \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} && (\text{par définition de } f_n) \\
 &= \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} \\
 &= (n+1) \frac{1}{(n+1)!} \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} \\
 &= (n+1)f_{n+1}(t) && (\text{par définition de } f_{n+1})
 \end{aligned}$$

- Or la fonction f_{n+1} est une densité nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t) dt$ converge et vaut 1.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(1+t)f_n(t) dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \ln(1+t)f_n(t) dt = (n+1) \times 1 = (n+1)$$

On en déduit que Y_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Y_n) = n+1$.

Commentaire

On rappelle l'énoncé du théorème de transfert pour les v.a.r. à densité :

Soit X une v.a.r. de densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$, et g une fonction **continue** sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Si l'intégrale $\int_a^b g(t) f(t) dt$ est **absolument convergente**, alors la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(t) f(t) dt$$

On applique donc ici le théorème de transfert pour la fonction $g : t \mapsto \ln(1+t)$. □

- c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

Démonstration.

- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_n = \ln(1+X_n)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0, +\infty[, (\ln(1+t))^2 f_n(t) \geq 0$$

- Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 (\ln(1+t))^2 f_n(t) &= (\ln(1+t))^2 \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} && \text{(par définition de } f_n) \\
 &= \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^{n+2}}{(1+t)^2} \\
 &= (n+2)(n+1) \frac{1}{(n+2)!} \frac{(\ln(1+t))^{n+2}}{(1+t)^2} \\
 &= (n+2)(n+1) f_{n+2}(t) && \text{(par définition de } f_{n+2})
 \end{aligned}$$

- Or la fonction f_{n+2} est une densité nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{n+2}(t) dt$ converge et vaut 1.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t) dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t) dt = (n+1)(n+2) \times 1 = (n+1)(n+2)$$

Ainsi Y_n admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}(Y_n^2) = (n+2)(n+1)$.

- D'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2 = (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = (n+1)(n+2 - (n+1)) = n+1$$

On en déduit que Y_n admet une variance et : $V(Y_n) = n+1$.

Commentaire

On a, cette fois, appliqué le théorème de transfert avec la fonction $g : t \mapsto (\ln(1+t))^2$. □

- d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = F_n(e^x - 1)$$

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 H_n(x) &= \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(\ln(1+X_n) \leq x) \\
 &= \mathbb{P}(1+X_n \leq e^x) && \text{(car } x \mapsto e^x \text{ est strictement} \\
 &= \mathbb{P}(X_n \leq e^x - 1) = F_n(e^x - 1) && \text{croissante sur } \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = F_n(e^x - 1)$ □

- e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n .

Démonstration.

- Commençons par expliciter H_n .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Soit $x < 0$. Alors : $e^x - 1 < 0$. Donc, d'après la question 4.d), on obtient :

$$H_n(x) = F_n(e^x - 1) = 0$$

- Soit $x \geq 0$. Alors $e^x - 1 \geq 0$. Donc, toujours d'après la question 4.d), on obtient :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= F_n(e^x - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{e^x - 1} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(e^x - 1))^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{e^x} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(e^x))^k}{k!} \\ &= 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

• Ainsi :

× H_n est continue sur $] -\infty, 0[$ car elle est constante sur cet intervalle.

× H_n est continue sur $]0, +\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

× d'une part : $\lim_{x \rightarrow 0^-} H_n(x) = 0$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} H_n(x) &= H_n(0) = 1 - e^{-0} \sum_{k=0}^n \frac{0^k}{k!} \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned} \quad \left(\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \right)$$

Donc H_n est continue en 0.

Ainsi la fonction H_n est continue sur \mathbb{R} .

• La fonction H_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0, par des arguments similaires aux précédents.

On en déduit que Y_n est une v.a.r. à densité.

