HEC 2015

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ et qui vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

- Montrons que f est une application linéaire.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Alors il existe $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Par définition de f :

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= (\lambda \cdot x + \mu \cdot y) - \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda\, x_i + \mu\, y_i)\right) \cdot v \\
&= \lambda \cdot x + \mu \cdot y - \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v \\
&= \lambda \cdot x + \mu \cdot y - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v - \mu \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v \\
&= \lambda \cdot \left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v\right) + \mu \cdot \left(y - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v\right) \\
&= \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est linéaire.}}$$

- Montrons que $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$, *i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \in \mathbb{R}^n$.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors : $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in \mathbb{R}$.
On rappelle que : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.
Ainsi, $f(x)$ appraît comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, x et v.
Comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel, on a bien : $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^n.}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n.}$$

□

b) Montrer que $f \circ f = f$.

Démonstration.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) \ = \ f\left(x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v\right) & \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot f(v) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(v - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot v\right) & \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot (v - v) & \textit{(car } \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1\textit{)} \\ & = & f(x) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f \circ f = f.}$$

Commentaire

Si E est un espace vectoriel, un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifie $f \circ f = f$ est appelé projecteur de E. Dans cet exercice, on va étudier quelques propriétés classiques (mais hors programme) des projecteurs.

□

2. Déterminer le spectre de f.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $f \circ f - f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.
  Donc $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de f.
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, 1\}.}$$
- On remarque alors :
  $$f(v) = v - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot v = v - 1 \cdot v = 0$$
  Or $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ car $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$. Donc : $\left\{\begin{array}{l} v \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ f(v) = 0_{\mathbb{R}^n} \end{array}\right.$.
  On en déduit que v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.
  $$\boxed{\text{Ainsi, 0 est valeur propre de } f.}$$
- D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f\big(f(x)\big) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.
  Ainsi, tout vecteur $f(x)$ **non nul** est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
  Un tel élément existe forcément. Pour le démontrer, remarquons tout d'abord que comme l'endomorphisme f n'est pas l'application nulle alors : $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
  Ainsi il existe $u \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Et d'après ce qui précède : $f(u) = 1 \cdot u$.
  (on peut de nouveau le détailler. Comme : $u \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = f(x)$ et $f(u) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = u$)
  $$\boxed{\text{Ainsi, 1 est valeur propre de } f.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\}.}$$

Commentaire

- L'application f est définie à l'aide du vecteur v. Penser à déterminer $f(v)$, dès la lecture de cette définition, est un bon réflexe. Il faut alors penser à utiliser ce calcul au bon moment : pour démontrer 0 est bien une valeur propre de f puisque v en est un vecteur propre.
- Il est plus difficile de trouver un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
On se sert pour cette question du résultat suivant :
$$\forall u \in \mathrm{Im}(f), \; f(u) = u$$
Cette relation est vraie pour tout projecteur f et se démontre grâce à la relation : $f \circ f = f$ (c'est ce qui a été fait dans le corrigé de cette question et dans la suivante).
- Il est important de penser à la notion de polynôme annulateur dès que l'énoncé met en jeu des puissances de matrices ou des itérées d'applications linéaires.
Ce réflexe permet de démontrer l'étape :
$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 1\}$$
S'il est évidemment préférable d'écrire toutes les étapes de démonstration d'une question, chacune d'entre elles rapporte des points. Il est donc vivement conseillé d'écrire la première étape de démonstration quitte à admettre celles qui suivent. □

3. a) Montrer que le vecteur y appartient à l'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, si et seulement si $f(y) = y$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

($\Rightarrow$) Supposons que $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que : $y = f(x)$.
On obtient alors :
$$f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = y$$

($\Leftarrow$) Supposons que : $f(y) = y$.
Alors, en posant : $x = y$, on exhibe bien $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.
Donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}^n, \; (y \in \mathrm{Im}(f)) \; \Leftrightarrow \; (f(y) = y)}$$

Commentaire

Cette démonstration n'utilise pas la définition de f mais seulement la propriété : $f \circ f = f$.
C'est donc un résultat général sur les projecteurs que l'on montre ici. □

b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n - 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.***, 0 est valeur propre de f. Donc : $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
On en déduit : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$.
- Ainsi, d'après le théorème du rang :
$$\underset{\substack{\shortparallel \\ n}}{\dim(\mathbb{R}^n)} \; = \; \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \; \geqslant \; 1 + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$$\boxed{\text{Comme } n \geqslant 1 + \dim(\mathrm{Im}(f)), \text{ on a bien : } \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n - 1.}$$
□

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.

- Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, notons : $e_j = (e_j^1, e_j^2, \ldots, e_j^n)$. Alors, par définition de e_j :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ e_j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Ainsi : $\sum\limits_{k=1}^{n} e_j^k = 1$.

- On calcule alors :

$$f(e_i) = e_i - 1 \cdot v = e_i - v$$

  De même : $f(e_{i+1}) = e_{i+1} - v$.
  On en déduit, par linéarité de f :

$$f(e_i - e_{i+1}) = f(e_i) - f(e_{i+1}) = (e_i - \cancel{v}) - (e_{i+1} - \cancel{v}) = e_i - e_{i+1}$$

  D'après la question ***3.a)***, on en déduit : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)}$$

□

d) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

Démonstration.

- Montrons que la famille $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$.
  - × D'après la question précédente :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$$

  - × Démoontrons maintenant que cette famille est libre.
    Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (e_1 - e_2) + \lambda_2 \cdot (e_2 - e_3) + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot (e_{n-1} - e_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

    On obtient alors :

$$\lambda_1 \cdot e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e_2 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) \cdot e_{n-1} + \lambda_{n-1} \cdot e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$$

    Or la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. La proposition précédente équivaut donc à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & & & & & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & & & = & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & & - & \lambda_{n-2} & + \ \lambda_{n-1} & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_{n-1} & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-2} = \lambda_{n-1} = 0$$

    (par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n) \text{ est une famille libre de } \mathrm{Im}(f).}$$

- On en déduit :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant \mathrm{Card}((e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)) = n - 1$$

Or, d'après la question ***3.b)*** : $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n - 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - 1}$$

- On sait que :
  × $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$,
  × $\mathrm{Card}((e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)) = n - 1 = \dim(\mathrm{Im}(f))$

On en déduit que $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
De plus : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - 1$.

Commentaire

Les énoncés de type HEC / ESSEC se distinguent des énoncés EML / EDHEC par un découpage plus faible des questions qui oblige à prendre plus d'initiatives. Ici, la formulation de la question « En déduire que … » doit aider à comprendre qu'il s'agit de se servir du résultat précédent. En question précédente, on exhibe $(n-1)$ vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$. Il s'agit alors de tester si la famille constituée de ces vecteurs est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

□

4. a) Déterminer une base du noyau de f.

Démonstration.

- D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \underset{n-1}{\underset{\parallel}{\dim(\mathrm{Im}(f))}} = \underset{n}{\underset{\parallel}{\dim(\mathbb{R}^n)}}$$

Donc : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - (n-1) = 1$.

- D'après la question ***2.*** :
  × $v \in \mathrm{Ker}(f)$,
  × $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

  Donc (v) forme une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$.
- On obtient alors :
  × (v) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$,
  × $\mathrm{Card}((v)) = 1 = \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (v) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

□

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?

Démonstration.

