

ECRICOME 2016

EXERCICE 1

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y) , on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent \mathbb{R} :

$$E = \{M(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En déterminer une base et donner sa dimension.

2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés.

A est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $(1 \ -2 \ 1)$, et telle que :

$$A = PD_A P^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P , calculer BX_1, BX_2 et BX_3 . En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_B P^{-1}$$

6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

8. Montrer que B^2 est un élément de E . La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

9. Que vaut X_0 ?

10. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

12. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n , b_n et c_n en fonction de n .

EXERCICE 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

a) Étudier les variations de la fonction g_0 , définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0 .

b) Pour $n \geq 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) \geq 0 \iff n \geq 2 \ln(1+x)$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geq 1$.

Calculer soigneusement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

c) Montrer que, pour $n \geq 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

d) Montrer enfin que pour tout $n \geq 1$:

$$g_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$$

- a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
- b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.
- c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n$$

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{n!} g_n(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n .

- b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?
- c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?
- d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geq 0$.
- e) Soit $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

- f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).
- g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

- a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?
- b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.
- c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.
- d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = F_n(e^x - 1)$$

- e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n .
- f) Reconnaître la loi de Y_0 .
À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans \mathbb{N} . On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i])$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi.
Montrer que X et Y sont échangeables.
2. On suppose que X et Y sont échangeables.
Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = i]) = \mathbb{P}([Y = i])$$

Étude d'un exemple

Soient n , b et c trois entiers strictement positifs.

Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
 - On replace la boule dans l'urne et :
 - ★ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
 - ★ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
 - ★ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
 - On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.
3. a) Compléter la fonction **Scilab** suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```

1  function res = tirage(b, n)
2      r = rand()
3      if ..... then
4          res = 2
5      else
6          res = 1
7      end
8  endfunction

```

- b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.

Les paramètres de sortie sont :

- `x` : une simulation de la variable aléatoire X
- `y` : une simulation de la variable aléatoire Y

```

1  function [x, y] = experience (b, n, c, variante)
2      x = tirage (b, n)
3      if variante == 1 then
4          if x == 1 then
5              .....
6          else
7              .....
8          end
9      else if variante == 2 then
10         .....
11         .....
12         .....
13         .....
14         .....
15     end
16     y = tirage (b, n)
17 endfunction

```

- c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X , la loi de Y et la loi du couple (X, Y) .

Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\mathbb{P}([X = 1]), \mathbb{P}([X = 2])]$
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\mathbb{P}([Y = 1]), \mathbb{P}([Y = 2])]$
- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) & \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \\ \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) & \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2]) \end{bmatrix}$$

```

1  function [loiX, loiY, loiXY] = estimation(b, n, c, variante, N)
2      loiX = [0, 0]
3      loiY = [0, 0]
4      loiXY = [0, 0; 0, 0]
5      for k = 1 : N
6          [x, y] = experience(b, n, c, variante)
7          loiX(x) = loiX(x) + 1
8          .....
9          .....
10     end
11     loiX = loiX / N
12     loiY = loiY / N
13     loiXY = loiXY / N
14 endfunction

```

d) On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
loiXY =
    0.49837    0.16785
    0.16697    0.16681
loiY =
    0.66534    0.33466
loiX =
    0.66622    0.33378

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
loiXY =
    0.33258    0.33286
    0.25031    0.08425
loiY =
    0.58289    0.41711
loiX =
    0.66544    0.33456

--> [loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
loiXY =
    0.44466    0.22098
    0.22312    0.11124
loiY =
    0.66778    0.33222
loiX =
    0.66564    0.33436

```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.

On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$$\begin{aligned}
 0.33 \times 0.33 &\simeq 0.11 \\
 0.33 \times 0.41 &\simeq 0.14 \\
 0.33 \times 0.58 &\simeq 0.19 \\
 0.33 \times 0.66 &\simeq 0.22 \\
 0.41 \times 0.66 &\simeq 0.27 \\
 0.58 \times 0.66 &\simeq 0.38 \\
 0.66 \times 0.66 &\simeq 0.44
 \end{aligned}$$

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.

- a) Donner la loi de X .
- b) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- c) Déterminer la loi de Y .
- d) Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.