• Pour déterminer une densité h_n de Y_n , on dérive H_n sur les intervalles **ouverts**. Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Si $x \in] -\infty, 0[$.

$$h_n(x) = H_n'(x) = 0$$

× Si $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} h_n(x) &= e^x F_n'(e^x - 1) = e^x f_n(e^x - 1) \\ &= e^x \frac{1}{n!} \frac{(\ln(e^x - 1))^n}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{e^x}{(e^x)^2} (\ln(e^x))^n = \frac{x^n}{n!} e^{-x} \end{aligned}$$

× On choisit enfin $h_n(0) = 0$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^n}{n!} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Commentaire

On choisit ici $h_n(0) = 0$, mais n'importe quelle valeur positive conviendrait. □

f) Reconnaitre la loi de Y_0 . À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a :

$$H_0 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre 1.

On en déduit que $Y_0 \leftrightarrow \mathcal{E}(1)$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. Y_0 admet un moment d'ordre k si et seulement si Y_0^k admet une espérance.

- La fonction f_0 est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_0^k = (\ln(1 + X_n))^k$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0, +\infty[, (\ln(1+t))^k f_0(t) \geq 0$$

- Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} (\ln(1+t))^k f_0(t) &= (\ln(1+t))^k \frac{1}{(1+t)^2} && \text{(par définition de } f_0) \\ &= g_k(t) && \text{(par définition de } g_k) \end{aligned}$$

- Or, d'après la question 2.d), l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} g_k(t) dt$ converge et vaut $k!$.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t) dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t) dt = k!$$

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_0 admet un moment d'ordre k et : $\mathbb{E}(Y_0^k) = k!$

□

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans \mathbb{N} . On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i])$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi.
Montrer que X et Y sont échangeables.

Démonstration.

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j]) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont} \\ & && \text{indépendantes)} \\ &= \mathbb{P}([Y = i]) \times \mathbb{P}([Y = j]) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ ont} \\ & && \text{même loi)} \\ &= \mathbb{P}([Y = i]) \times \mathbb{P}([X = j]) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ ont} \\ & && \text{même loi)} \\ &= \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont} \\ & && \text{indépendantes)} \end{aligned}$$

Ainsi, si X et Y sont indépendantes et de même loi, alors elles sont échangeables. □

2. On suppose que X et Y sont échangeables.
Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = i]) = \mathbb{P}([Y = i])$$

Démonstration.

Soit $i \in \mathbb{N}$.

La famille $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

On en déduit, par application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = i]) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont} \\ & && \text{échangeables)} \\ &= \mathbb{P}([Y = i]) \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = j])_{j \in \mathbb{N}}$.

On en déduit : $\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = i]) = \mathbb{P}([Y = i])$.

Commentaire

On vient de montrer l'implication suivante :

X et Y sont échangeables $\Rightarrow X$ et Y ont même loi □

Étude d'un exemple

Soient n , b et c trois entiers strictement positifs.

Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
 - On replace la boule dans l'urne et :
 - ★ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
 - ★ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
 - ★ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
 - On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.
3. a) Compléter la fonction **Scilab** suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```

1  function res = tirage(b, n)
2      r = rand()
3      if ..... then
4          res = 2
5      else
6          res = 1
7      end
8  endfunction

```

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction **tirage** a pour but de simuler la v.a.r. X .
Ainsi, le paramètre de sortie **res** de cette fonction doit :
 - × prendre la valeur 1 avec probabilité $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{n}{n+b}$.
 - × prendre la valeur 2 avec probabilité $\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{b}{n+b}$.
- La fonction débute par la ligne 2 :

```

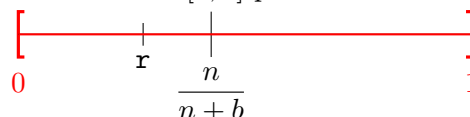
2      r = rand()

```

L'instruction **rand()** renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.

Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

- Cette valeur **r** choisie aléatoirement dans $[0, 1]$ permet d'obtenir la valeur **res**.



Deux cas se présentent.

- Si $r \leq \frac{n}{n+b}$: alors, on affecte à la variable **res** la valeur 1.

Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leq U \leq \frac{n}{n+b}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leq \frac{n}{n+b}\right]\right) = \frac{n}{n+b} = \mathbb{P}([X = 1])$$

- Si $r > \frac{n}{n+b}$: alors, on affecte à la variable `res` la valeur 2.
Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

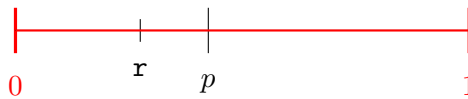
$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{n+b} < U \leq 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{n+b} < U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U \leq \frac{n}{n+b}\right]\right) = \frac{b}{n+b} = \mathbb{P}([X = 2])$$

- On en déduit la ligne 3 à compléter :