- On a déjà, d'après la question ***4.a)*** :

$$E_0(f) = \mathrm{Ker}(f - 0_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(v)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } E_0(f) = \text{Vect}(v).}$$

- Soit $y \in \mathbb{R}^n$. D'après la question ***3.a)*** :

$$y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow f(y) = y \Leftrightarrow y \in E_1(f)$$

On en déduit que : $\text{Im}(f) = E_1(f)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après la question } \textbf{\textit{3.d)}} : \\ E_1(f) = \text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)\end{array}}$$

□

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.
D'après les questions ***3.d)***, ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_1(f)) = 1 + (n-1) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

□

5. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice M' de f dans une base de vecteurs propres.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a déjà montré en question ***3.c)*** :

$$\begin{array}{rcl} f(e_i) & = & e_i - v \ = \ e_i - \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \cdot e_j \\ & = & (-v_1) \cdot e_1 + \cdots + (1 - v_i) \cdot e_i + (-v_{i+1}) \cdot e_{i+1} + \cdots + (-v_n) \cdot e_n \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } M = \begin{pmatrix} 1-v_1 & -v_1 & \cdots & -v_1 & -v_1 \\ -v_2 & 1-v_2 & \cdots & -v_2 & -v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -v_{n-1} & -v_{n-1} & \cdots & 1-v_{n-1} & -v_{n-1} \\ -v_n & -v_n & \cdots & -v_n & 1-v_n \end{pmatrix}}$$

- La famille $(v, e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est une base de vecteurs propres de f.
  - × Comme $v \in E_0(f)$:

$$f(v) = 0_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot v + 0 \cdot (e_1 - e_2) + \cdots + 0 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

  - × Comme $(e_1 - e_2) \in E_1(f)$:

$$f(e_1 - e_2) = e_1 - e_2 = 0 \cdot v + 1 \cdot (e_1 - e_2) + 0 \cdot (e_2 - e_3) + \cdots + 0 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

  - × $\cdots$
  - × Comme $(e_{n-1} - e_n) \in E_1(f)$:

$$f(e_{n-1} - e_n) = e_{n-1} - e_n = 0 \cdot v + 0 \cdot (e_1 - e_2) + \cdots + 0 \cdot (e_{n-2} - e_{n-1}) + 1 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}$$

□

Problème (HEC 2015)

Dans tout le problème :

- Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- On considère une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), de densité f_X définie par :

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie I. Comparaison de deux estimateurs de $\dfrac{1}{\lambda}$

L'objectif de cette partie est de comparer deux estimateurs sans biais et convergents du paramètre inconnu $\dfrac{1}{\lambda}$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\, Y_n$ et $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Rappeler sans démonstration les valeurs de l'espérance $\mathbb{E}(X)$, de la variance $\mathbb{V}(X)$ ainsi que l'expression de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Comme } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) : \mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}. \\[2ex] \text{De plus : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}. \end{array}}$$

□

2. Calculer $\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right)$ et $\mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right)$. En déduire que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $\dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration.

- La v.a.r. $\overline{X}_n$ admet une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\[2ex] & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\[2ex] & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda} & \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\[2ex] & = & \dfrac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\ \dfrac{1}{\lambda} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{\lambda}.}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) && \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^2} && \textit{(car : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n}\ \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n\,\lambda^2}.}$$

- La v.a.r. $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ s'exprime :
  - × à l'aide d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la v.a.r. X,
  - × sans mention du paramètre λ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } \overline{X}_n \text{ est donc un estimateur de } \frac{1}{\lambda}.}$$

- De plus :

$$b_\lambda\left(\overline{X}_n\right) = \mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \overline{X}_n \text{ est un estimateur sans biais de } \frac{1}{\lambda}.}$$

- La v.a.r. $\overline{X}_n$ admet une variance. Elle admet donc un risque quadratique.
  Par décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned}
r_\lambda\left(\overline{X}_n\right) &= \mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right) + \left(b_\lambda\left(\overline{X}_n\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{n\,\lambda^2} + 0 && \textit{(d'après ce qui précède)}
\end{aligned}$$

  On remarque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\,\lambda^2} = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\lambda\left(\overline{X}_n\right) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \overline{X}_n \text{ est un estimateur convergent de } \frac{1}{\lambda}.}$$

$\square$

3. a) Montrer qu'une densité f_{M_n} de M_n est donnée par :

$$f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} n\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } M_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[.}$$

- Déterminons F_{M_n}, la fonction de répartition de M_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors $[M_n \leqslant x] = \varnothing$ (car $M_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$). D'où :
  $$F_{M_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([M_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  × si $x \in \,]0, +\infty[$, tout d'abord :
  $$\begin{array}{rcl} [M_n \leqslant x] & = & [\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x] \\ & = & \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x] \end{array}$$
  Ainsi :
  $$\begin{array}{rcll} F_{M_n}(x) & = & \mathbb{P}([M_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) & \textit{(car, pour tout } i \in [\![1, n]\!], \ X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } x > 0\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{M_n} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^n & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{array} \right. .}$$

- Démontrons que M_n est une v.a.r. à densité.
  × La fonction F_{M_n} est continue :
  - sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante.
  - sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
  - en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{M_n}(x) = F_{M_n}(0) = 0$.
    D'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{M_n}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, 0} = 1 - 1 = 0$. Ainsi :
    $$\lim_{x \to 0^-} F_{M_n}(x) \ = \ F_{M_n}(0) \ = \ \lim_{x \to 0^+} F_{M_n}(x)$$

  La fonction F_{M_n} est donc continue sur $\mathbb{R}$.
  × La fonction F_{M_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.
  Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } M_n \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_{M_n} de M_n, on dérive sa fonction de répartition F_{M_n} sur les intervalles **ouverts** $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × si $x \in]-\infty,0[$, alors :
  $$f_{M_n}(x) \;=\; F'_{M_n}(x) \;=\; 0$$
  × si $x \in]0,+\infty[$, alors :
  $$f_{M_n}(x) \;=\; F'_{M_n}(x) \;=\; -n\left(-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\right)^{n-1} \;=\; n\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\right)^{n-1}$$
  × On choisit enfin : $f_{M_n}(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ n\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\right)^{n-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}}$$

Commentaire

- On fait ici l'étude de la loi d'un maximum de v.a.r. . Cette étude est classique et commence toujours par l'énoncé de l'égalité entre événements, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$[\max(X_1,\dots,X_n) \leqslant x] \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$$
- On rappelle que dans le cas de l'étude d'un minimum de v.a.r. , on commence par une égalité similaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$[\min(X_1,\dots,X_n) > x] \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]$$

□

b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(M_n)$ de la variable aléatoire M_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. M_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{M_n}(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f_{M_n}(x)\ dx$.
- Comme la fonction f_{M_n} est nulle en dehors de $]0,+\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{M_n}(x)\ dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} x\, f_{M_n}(x)\ dx$$
- La fonction $x \mapsto x\, f_{M_n}(x)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f_{M_n}(x)\ dx$ est donc seulement impropre en $+\infty$.

- De plus :
  - × on remarque : $x\, f_{M_n}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. En effet :

$$\frac{x\, f_{M_n}(x)}{\frac{1}{x^2}} \;=\; n\,\lambda\, x^3\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x})^{n-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} n\,\lambda\, x^3\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \times 1$$

  Or, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} = 0$. D'où : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\, f_{M_n}(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$.
  - × pour tout $x \in [1,+\infty[$: $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$ et $x\, f_{M_n}(x) \geqslant 0$ (car f_{M_n} est une densité)
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\, f_{M_n}(x)\, dx$ est convergente.
- Enfin, la fonction $x \mapsto x\, f_{M_n}(x)$ est continue par morceaux sur le **segment** $[0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} x\, f_{M_n}(x)\, dx$ est donc bien définie.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, f_{M_n}(x)\, dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la v.a.r. } M_n \text{ admet une espérance.}}$$

□

c) En posant $z = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, justifier pour tout $a > 0$, l'égalité :

$$\int_0^a x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})^{n-1}\, dx \;=\; -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{1-\mathrm{e}^{-\lambda a}} z^{n-1}\,\ln(1-z)\, dz$$

Démonstration.
Soit $a > 0$.
On effectue le changement de variable $\boxed{z = 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}$.