```
3   if r > n / (n + b) then
```

Commentaire

- L'idée développée ici est utilisée lorsque l'on souhaite simuler une v.a.r. X telle que $X \leftrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ à l'aide de la fonction `rand`.
On choisit aléatoirement un réel r dans $[0, 1]$:



On obtient une valeur plus petite que p avec probabilité : $\mathbb{P}([U \leq p]) = p$.
On obtient une valeur strictement plus grande que p avec probabilité :

$$q = \mathbb{P}([U > p]) = 1 - \mathbb{P}([U \leq p]) = 1 - p$$

D'où le programme suivant :

```
1   function res = bernoulli(p)
2       r = rand()
3       if r < p then
4           res = 1
5       else
6           res = 0
7       end
8   endfunction
```

- Plus généralement, cette méthode permet d'obtenir une simulation de n'importe quelle v.a.r. X finie. Détaillons ce résultat. Soit X une v.a.r. telle que :

$$\begin{aligned} \times X(\Omega) &= \{x_1, \dots, x_n\}, \\ \times \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = x_i]) &= p_i. \end{aligned}$$

L'idée est alors de découper le segment $[0, 1]$ en n intervalles I_1, \dots, I_n .

La taille du premier intervalle est p_1 , celle du deuxième est p_2 et ainsi de suite.
De sorte que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}([U \in I_i]) = p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$$

Il n'y a plus qu'à écrire le programme correspondant.

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**. □

- b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.

Les paramètres de sortie sont :

- x : une simulation de la variable aléatoire X
- y : une simulation de la variable aléatoire Y

```

1  function [x, y] = experience (b, n, c, variante)
2      x = tirage (b, n)
3      if variante == 1 then
4          if x == 1 then
5              .....
6          else
7              .....
8          end
9      else if variante == 2 then
10         .....
11         .....
12         .....
13         .....
14         .....
15     end
16     y = tirage (b, n)
17 endfunction

```

Démonstration.

- Comme on l'a vu dans la question précédente, l'instruction `tirage(b, n)` permet de simuler la v.a.r. X . C'est ce que réalise l'instruction en ligne 2 du programme :

```

2      x = tirage (b, n)

```

- Il reste alors à simuler la v.a.r. Y .

Le paramètre de sortie y doit :

- × prendre la valeur 1 avec probabilité $\mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{m}{m+d}$.
- × prendre la valeur 2 avec probabilité $\mathbb{P}([Y = 2]) = \frac{d}{m+d}$.

où m (resp. d) représente le nombre de boules noires (resp. blanches) de l'urne après l'ajout éventuel issu du premier tirage.

- Plus précisément m et d sont définies en fonction du résultat du premier tirage et des variantes.

Variante 1 : deux cas se présentent.

- × Si x vaut 1 : c'est qu'on a tiré une boule noire lors du premier tirage. On remet, en plus de cette boule, c boules noires dans l'urne. Ainsi :

$$m = n + c \quad \text{et} \quad d = b \quad (\text{pas de modification})$$

- × Sinon (x vaut 2) : c'est qu'on a tiré une boule blanche lors du premier tirage. On remet, en plus de cette boule, c boules noires dans l'urne. Ainsi :

$$m = n \quad (\text{pas de modification}) \quad \text{et} \quad d = b + c$$

On en déduit les lignes 3 à 8 du programme dans lesquelles on met à jour les variables **n** et **b** en fonction de leur nouvelle valeur.

```

3   if variante == 1 then
4       if x == 1 then
5           n = n + c
6       else
7           b = b + c
8   end

```

Variante 2 : l'étude est similaire mais, comme on remet des boules de couleur opposée à la première boule tirée, les rôles de **n** et **b** sont échangés par rapport à la première variante. On en déduit les lignes 9 à 14 du programme dans lesquelles on met à jour les variables **n** et **b** en fonction de leur nouvelle valeur.

```

9   else if variante == 2 then
10       if x == 1 then
11           b = b + c
12       else
13           n = n + c
14       end

```

Variante 3 : il n'y a pas de modifications des boules blanches ou noires. Il n'y a donc pas lieu de mettre à jour les variables **n** et **b**.

- On obtient alors la valeur **y** en simulant le tirage dans l'urne modifiée (c'est à dire avec les valeurs de **n** et **b** mise à jour). C'est l'objectif de la ligne 16.

```

16   y = tirage (b, n)

```

Commentaire

- L'énoncé comporte une petite coquille. En effet, en ligne 9, on devait lire :

```

9   elseif variante == 2 then

```

en lieu et place de :

```

9   else if variante == 2 then

```

- La différence est subtile.
 - Dans le programme corrigé, la structure conditionnelle englobante contient 2 branchements dont le 2^{ème} (en ligne 9) est soumis à la condition **variante == 2**.
 - Dans le programme d'origine, la structure conditionnelle englobante contient 2 branchements dont le 2^{ème} (en ligne 9) débouche sur une nouvelle structure conditionnelle **if variante == 2**. Il faut alors fermer cette 2^{ème} structure conditionnelle à l'aide d'un **end**. Le nombre de lignes allouées n'est donc plus suffisant.
- Notons que le respect du nombre de lignes alloué n'est pas déterminant. C'est plutôt une indication que donne le concepteur sur le nombre de lignes que le programme doit normalement prendre. Mais on peut raisonnablement penser que tout programme juste (même s'il ne respecte pas le nombre de lignes restant) sera accepté. □

c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X , la loi de Y et la loi du couple (X, Y) .

Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\mathbb{P}([X = 1]), \mathbb{P}([X = 2])]$
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\mathbb{P}([Y = 1]), \mathbb{P}([Y = 2])]$
- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) & \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \\ \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) & \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2]) \end{bmatrix}$$

```

1  function [loiX, loiY, loiXY] = estimation(b, n, c, variante, N)
2      loiX = [0, 0]
3      loiY = [0, 0]
4      loiXY = [0, 0; 0, 0]
5      for k = 1 : N
6          [x, y] = experience(b, n, c, variante)
7          loiX(x) = loiX(x) + 1
8          .....
9          .....
10     end
11     loiX = loiX / N
12     loiY = loiY / N
13     loiXY = loiXY / N
14 endfunction

```

Démonstration.

Commentaire

L'énoncé de cette question comporte une erreur.

Bien évidemment, la loi du couple (X, Y) est caractérisé par la matrice :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) & \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \\ \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) & \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2]) \end{bmatrix}$$

- Dans la question précédente, on a simulé les v.a.r. X et Y .
Il s'agit maintenant d'obtenir une approximation des lois de ces v.a.r.
- Rappelons tout d'abord que X ne prend que deux valeurs : $X(\Omega) = \{1, 2\}$.
Ainsi, la loi de X est entièrement déterminée par les valeurs :

$$\mathbb{P}([X = 1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = 2])$$

L'idée naturelle pour obtenir un approximation de ces valeurs est :

× de simuler un grand nombre de fois (N est ce grand nombre) la v.a.r. X .

Formellement, on souhaite obtenir un N -uplet (x_1, \dots, x_N) qui correspond à l'observation d'un N -échantillon (X_1, \dots, X_N) de la v.a.r. X .

× de compter le nombre de 1 (resp. de 2) de cette observation.

Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\frac{\text{nombre de 1 de l'observation}}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([X = 1])$$

- Dans le programme, les valeurs (x_1, \dots, x_N) sont obtenues par des appels successifs (à l'aide d'une boucle `for`) à la fonction `experience` et stockées les unes après les autres dans la variable `x`.