$$\left|\begin{array}{l} z = 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x} \ (\text{donc } x = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-z)) \\ \hookrightarrow dz = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx \quad \text{et} \quad dz = \dfrac{1}{\lambda}\,\dfrac{1}{1-z}\, dz \\ \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ z = 0 \\ \bullet\ x = a \ \Rightarrow\ z = 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, a} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : z \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, a}]$.
On obtient :

$$\int_0^a x\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x})^{n-1}\, dx \;=\; \int_0^{1-\mathrm{e}^{-\lambda\, a}} \left(-\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-z)\right) \cancel{(1-z)}\, z^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{\cancel{1-z}}\, dz\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_0^a x\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x})^{n-1}\, dx = -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{1-\mathrm{e}^{\lambda\, a}} z^{n-1}\,\ln(1-z)\, dz.}$$

□

d) En déduire que l'on a : $\mathbb{E}(M_n) = -\dfrac{n}{\lambda} \displaystyle\int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z)\ dz$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.b)***, la v.a.r. M_n admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(M_n) \ = \ \int_0^{+\infty} x\, f_{M_n}(x)\ dx \ = \ n\,\lambda \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\ (1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x})^{n-1}\ dx$$

- En particulier l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\ (1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x})^{n-1}\ dx$ est convergente. On en déduit, avec la question précédente, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z)\ dz$ converge également et :

$$\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x})^{n-1}\ dx = -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z)\ dz$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(M_n) = n\,\lambda \left(-\frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z)\ dz\right) = -\frac{n}{\lambda} \int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z)\ dz.}$$

□

e) Montrer que la fonction $z \mapsto (1-z)\big(1-\ln(1-z)\big)$ définie sur l'intervalle $[0,1[$, est une primitive de la fonction $z \mapsto \ln(1-z)$.
À l'aide d'une intégration par parties, en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre $\mathbb{E}(M_{n+1})$ et $\mathbb{E}(M_n)$.

Démonstration.

- On note g la fonction définie sur $[0,1[$ par : $g : z \mapsto (1-z)\,\big(1-\ln(1-z)\big)$.
  - × La fonction g est dérivable sur $[0,1[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,1[$.
  - × Soit $z \in [0,1[$.

$$\begin{array}{rcl} g'(z) & = & (-1) \times \big(1-\ln(1-z)\big) + \cancel{(1-z)} \times \left(-\dfrac{-1}{\cancel{1-z}}\right) \\[2mm] & = & -\cancel{1} + \ln(1-z) + \cancel{1} \\[2mm] & = & \ln(1-z) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } g : z \mapsto (1-z)\big(1-\ln(1-z)\big) \text{ est une primitive de } z \mapsto \ln(1-z).}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(M_{n+1}) \ = \ -\frac{n+1}{\lambda} \int_0^1 z^n \ln(1-z)\ dz$$

Soit $B \in [0,1[$.
On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(z) & = & z^n & & u'(t) & = & n\, z^{n-1} \\[2mm] v'(t) & = & \ln(1-z) & & v(t) & = & (1-z)\,\big(1-\ln(1-z)\big) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,B]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\int_0^B z^n \ln(1-z)\, dz \\
&= \left[\ z^n\,(1-z)\,\big(1-\ln(1-z)\big)\ \right]_0^B - \int_0^B n\, z^{n-1}\,(1-z)\,\big(1-\ln(1-z)\big)\, dz \\
&= B^n\,(1-B)\,\big(1-\ln(1-B)\big) - n\int_0^B z^{n-1}\,(1-z)\,\big(1-\ln(1-z)\big)\, dz
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
&\int_0^B z^{n-1}\,(1-z)\,\big(1-\ln(1-z)\big)\, dz \\
&= \int_0^B (z^{n-1}-z^n)\,\big(1-\ln(1-z)\big)\, dz \\
&= \int_0^B (z^{n-1}-z^n)\, dz - \int_0^B z^{n-1}\ln(1-z)\, dz + \int_0^B z^n \ln(1-z)\, dz \\
&= \left[\ \frac{1}{n}\, z^n - \frac{1}{n+1}\, z^{n+1}\ \right]_0^B - \int_0^B z^{n-1}\ln(1-z)\, dz + \int_0^B z^n \ln(1-z)\, dz \\
&= \frac{B^n}{n} - \frac{B^{n+1}}{n+1} - \int_0^B z^{n-1}\ln(1-z)\, dz + \int_0^B z^n \ln(1-z)\, dz
\end{aligned}$$

- Or :
  - × tout d'abord :

    $$B^n\,(1-B)\,\big(1-\ln(1-B)\big) \;=\; B^n\,(1-B) - B^n\,(1-B)\,\ln(1-B)$$

    De plus : $\lim\limits_{B\to 1} B^n\,(1-B) = 0$.
    Et, en posant le changement de variable $u = 1-B$:

    $$\lim_{B\to 1} B^n\,(1-B)\,\ln(1-B) \;=\; \lim_{u\to 0}\,(1-u)^n\, u\,\ln(u) \;=\; 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

    D'où : $\lim\limits_{B\to 1} B^n\,(1-B)\,\big(1-\ln(1-B)\big) = 0$.
  - × Ensuite :

    $$\lim_{B\to 1} \frac{B^n}{n} - \frac{B^{n+1}}{n+1} \;=\; \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \;=\; \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n\,(n+1)} \;=\; \frac{1}{n\,(n+1)}$$

  - × Enfin, d'après la question ***3.d)***, les intégrales $\int_0^1 z^{n-1}\ln(1-z)\, dz$ et $\int_0^1 z^n \ln(1-z)\, dz$ convergent et :

    $$\int_0^1 z^{n-1}\ln(1-z)\, dz \;=\; -\frac{\lambda}{n}\,\mathbb{E}(M_n) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 z^n\ln(1-z)\, dz \;=\; -\frac{\lambda}{n+1}\,\mathbb{E}(M_{n+1})$$

  D'où :

$$\begin{aligned}
\lim_{B\to 1}\int_0^B z^{n-1}\,(1-z)\,\big(1-\ln(1-z)\big)\, dz &= \frac{1}{n\,(n+1)} - \left(-\frac{\lambda}{n}\,\mathbb{E}(M_n)\right) + \left(-\frac{\lambda}{n+1}\,\mathbb{E}(M_{n+1})\right) \\
&= \frac{1}{n\,(n+1)} + \frac{\lambda}{n}\,\mathbb{E}(M_n) - \frac{\lambda}{n+1}\,\mathbb{E}(M_{n+1})
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} & \lim_{B\to 1} B^n\,(1-B)\,\big(1-\ln(1-B)\big) - n \int_0^B z^{n-1}\,(1-z)\,\big(1-\ln(1-z)\big)\,dz \\ = \quad & 0 - n\left(\frac{1}{n\,(n+1)} + \frac{\lambda}{n}\,\mathbb{E}(M_n) - \frac{\lambda}{n+1}\,\mathbb{E}(M_{n+1})\right) \\ = \quad & -\frac{1}{n+1} - \lambda\,\mathbb{E}(M_n) + \lambda\,\frac{n}{n+1}\,\mathbb{E}(M_{n+1}) \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1}) &= -\frac{n+1}{\lambda}\left(-\frac{1}{n+1} - \lambda\,\mathbb{E}(M_n) + \lambda\,\frac{n}{n+1}\,\mathbb{E}(M_{n+1})\right) \\ &= \frac{1}{\lambda} + (n+1)\,\mathbb{E}(M_n) - n\,\mathbb{E}(M_{n+1}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(n+1)\,\mathbb{E}(M_{n+1}) = \frac{1}{\lambda} + (n+1)\,\mathbb{E}(M_n)$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(M_{n+1}) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{n+1} + \mathbb{E}(M_n).}$$

Commentaire

On rappelle qu'une intégration par parties s'effectue toujours sur un **segment**. Ici l'intégrale d'intérêt est $\displaystyle\int_0^1 z^n\,\ln(1-z)\,dz$ qui est impropre en 1. La démonstration de sa convergence et son calcul s'effectuent donc en 2 étapes (classiques) :

1) calcul de l'intégrale sur le **segment** $[0, B]$,

2) passage à la limite quand B tend vers 1.