```

5   for k = 1 : N
6       [x , y] = experience(b, n, c, variante)

```

(seules les valeurs de `x` nous intéressent dans un premier temps)

Le tableau `loiX` est alors mis à jour à chaque tour de boucle :

```

7       loiX(x) = loiX(x) + 1

```

Détaillons cette mise à jour :

- × si `x` vaut 1 alors l'instruction suivante est effectuée :

```

loiX(1) = loiX(1) + 1

```

- × si `x` vaut 2 alors l'instruction suivante est effectuée :

```

loiX(2) = loiX(2) + 1

```

Cela signifie que le 1^{er} élément du tableau compte le nombre de 1 de l'observation et que le 2^{ème} compte le nombre de 2.

Une fois cette boucle effectuée, l'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```

11      loiX = loiX / N

```

- On agit de même pour obtenir l'approximation de la loi de Y . On génère des observations (y_1, \dots, y_N) d'un N -échantillon (Y_1, \dots, Y_N) de la v.a.r. Y .

```

5   for k = 1 : N
6       [x , y] = experience(b, n, c, variante)

```

(ce sont maintenant les valeurs de `y` qui nous intéressent)

Puis on met à jour le tableau `loiY` de sorte à compter le nombre de 1 et de 2 que contient cette observation.

```

8       loiY(y) = loiY(y) + 1

```

L'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

```

12     loiY = loiY / N

```

- On agit encore de même pour obtenir l'approximation de la loi de couple. On génère des couples d'observations $((x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N))$ d'un N -échantillon $((X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N))$ du couple (X, Y) . C'est toujours les lignes 5 et 6 :

```

5   for k = 1 : N
6       [x , y] = experience(b, n, c, variante)

```

(ce sont à présent les couples de valeurs qui nous intéressent)

Puis on met à jour le tableau `loiXY` de sorte à compter le nombre de (1,1), de (1,2), de (2,1), de (2,2) :

```

9       loiXY(x, y) = loiXY(x, y) + 1

```


L'approximation formulée par la LfGN est obtenue en divisant ces nombres par la taille de l'observation :

$$\frac{1}{N} \text{loiXY} = \text{loiXY} / N$$

□

d) On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
loiXY =
  0.49837    0.16785
  0.16697    0.16681
loiY =
  0.66534    0.33466
loiX =
  0.66622    0.33378

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
loiXY =
  0.33258    0.33286
  0.25031    0.08425
loiY =
  0.58289    0.41711
loiX =
  0.66544    0.33456