□

f) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$. Déduire de la question précédente : $\mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{\lambda}\,u_n$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(M_{k+1}) - \mathbb{E}(M_k) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{k+1}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En sommant les égalités précédentes pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \big(\mathbb{E}(M_{k+1}) - \mathbb{E}(M_k)\big) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{k+1}$$

$$\shortparallel$$

$$\mathbb{E}(M_n) - \mathbb{E}(M_1) \qquad \textit{(par télescopage)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= \mathbb{E}(M_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{k+1} \\ &= \mathbb{E}(M_1) + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} && \textit{(par décalage d'indice)}\end{aligned}$$

Or, par définition de M_1 : $M_1 = X_1$. On en déduit que la v.a.r. M_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ. D'où :

$$\mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{\lambda}\, u_n.}$$

□

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M'_n = \dfrac{M_n}{u_n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$. *On admet :* $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{1}{\lambda^2}\, v_n$.

a) Calculer $\mathbb{E}(M'_n)$ et $\mathbb{V}(M'_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. M'_n admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée linéaire de la v.a.r. M_n qui en admet une (d'après l'énoncé).
- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M'_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{u_n}\, M_n\right) \\ &= \frac{1}{u_n}\, \mathbb{E}(M_n) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{\cancel{u_n}} \times \frac{1}{\lambda}\, \cancel{u_n} && \textit{(d'après la question précédente)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(M'_n) = \frac{1}{\lambda}.}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(M'_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{u_n}\, M_n\right) \\ &= \frac{1}{u_n^2}\, \mathbb{V}(M_n) && \textit{(par propriété de la variance)} \\ &= \frac{1}{u_n^2} \times \frac{1}{\lambda^2}\, v_n && \textit{(d'après l'énoncé)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(M'_n) = \frac{v_n}{\lambda^2\, u_n^2}.}$$

□

b) Justifier la convergence de la suite de terme général v_n. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Démonstration.

- La suite (v_n) est la suite des sommes partielles de la série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$).

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc convergente.}}$$

- La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série à termes positifs, la suite de ses sommes partielles (u_n) est donc croissante.
  Deux cas se présentent :
  × si (u_n) est majorée, alors elle converge.
  × si (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
  Démontrons par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.
  Supposons que la suite (u_n) est majorée.
  Alors elle converge.
  Or la suite (u_n) est la suite des sommes partielle de la série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$).
  Absurde !

  On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

□

c) Déduire des questions ***4.a)*** et ***4.b)*** que M'_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $\dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration.

- La v.a.r. $M'_n = \dfrac{1}{u_n} \max(X_1, \dots, X_n)$ s'exprime :
  × à l'aide d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la v.a.r. X,
  × sans mention du paramètre λ.

  La v.a.r. M'_n est donc un estimateur de $\dfrac{1}{\lambda}$.

- La v.a.r. M'_n admet une espérance. Elle admet donc un biais. De plus, d'après la question ***4.a)*** :

$$b_\lambda(M'_n) \; = \; \mathbb{E}(M'_n) - \frac{1}{\lambda} \; = \; \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \; = \; 0$$

  On en déduit que M'_n est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{\lambda}$.

- La v.a.r. M'_n admet une variance. Elle admet donc un risque quadratique.
  Par décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned} r_\lambda(M'_n) \; &= \; \mathbb{V}(M'_n) + \big(b_\lambda(M'_n)\big)^2 \\ &= \; \frac{v_n}{\lambda^2\, u_n^2} + 0 \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.a)}} \textit{ et ce qui précède)} \end{aligned}$$

  De plus, d'après la question ***4.b)*** :
  × la suite (v_n) converge,
  × la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
  On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{u_n^2} = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} r_\lambda(M'_n) = 0$.

  On en déduit que M'_n est un estimateur convergent de $\dfrac{1}{\lambda}$.

□

d) Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(x - \dfrac{1}{j}\right)^2$.

À l'aide de l'étude de Q, établir l'inégalité : $u_n^2 \leqslant n\, v_n$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{j=1}^{n} \left(x - \frac{1}{j}\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(x^2 - 2\,x\,\frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}\right) \\ &= n\,x^2 - 2\,x \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \\ &= n\,x^2 - 2\,u_n\,x + v_n \end{aligned}$$

- La fonction Q est donc une fonction polynomiale de degré 2.
  De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Q(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(x - \dfrac{1}{j}\right)^2 \geqslant 0$, car une somme de carrés est positive.
  Cette fonction polynomiale étant de signe constant, on en déduit que le discriminant du polynôme associé est négatif. Or :

$$\Delta \;=\; (-2\,u_n)^2 - 4\,n\,v_n \;=\; 4\,u_n^2 - 4\,n\,v_n$$

  Ainsi, comme $\Delta \leqslant 0$, alors : $4\,u_n^2 \leqslant 4\,n\,v_n$.

$$\boxed{\text{D'où : } u_n^2 \leqslant n\,v_n.}$$

Commentaire

On reconnaît ici le principe de démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\big(\operatorname{Cov}(X,Y)\big)^2 \;\leqslant\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$$

1) Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 est de signe constant.
Pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il s'agit de la fonction Q définie par :

$$Q : \lambda \mapsto \mathbb{V}(\lambda\,X + Y) = \lambda^2\,\mathbb{V}(X) + 2\,\lambda\,\operatorname{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$

2) En déduit que le discriminant du polynôme associé est négatif.
Pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Delta \;=\; \big(2\,\operatorname{Cov}(X,Y)\big)^2 - 4\,\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \;=\; 4\,\big(\operatorname{Cov}(X,Y)\big)^2 - 4\,\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$$

3) En déduire l'inégalité souhaitée.
Pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{array}{ll} \text{comme} & \Delta \leqslant 0 \\ \text{alors} & 4\,\big(\operatorname{Cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant 4\,\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \\ \text{d'où} & \big(\operatorname{Cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \end{array}$$

$\square$

e) Comparer alors $\mathbb{V}(M'_n)$ et $\mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right)$. Conclure.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{lcl} & u_n^2 \leqslant n\, v_n & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{v_n}{u_n^2} & \textit{(car } n\, u_n^2 > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{\lambda^2\, n} \leqslant \dfrac{v_n}{\lambda\, u_n^2} & \textit{(car } \lambda^2 > 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & \mathbb{V}(\overline{X}_n) \leqslant \mathbb{V}(M'_n) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(\overline{X}_n) \leqslant \mathbb{V}(M'_n)}$$

- Comme les estimateurs $\overline{X}_n$ et M'_n de $\dfrac{1}{\lambda}$ sont sans biais, on en déduit :

$$r_\lambda(\overline{X}_n) \ \leqslant\ r_\lambda(M'_n)$$

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que } \overline{X}_n \text{ est un meilleur estimateur de } \dfrac{1}{\lambda} \text{ que } M'_n.}$$

□

Partie II. Un exemple.

Les notations et le contexte sont ceux de la partie I.
Dans cette partie, on suppose que la durée de vie (en heures) d'un composant électronique est une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).
On suppose qu'en cas de panne, le composant électronique est immédiatement remplacé par un composant neuf dont la durée de vie est indépendante et de même loi que celle des composants précédents.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note X_j la variable aléatoire égale à la durée de vie du $j^{\text{ème}}$ composant.
Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on constitue ainsi un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X.
On note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la réalisation du n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on pose : $\overline{x}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

5. a) Donner une interprétation de $\dfrac{1}{\lambda}$. Dans quelle unité s'exprime $\dfrac{1}{\lambda}$?

Démonstration.
La v.a.r. X correspond à la durée de vie en heures d'un composant électronique.
De plus, comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que le réel } \dfrac{1}{\lambda} \text{ peut s'interpréter comme la durée de vie moyenne,} \\ \text{en heures, du composant.}\end{array}}$$

□

b) Soit $p \in \,]0,1[$. Déterminer en fonction de p et λ, l'unique réel h_p pour lequel on a : $\mathbb{P}([X > h_p]) = p$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{P}([X > x]) = p \ \Leftrightarrow\ 1 - F_X(x) = p \ \Leftrightarrow\ F_X(x) = 1 - p$$

Deux cas se présentent :

- si $x < 0$, alors, comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$: $F_X(x) = 0$. D'où :

$$F_X(x) = 1 - p \;\Leftrightarrow\; 0 = 1 - p \;\Leftrightarrow\; p = 1$$

  C'est impossible car $p \in \,]0,1[$.

$$\boxed{\text{L'équation } \mathbb{P}([X > x]) = p \text{ n'admet donc aucune solution sur }]-\infty, 0[.}$$

- si $x \geqslant 0$, alors : $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$. D'où :

$$\begin{aligned} F_X(x) = 1 - p &\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} = 1 - p \\ &\Leftrightarrow p = \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &\Leftrightarrow \ln(p) = -\lambda x && \textit{(par bijectivité de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow -\frac{\ln(p)}{\lambda} = x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'équation } \mathbb{P}([X > x]) = p \text{ admet donc une unique solution sur } [0,+\infty[\,:\, -\frac{\ln(p)}{\lambda}.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } \mathbb{P}([X > x]) = p \text{ admet une unique solution } h_p \text{ sur } \mathbb{R} : h_p = -\frac{\ln(p)}{\lambda}.}$$

□

c) Proposer un estimateur H_n sans biais et convergent pour le paramètre h_p.

Démonstration.

- D'après la question ***2.*** :

$$\begin{aligned} & & \mathbb{E}(\overline{X}_n) &= \frac{1}{\lambda} \\ &\text{donc} & -\ln(p)\, \mathbb{E}(\overline{X}_n) &= -\frac{\ln(p)}{\lambda} \\ &\text{d'où} & \mathbb{E}\big(-\ln(p)\, \overline{X}_n\big) &= -\frac{\ln(p)}{\lambda} && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{aligned}$$

- On pose alors : $H_n = -\ln(p)\, \mathbb{E}(\overline{X}_n)$. La v.a.r. $H_n = -\ln(p) \times \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ s'exprime :
  - × à l'aide d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la v.a.r. X
  - × sans mention du paramètre λ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } H_n = -\ln(p)\, \overline{X}_n \text{ est donc un estimateur de } h_p.}$$

- La v.a.r. H_n admet une variance (donc une espérance) en tant que transformée linéaire de la v.a.r. $\overline{X}_n$ qui en admet une. Elle admet donc en particulier un biais et un risque quadratique. De plus :

$$b_\lambda(H_n) \;=\; \mathbb{E}(H_n) - \left(-\frac{\ln(p)}{\lambda}\right) \;=\; 0 \qquad \textit{(d'après le point précédent)}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } H_n \text{ est donc un estimateur sans biais de } h_p.}$$

- Enfin, par décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned} r_\lambda(H_n) &= \mathbb{V}(H_n) + \big(b_\lambda(H_n)\big)^2 \\ &= \mathbb{V}\big(-\ln(p)\,\overline{X}_n\big) + 0 \\ &= \big(-\ln(p)\big)^2\,\mathbb{V}(\overline{X}_n) \\ &= \frac{\big(\ln(p)\big)^2}{n\,\lambda^2} && \textit{(d'après 2.)} \end{aligned}$$

On remarque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\big(\ln(p)\big)^2}{n\,\lambda^2} = 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\lambda(H_n) = 0$.

On en déduit que la v.a.r. H_n est un estimateur convergent de h_p.

□

d) On suppose que sur un échantillon de 100 composants, on a obtenu : $\sum\limits_{i=1}^{100} x_i = 10^5$ heures.
Donner une estimation de $h_{\frac{1}{2}}$ (on donne $\ln(2) \simeq 0,7$).

Démonstration.
D'après la question précédente, la v.a.r. H_{100} est un estimateur de $h_{\frac{1}{2}}$. On note ℓ l'estimation qu'elle fournit. Alors :

$$\ell \;=\; -\ln\left(\frac{1}{2}\right)\,\overline{x}_{100} \;=\; \ln(2)\times\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i \;=\; \ln(2)\times\frac{1}{100}\times 10^5 \;=\; \ln(2)\times 10^3$$

Comme $\ln(2) \simeq 0,7$, on en déduit que $\ell \simeq 700$ est une estimation de $h_{\frac{1}{2}}$.

Commentaire

La notation $h_{\frac{1}{2}}$ peut sembler un peu maladroite. En effet, on note souvent h_{100} l'estimation fournie par l'estimateur H_{100}, mais on risque alors de confondre l'estimation h_{100} et le réel à estimer $h_{\frac{1}{2}}$. C'est pourquoi on choisit dans cette question la notation ℓ pour l'estimation fournie par H_{100}.

□

6. *On admet sans démonstration* que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable aléatoire Y_n est donnée par :

$$F_{Y_n} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\lambda\,x)^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Soit $t > 0$ un réel fixé et $N(t)$ la variable aléatoire égale au nombre de pannes dans l'intervalle $[0, t[$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

Démonstration.

- Par définition de $N(t)$: $\big(N(t)\big)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
On cherche maintenant à exprimer l'événement $[N(t) = n]$ à l'aide de la v.a.r. Y_n dont on connaît la fonction de répartition.
  × On rappelle que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ correspondent aux durées de vie des n premiers composants (un composant est remplacé dès qu'il tombe en panné).
  On en déduit que la v.a.r. $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ correspond au temps écoulé jusqu'à la $n^{\text{ème}}$ panne.
  × On en déduit :

$$\begin{array}{cl} & [N(t) \geqslant n] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{il y a eu au moins } n \text{ pannes strictement avant l'instant } t \\ \Leftrightarrow & \text{au moins } n \text{ composants sont tombés en panne strictement avant l'instant } t \\ \Leftrightarrow & [Y_n < t] \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } [N(t) \geqslant n] = [Y_n < t].}$$

  × Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([N(t) \geqslant n]) & = & \mathbb{P}([Y_n < t]) & \\ & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant t]) - \cancel{\mathbb{P}([Y_n = t])} & \\ & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant t]) & \textit{(car } F_{Y_n} \textit{ est continue sur }]0, +\infty[\textit{, donc continue en } t\textit{)} \\ & = & F_{Y_n}(t) & \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\lambda x)^k}{k!} & \textit{(car } x > 0\textit{)} \end{array}$$

Commentaire

- Rappelons la démonstration de l'égalité :

$$\mathbb{P}([Y_n < t]) \ = \ \mathbb{P}([Y_n \leqslant t]) - \mathbb{P}([Y_n = t])$$

Tout d'abord :

$$[Y_n \leqslant t] \ = \ [Y_n < t] \cup [Y_n = t]$$

Or les événements $[Y_n < t]$ et $[Y_n = t]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([Y_n \leqslant t]) \ = \ \mathbb{P}([Y_n < t]) + \mathbb{P}([Y_n = y])$$

D'où l'égalité demandée.

Commentaire

- Revenons de plus sur l'égalité :

$$\mathbb{P}([Y_n = t]) \ = \ 0 \qquad \textit{(car } F_{Y_n} \textit{ est continue en } t\textit{)}$$

Elle provient de la propriété suivante.

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors :

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P}([X = x]) = 0$$

Rappelons en la démonstration.