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
loiXY =
  0.44466    0.22098
  0.22312    0.11124
loiY =
  0.66778    0.33222
loiX =
  0.66564    0.33436

```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.

On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$$\begin{aligned}
 0.33 \times 0.33 &\simeq 0.11 \\
 0.33 \times 0.41 &\simeq 0.14 \\
 0.33 \times 0.58 &\simeq 0.19 \\
 0.33 \times 0.66 &\simeq 0.22 \\
 0.41 \times 0.66 &\simeq 0.27 \\
 0.58 \times 0.66 &\simeq 0.38 \\
 0.66 \times 0.66 &\simeq 0.44
 \end{aligned}$$

Démonstration.

• **Variante 1 :**

× Indépendance. On lit $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$ sur la coordonnée $(1, 1)$ de loiXY .

Donc : $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \simeq 0,49$

On lit $\mathbb{P}([X = 1])$ sur la 1^{ère} coordonnée de loiX . Donc $\mathbb{P}([X = 1]) \simeq 0,66$.

On lit $\mathbb{P}([Y = 1])$ sur la 1^{ère} coordonnée de $\text{loi}X$. Donc $\mathbb{P}([Y = 1]) \simeq 0,66$.

D'après les données de l'énoncé, on obtient donc :

$$\mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 1]) \simeq 0,44 \neq \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$$

On conjecture alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

- × Échangeabilité. On lit $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2])$ sur la coordonnée $(1, 2)$ de $\text{loi}XY$, et $\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1])$ sur la coordonnée $(2, 1)$ de $\text{loi}XY$. Donc :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \simeq 0,16 \simeq \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2])$$

On conjecture alors que X et Y sont échangeables.

Dans le cas de la variante 1, on conjecture que les v.a.r. X et Y sont échangeables et non indépendantes.

• **Variante 2 :**

- × Indépendance. Par lecture : $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \simeq 0,33$

De plus : $\mathbb{P}([X = 1]) \simeq 0,66$ et $\mathbb{P}([Y = 1]) \simeq 0,58$.

D'après les données de l'énoncé, on obtient donc :

$$\mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 1]) \simeq 0,38 \neq \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$$

On conjecture alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

- × Échangeabilité. Par lecture : $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \simeq 0,33$ et $\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) \simeq 0,25$.

Donc : $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \neq \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1])$.

On conjecture alors que X et Y ne sont pas échangeables.

Dans le cas de la variante 2, on conjecture que les v.a.r. X et Y sont non échangeables et non indépendantes.

• **Variante 3 :**

- × Indépendance. Par lecture :

$$\mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 1]) \simeq 0,66 \times 0,66 \simeq 0,44 \simeq \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$$

$$\mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 2]) \simeq 0,66 \times 0,33 \simeq 0,22 \simeq \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2])$$

$$\mathbb{P}([X = 2])\mathbb{P}([Y = 1]) \simeq 0,33 \times 0,66 \simeq 0,22 \simeq \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1])$$

$$\mathbb{P}([X = 2])\mathbb{P}([Y = 2]) \simeq 0,33 \times 0,33 \simeq 0,11 \simeq \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2])$$

On conjecture alors que X et Y sont indépendantes.

- × Échangeabilité. Par lecture :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \simeq 0,22 \simeq \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2])$$

On conjecture alors que X et Y sont échangeables.

Dans le cas de la variante 3, on conjecture que les v.a.r. X et Y sont échangeables et indépendantes.

□

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.

a) Donner la loi de X .

Démonstration.

- Par définition de la v.a.r. $X : X(\Omega) = \{1, 2\}$.
- L'événement $[X = 1]$ est réalisé par tous les tirages d'une boule de l'urne dont le résultat est une boule noire.

Un tel 1-tirage est entièrement déterminé par la boule noire choisie.

Il y a donc n tels 1-tirages possibles (autant que de boules noires).

De plus, le nombre total de 1-tirages possibles est $n + b$ (autant que de boules dans l'urne).

On obtient alors : $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{n}{n + b}$.

- La famille $([X = 1], [X = 2])$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}([X = 2]) = 1 - \mathbb{P}([X = 1]) = 1 - \frac{n}{n + b} = \frac{b}{n + b}$$

Ainsi, $X(\Omega) = \{1, 2\}$. De plus : $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{n}{n + b}$ et $\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{b}{n + b}$.

□

b) Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Démonstration.

- On sait déjà : $X(\Omega) = \{1, 2\}$. Par définition de la v.a.r. Y , on a aussi : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.
- Déterminons tout d'abord $\mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 1])$.

Si l'événement $[X = 1]$ est réalisé, c'est que la 1^{ère} boule tirée est noire. On se place dans le cadre de la variante 1 donc, à l'issue de ce tirage, c boules noires sont ajoutées dans l'urne.

L'événement $[Y = 1]$ est alors réalisé par tous les tirages d'une boule de l'urne dont le résultat est une boule noire.