× Par définition :

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x) = \lim_{t \to x^-} F_X(t)$$

Or, comme F_X est une fonction de répartition, elle est en particulier continue à droite en tout point, donc en x. On en déduit que l'égalité $\lim\limits_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x)$ est toujours vérifiée. Ainsi :

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad F_X(x) = \lim_{t \to x^-} F_X(t)$$

× Or : $\lim\limits_{t \to x^-} F_X(t) = \mathbb{P}([X < x])$.
De plus, comme rappelé dans le point précédent :

$$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x])$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F_X \text{ continue en } x \ &\Leftrightarrow \ F_X(x) = \lim_{t \to x^-} F_X(t) \\ &\Leftrightarrow \ \mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x]) \\ &\Leftrightarrow \ \mathbb{P}([X = x]) = 0 \end{aligned}$$

- Notons qu'on retrouve bien que, si X est une v.a.r. à densité, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P}([X = x]) = 0$$

En effet, si X est une v.a.r. à densité, alors sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

× Or :

$$\begin{aligned} [N(t) \geqslant n] \ &= \ [N(t) = n] \cup [N(t) > n] \\ &= \ [N(t) = n] \cup [N(t) \geqslant n+1] \quad \textit{(car } N(t) \textit{ est à valeurs entières)} \end{aligned}$$

De plus, les événements $[N(t) = n]$ et $[N(t) \geqslant n+1]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([N(t) = n]) \ = \ \mathbb{P}([N(t) \geqslant n]) - \mathbb{P}([N(t) \geqslant n+1])$$

D'après les calculs fait plus haut, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([N(t) = n]) &= \mathbb{P}([N(t) \geqslant n]) - \mathbb{P}([N(t) \geqslant n+1]) \\
&= \left(\cancel{1} - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\right) - \left(\cancel{1} - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\right) \\
&= e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\right) \\
&= e^{-\lambda x} \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}} + \frac{(\lambda x)^n}{n!} - \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}}\right) \\
&= e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } N(t) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x).}$$

Commentaire

- On a commencé la résolution de cette question en précisant que la v.a.r. $N(t)$ est une v.a.r. discrète (et même à valeurs entières). Pour déterminer sa loi, l'idée classique est de déterminer, pour tout $n \in \big(N(t)\big)(\Omega) \subset \mathbb{N}$, le réel $\mathbb{P}([N(t) = n])$.
  - × On commence donc par étudier l'événement $[N(t) = n]$ et on obtient :

$$[N(t) = n] \;=\; [Y_n < t] \cap [Y_{n+1} \geqslant t]$$

En effet :

$[Y_n < t] \cap [Y_{n+1} \geqslant t]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ $[Y_n < t]$ est réalisé **ET** $[Y_{n+1} \geqslant t]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ les n premiers composants sont tombés en panne strictement avant t **ET** le $(n+1)^{\text{ème}}$ composant est tombé en panne après t

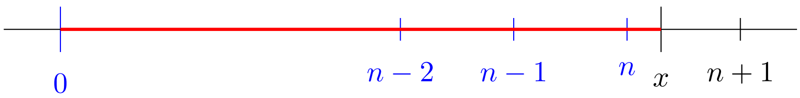
$\Leftrightarrow$ exactement n composants sont tombés en panne strictement avant l'instant t

$\Leftrightarrow$ $[N(t) = n]$ est réalisé

  - × Cependant les v.a.r. Y_n et $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$ ne sont pas indépendantes. On ne peut donc pas simplifier l'expression de $\mathbb{P}([Y_n < t] \cap [Y_{n+1} \geqslant t])$. Il faut donc déterminer la loi de $N(t)$ par un autre moyen.

Commentaire

- Comme l'étude précédente n'aboutit pas, on pense à déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. $N(t)$ (puisque la fonction de répartition caractérise la loi). On s'intéresse alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à l'événement $[N(t) \leqslant x]$.
  × Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que :
  $$n \leqslant x < n+1$$
  (en fait, cet entier n est la partie entière de x : $n = \lfloor x \rfloor$.)
  × Comme $N(t)$ est à valeurs entières, on obtient :
  $$[N(t) \leqslant x] \ = \ [N(t) \leqslant n]$$
  On peut se représenter la situation à l'aide du schéma suivant.



  Comme $N(t)$ est à valeurs entières, les valeurs de l'intervalle $[0, x]$ prises par $N(t)$ sont les entiers en bleu.
  On retrouve donc bien l'égalité : $[N(t) \leqslant x] = [N(t) \leqslant n]$.
  Notons qu'on a même :
  $$[N(t) \leqslant x] \ = \ \bigcup_{k=0}^{n} \ [N(t) = k]$$
- L'événement $[N(t) \leqslant n]$ étant difficile à traduire dans notre cas, on a privilégié l'étude de l'événement $[N(t) \geqslant n]$.
- On a ensuite obtenu la loi de $N(t)$ en exploitant une égalité entre événements classiques pour les v.a.r. à valeurs entières :
  $$[N(t) \geqslant n] \ = \ [N(t) = n] \cup [N(t) \geqslant n+1])$$

□

b) Donner une estimation « naturelle » du nombre moyen de pannes dans l'intervalle $[0, t[$.

Démonstration.

- La v.a.r. $N(t)$ correspond au nombre de pannes dans l'intervalle $[0, t]$. Le nombre moyen de panne dans l'intervalle $[0, t]$ est donc $\mathbb{E}\big(N(t)\big) = \lambda\, t$ (car $N(t) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, t)$ d'après la question précédente). On cherche donc une estimation « naturelle » de $\mathbb{E}\big(N(t)\big)$.
- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de $\mathbb{E}\big(N(t)\big)$ est :
  × de simuler un grand nombre de fois (notons M ce grand nombre) la v.a.r. $N(t)$.
  Formellement, on souhaite obtenir un M-uplet $\big(n_1(t), \dots, n_M(t)\big)$ qui correspond à l'observation d'un M-échantillon $\big(N_1(t), \dots, N_M(t)\big)$ de la v.a.r. $N(t)$.
  (les v.a.r. $N_i(t)$ sont indépendantes et de même loi que $N(t)$)
  × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \ = \ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} n_i(t) \ \simeq \ \mathbb{E}\big(N(t)\big)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une estimation naturelle du nombre moyen de pannes dans l'intervalle } [0,t[\\ \text{est donc } \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{M} n_i(t), \text{ où } \big(n_1(t),\dots,n_M(t)\big) \text{ est l'observation} \\ \text{d'un } M\text{-échantillon } \big(N_1(t),\dots,N_M(t)\big) \text{ de la var } N(t).\end{array}}$$

□

7. L'objectif de cette question est de déterminer un intervalle de confiance asymptotique du paramètre inconnu $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$.

a) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et soit t_1 et t_2 deux réels vérifiant $\Phi(t_1) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$ et $\Phi(t_2) = \dfrac{\alpha}{2}$. Montrer : $t_2 = -t_1$.

Démonstration.

- Démontrons que la fonction Φ est bijective sur $\mathbb{R}$.
La fonction Φ est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$, en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité,
  - × strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
En effet, la fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une primitive de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(x) \ = \ \varphi(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \ > \ 0$$

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $\Phi(]-\infty,+\infty[)$ où :

$$\Phi(]-\infty,+\infty[) \ = \ \left]\lim_{x\to-\infty} \Phi(x), \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)\right[\ = \ ]0,1[$$

où la dernière égalité est obtenue car Φ est une fonction de répartition.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Phi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0,1[.}$$

- Comme Φ est bijective sur $\mathbb{R}$:

$$t_2 = -t_1 \ \Leftrightarrow \ \Phi(t_2) = \Phi(-t_1)$$

On cherche donc à calculer $\Phi(-t_1)$.

- Par propriété de Φ :

$$\Phi(-t_1) \ = \ 1-\Phi(t_1) \ = \ \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{\alpha}{2}\right) \ = \ \frac{\alpha}{2} \ = \ \Phi(t_2)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } t_2 = -t_1.}$$

Commentaire

- Il est toujours bon de garder en tête que la fonction Φ est bijective. C'est une propriété que l'on utilise fréquemment dans le contexte de l'estimation.
- On pourrait par exemple également s'en servir pour démontrer que les réels t_1 et t_2 existent et sont uniques. En effet :
  - × la fonction Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$,
  - × $1 - \dfrac{\alpha}{2} \in \,]0,1[$, car $\alpha > 0$.

  On en déduit qu'il existe un unique $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que : $\Phi(t_1) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
  Comme $\dfrac{\alpha}{2} \in \,]0,1[$, on démontre de même qu'il existe un unique $t_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $\Phi(t_2) = \dfrac{\alpha}{2}$.

□

b) On pose : $R_n = \sqrt{n}\,\left(\lambda\,\overline{X}_n - 1\right)$. Justifier que la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Démonstration.
On cherche ici à appliquer le théorème central limite. On commence donc par déterminer $\overline{X}_n^*$ et on souhaite relier cette v.a.r. à la v.a.r. R_n de l'énoncé.

- Comme la v.a.r. $\overline{X}_n$ admet une variance non nulle d'après ***2.***, la v.a.r. $\overline{X}_n^*$ est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}
\overline{X}_n^* &= \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}} \\
&= \frac{\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2\,n}}} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.}}\textit{)} \\
&= \frac{\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda\sqrt{n}}} \\
&= \lambda\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \\
&= \sqrt{n}\,(\lambda\,\overline{X}_n - 1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \overline{X}_n^* = R_n.}$$

- La suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. :
  - × indépendantes,
  - × de même loi,
  - × qui admettent une variance non nulle $\dfrac{1}{\lambda^2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème central limite : } R_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z, \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

□

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]) = 1-\alpha$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]) &= \mathbb{P}([-t_1 \leqslant Z \leqslant t_1]) \\ &= \Phi(t_1) - \Phi(-t_1) && \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\textit{)} \\ &= \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\ &= 1-\alpha\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]) = 1-\alpha.}$$

□

d) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On comme par chercher à exprimer l'encadrement de l'événement $[-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]$ comme un encadrement de $\dfrac{1}{\lambda}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]) &= \mathbb{P}\big(\big[-t_1 \leqslant \sqrt{n}\,(\lambda\,\overline{X}_n - 1) \leqslant t_1\big]\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[-\frac{t_1}{\sqrt{n}} \leqslant \lambda\,\overline{X}_n - 1 \leqslant \frac{t_1}{\sqrt{n}}\right]\right) && \textit{(car } \sqrt{n} > 0\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1-\frac{t_1}{\sqrt{n}} \leqslant \lambda\,\overline{X}_n \leqslant 1+\frac{t_1}{\sqrt{n}}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{1-\frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1+\frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n}\right]\right)\end{aligned}$$

  La dernière égalité est vérifiée car : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$. Ainsi : $\overline{X}_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$).

- On souhaite maintenant composer par la fonction inverse mais on ne connaît pas le signe des quantités $1-\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}$ et $1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}$. Déterminons le.
  × Tout d'abord :
  $$1-\frac{t_1}{\sqrt{n}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \frac{t_1}{\sqrt{n}}$$
  Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_1}{\sqrt{n}} = 0$, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant n_1$, $1 > \dfrac{t_1}{\sqrt{n}}$.
  × De même :
  $$1+\frac{t_1}{\sqrt{n}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > -\frac{t_1}{\sqrt{n}}$$
  Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{t_1}{\sqrt{n}} = 0$, alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant n_2$, $1 > -\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}$.

  On note : $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$:
  $$1-\frac{t_1}{\sqrt{n}} > 0 \qquad \text{et} \qquad 1+\frac{t_1}{\sqrt{n}} > 0$$

Commentaire

On a ainsi déterminé le signe des quantités $1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}$ et $1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}$ **à partir d'un certain rang**. Ce qui nous suffit pour cette question puisqu'on ne cherche pas démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]) \;=\; \mathbb{P}\left(\left[\frac{\overline{X}_n}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{1}{\lambda} \geqslant \frac{\overline{X}_n}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]\right) \qquad (*)$$

mais :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\overline{X}_n}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{1}{\lambda} \geqslant \frac{\overline{X}_n}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]\right)$$

Il suffit donc que l'égalité $(*)$ soit vraie dans un voisinage de $+\infty$ (et non pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

- Soit $n \geqslant n_0$. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]) \;&=\; \mathbb{P}\left(\left[\frac{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n}\right]\right) \\ &=\; \mathbb{P}\left(\left[\frac{\overline{X}_n}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{1}{\lambda} \geqslant \frac{\overline{X}_n}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]\right) \quad \text{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\text{)}\end{aligned}$$

- On en déduit, d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\overline{X}_n}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{\overline{X}_n}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]\right) \;=\; 1 - \alpha$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intervalle } \left[\frac{\overline{X}_n}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \;;\; \frac{\overline{X}_n}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right] \text{ est un intervalle de confiance asymptotique de } \frac{1}{\lambda} \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha.}$$

□

e) Que se passe-t-il lorsque α est proche de 0 ou lorsque α est proche de 1 ?

Démonstration.

- Si α est proche de 0, alors :
  - × Tout d'abord :

$$\Phi(t_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ est proche de 1 et } 1 = \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)$$

  Par bijectivité de Φ, on en déduit que t_1 est proche de $+\infty$.

  - × Si on reprend les calculs de la question précédente, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n}\right]\right) = 1 - \alpha$$

  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n}\right]\right)$ est proche de 1.

× Or t_1 est proche de $+\infty$. Ainsi l'intervalle de confiance asymptotique de λ : $\left[\dfrac{1-\frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n} \ ; \ \dfrac{1+\frac{t_1}{\sqrt{n}}}{\overline{X}_n}\right]$ est proche de $]-\infty,+\infty[$.
On en déduit que, si α est proche de 0, un intervalle de confiance de λ au niveau de confiance (proche) de 1 est $]-\infty,+\infty[$.

On en conclut que si α est proche de 0, le niveau de confiance est proche de 1 (donc très élevé), mais l'intervalle de confiance est inutile car trop imprécis.

- Si α est proche de 1, alors :

× Tout d'abord :

$$\Phi(t_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ est proche de } \frac{1}{2}, \text{ et } \frac{1}{2} = \Phi(0)$$

Par bijectivité de Φ, on en déduit que t_1 est proche de 0.

× D'après la question précédente, l'intervalle $\left[\dfrac{\overline{X}_n}{1+\frac{t_1}{\sqrt{n}}} \ ; \ \dfrac{\overline{X}_n}{1-\frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

× Or t_1 est proche de . Ainsi l'intervalle $\left[\dfrac{\overline{X}_n}{1+\frac{t_1}{\sqrt{n}}} \ ; \ \dfrac{\overline{X}_n}{1-\frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]$ est proche de $\{\overline{X}_n\}$.

On en déduit que, si α est proche de 1, un intervalle de confiance de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance (proche) de 0 est $\{\overline{X}_n\}$.

On en conclut que si α est proche de 1, l'intervalle de confiance est très précis (réduit à un singleton), mais de niveau de confiance trop faible (proche de 0) pour être exploitable.

Commentaire

On propose ici une interprétation possible des résultats obtenus lorsque α est proche de 1 ou 0. Toute interprétation pertinente permet assurément d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.

□

f) Pour $\alpha = 0,05$, on donne : $t_1 \simeq 2$. Montrer qu'avec l'échantillon de la question ***5.d)***, la réalisation de l'intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance 0,95 est : $\big[833, 1250\big]$.