Un tel 1-tirage est entièrement déterminé par la boule noire choisie.

Il y a donc $n + c$ tels 1-tirages possibles (autant que de boules noires).

De plus, le nombre total de 1-tirages possibles est maintenant de $n + b + c$ (autant que de boules dans l'urne).

On en conclut : $\mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 1]) = \frac{n + c}{n + b + c}$

(on remarque que la probabilité conditionnelle est bien définie car $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{n}{n + b} \neq 0$)

- Déterminons alors $\mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 2])$.

La famille $([Y = 1], [Y = 2])$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 2]) = 1 - \mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 1]) = 1 - \frac{n + c}{n + b + c} = \frac{b}{n + b + c}$$

$\mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 2]) = \frac{b}{n + b + c}$

- Avec les mêmes raisonnements, on obtient :

$\mathbb{P}_{[X=2]}([Y = 1]) = \frac{n}{n + b + c}$ et $\mathbb{P}_{[X=2]}([Y = 2]) = \frac{b + c}{n + b + c}$

(les probabilités conditionnelles sont bien définies car $\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{b}{n + b} \neq 0$)

- On a alors les résultats suivants :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 1]) = \frac{n}{n+b} \times \frac{n+c}{n+b+c} = \frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) = \mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 2]) = \frac{n}{n+b} \times \frac{b}{n+b+c} = \frac{nb}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = 2]) \times \mathbb{P}_{[X=2]}([Y = 1]) = \frac{b}{n+b} \times \frac{n}{n+b+c} = \frac{nb}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2]) = \mathbb{P}([X = 2]) \times \mathbb{P}_{[X=2]}([Y = 2]) = \frac{b}{n+b} \times \frac{b+c}{n+b+c} = \frac{b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)}$$

- En résumé, la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant.

$y \in Y(\Omega)$	1	2
$x \in X(\Omega)$		
1	$\frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}$	$\frac{nb}{(n+b)(n+b+c)}$
2	$\frac{nb}{(n+b)(n+b+c)}$	$\frac{b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)}$

Commentaire

On peut remarquer dès cette question que les v.a.r. X et Y sont échangeables. □

- c) Déterminer la loi de Y .

Démonstration.

- On rappelle : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.
- La famille $([X = 1], [X = 2])$ forme un système complet d'événements. On en déduit, par application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 1]) &= \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) \\ &= \frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)} + \frac{nb}{(n+b)(n+b+c)} \\ &= \frac{n \cancel{(n+c+b)}}{(n+b) \cancel{(n+b+c)}} = \frac{n}{n+b} \end{aligned}$$

- La famille $([Y = 1], [Y = 2])$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\mathbb{P}([Y = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Y = 1]) = 1 - \frac{n}{n+b} = \frac{b}{n+b}$$

Ainsi, $Y(\Omega) = \{1, 2\}$. De plus : $\mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{n}{n+b}$ et $\mathbb{P}([Y = 2]) = \frac{b}{n+b}$.

Commentaire

- On constate que Y suit la même loi que X .
Ceci est tout à fait normal puisqu'on a remarqué à la question précédente que X et Y sont échangeables. Or, d'après la question 2., si X et Y sont échangeables, alors X et Y ont même loi.
- Cependant, l'énoncé attendait vraiment ici l'utilisation de la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de la v.a.r. Y . En effet, le caractère échangeable de X et Y est demandé à la question suivante. □

d) Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.

Démonstration.

- Échangeabilité.

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) = \frac{nb}{(n+b)(n+b+c)} = \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1])$$

On en déduit que X et Y sont échangeables.

- Indépendance.

$$\mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}([Y = 2]) = \frac{n}{n+b} \times \frac{b}{n+b} = \frac{nb}{(n+b)^2}$$

$$\text{De plus : } \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) = \frac{nb}{(n+b)(n+b+c)}$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) &= \mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}([Y = 2]) \\ \Leftrightarrow \frac{nb}{(n+b)(n+b+c)} &= \frac{nb}{(n+b)^2} \\ \Leftrightarrow n+b &= n+b+c \\ \Leftrightarrow c &= 0 \end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé : $c \neq 0$ (on a même : $c > 0$). Ainsi :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \neq \mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}([Y = 2])$$

On en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

Commentaire

Récapitulons ce que l'on a démontré dans cet exercice.

- En question 1., on a montré l'implication :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes et de même loi} \Rightarrow X \text{ et } Y \text{ sont échangeables}$$

- En question 2., on a montré l'implication :

$$X \text{ et } Y \text{ sont échangeables} \Rightarrow X \text{ et } Y \text{ ont même loi}$$

- Les questions 3. et 4. consistaient à démontrer (en exhibant un contre-exemple) :

$$X \text{ et } Y \text{ sont échangeables} \not\Rightarrow X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \quad \square$$