Démonstration.
D'après la question ***5.d)***, pour $n = 100$: $\sum\limits_{i=1}^{100} x_i = 10^5$.
D'après la question ***7.d)***, l'intervalle $\left[\dfrac{\overline{X}_n}{1+\frac{t_1}{\sqrt{n}}} \ ; \ \dfrac{\overline{X}_n}{1-\frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]$ est un intervalle de confiance

asymptotique de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1-\alpha$. Or

- $\dfrac{\overline{x}_{100}}{1+\frac{t_1}{\sqrt{100}}} \simeq \dfrac{10^5}{100} \times \dfrac{1}{1+\frac{2}{10}} \simeq 10^3 \times \dfrac{1}{\frac{5}{5}+\frac{1}{5}} \simeq 10^3 \times \dfrac{5}{6} \simeq 833$

- $\dfrac{\overline{x}_{100}}{1-\frac{t_1}{\sqrt{100}}} \simeq \dfrac{10^5}{100} \times \dfrac{1}{1-\frac{2}{10}} \simeq 10^3 \times \dfrac{1}{\frac{5}{5}-\frac{1}{5}} \simeq 10^3 \times \dfrac{5}{4} \simeq 1250$

$$\boxed{\text{Ainsi, la réalisation de l'intervalle de confiance asymptotique de } \frac{1}{\lambda} \text{ de la question } \textbf{\textit{7.d)}} \text{ au niveau de confiance 95\% est } [833,\ 1250].}$$ □

Partie III. Un résultat asymptotique

Les notations et le contexte sont ceux des parties précédentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = M_n - \frac{1}{\lambda}\ \ln(n)$ et on note F_{T_n} la fonction de répartition de T_n.

8. a) Montrer que pour tout x réel, on a : $F_{T_n}(x) = \left(F_X\left(x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right)\right)^n$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_{T_n}(x) & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[M_n - \frac{1}{\lambda}\ \ln(n) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[M_n \leqslant x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right]\right) & \\ & = & F_{M_n}\left(x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} F_{X_i}\left(x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right) & \textit{(avec le même raisonnement qu'en } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\ & = & \left(F_X\left(x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right)\right)^n & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \left(F_X\left(x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right)\right)^n.}$$ □

b) Pour chaque réel x fixé, déterminer un entier naturel N_x (qui dépend de x) tel que pour tout entier $n \geqslant N_x$, on a : $x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n) > 0$.

En déduire que pour tout entier $n \geqslant N_x$, on a : $F_X\left(x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{n}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n) & \Leftrightarrow & \frac{1}{\lambda}\ \ln(n) > -x & \\ & \Leftrightarrow & \ln(n) > -\lambda\, x & \textit{(car } \lambda > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n > \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On pose } N_x = \lceil \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \rceil. \\ \text{D'après les équivalences précédentes : } \forall n \geqslant N_x,\ x + \frac{1}{\lambda}\ \ln(n) > 0.\end{array}}$$

- Soit $n \geqslant N_x$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} F_X\left(x + \dfrac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right) & = & 1 - \exp\left(-\lambda\ \left(x + \dfrac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right)\right) \quad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } x + \dfrac{1}{\lambda}\ \ln(n) > 0\textit{)} \\ & = & 1 - \exp\big(-\lambda\, x - \ln(n)\big) \\ & = & 1 - \dfrac{\exp(-\lambda\, x)}{\exp\big(\ln(n)\big)} \\ & = & 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{n} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant N_x,\ F_X\left(x + \dfrac{1}{\lambda}\ \ln(n)\right) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{n}.}$$

□

c) Montrer que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après les questions ***8.a)*** et ***8.b)*** :

$$\forall n \geqslant N_x,\ \ F_{T_n}(x) = \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{n}\right)^n = \exp\left(n\ \ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{n}\right)\right)$$

- Or, comme $\lim\limits_{n \to +\infty}\ -\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{n} = 0$, on obtient : $\ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{n}$. Ainsi :

$$n\ \ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \cancel{n} \times \left(-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{\cancel{n}}\right) = -\mathrm{e}^{-\lambda\, x}$$

- Par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, et donc en $-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}$, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \exp\left(n\ \ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda\, x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right).}$$

□

9. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : $F(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$.

a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

Démonstration.

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $F = h_2 \circ h_1$ où :
  × $h_1 : x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\, x}$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
    - telle que : $h_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

  × $h_2 : x \mapsto \exp(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F est dérivable (car de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$F'(x) \ = \ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) \ > \ 0$$
  La fonction F est donc strictement croissante.
- On en déduit que la fonction F est :
  × continue (car de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$,
  × strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi, F réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $F(]-\infty, +\infty[)$ où :
  $$F(]-\infty, +\infty[) \ = \left] \lim_{x \to -\infty} F(x), \lim_{x \to +\infty} F(x) \right[=]0, 1[$$
- Détaillons la dernière égalité.
  × Comme $\lambda > 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda\, x} = -\infty$.
  On en déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
  × Comme $\lambda > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda\, x} = 0$.
  Par continuité de la fonction exp en 0, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) = \mathrm{e}^0 = 1$, *i.e.* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } F \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0,1[.}$$

□

b) En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera ; on dit que T *suit la loi de Gumbel de paramètre* λ.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction F est :
  × continue à droite en tout point, car de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
  × croissante sur $\mathbb{R}$,
  × telle que : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } F \text{ est une fonction de répartition.}}$$

- De plus la fonction F est :
  × continue (car de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$,
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points (elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier).

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité notée } T.}$$

- On obtient une densité f_T en dérivant F sur l'intervalle **ouvert** $]-\infty, +\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :
  $$f_T(x) \ = \ F(x) \ = \ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)$$
  La fonction f_T est bien continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Une densité } f_T \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ est : } f_T : x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right).}$$

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1) F est continue à droite en tout point,
  2) F est croissante sur $\mathbb{R}$,
  3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
  4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ***1.***, ***2.***, ***3.*** et ***4.*** peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- À l'époque de ce sujet, la caractérisation ci-dessus était inscrite dans le programme (ce n'est plus le cas). Cependant, son utilisation semble toujours apparaître aux concours. Plus précisément, elle semble nécessaire pour traiter des questions portant sur la convergence en loi (*cf* question suivante) présentes dans les sujets `EML 2016` et `2017`. Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus.

□

c) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la variable aléatoire T.

Démonstration.
D'après la question ***8.c)*** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) = F(x)$$

Or, d'après la question précédente, F est la fonction de répartition de T.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers la v.a.r. } T.}$$

□

10. a) Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(T)$ de la variable aléatoire T.

Démonstration.

- La v.a.r. T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_T(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f_T(x)\, dx$.
- La fonction $x \mapsto x\, f_T(x)$ est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_T(x)\, dx$ est donc impropre à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$.
  Démontrons alors que les intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f_T(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\, f_T(x)\, dx$ sont convergentes.
- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f_T(x)\, dx$ est convergente.
  × Tout d'abord :
  $$x\, f_T(x) = x\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x} \times 1$$
  × De plus : $\forall x \in [0, +\infty[, \; x\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x} \geqslant 0$.

× L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,dx$ est convergente car la v.a.r. X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} x\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,dx \quad \textit{(par définition de } f\textit{)}\end{aligned}$$

Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,f_T(x)\,dx$ est convergente.

Commentaire

- On pouvait également utiliser plutôt un critère de négligeabilité en utilisant l'argumentation suivante :
  - × Tout d'abord : $\forall x \in [1, +\infty[$, $x\,f_T(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$
  - × Ensuite : $x\,f_T(x) = \lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,\exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\right) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. En effet :

    $$\frac{x\,f_T(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lambda\,x^3\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,\exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

  - × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ est convergente.
  Enfin, comme la fonction $x \mapsto x\,f_T(x)$ est continue sur le **segment** $[0, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\,f_T(x)\,dx$ est bien définie.
- La méthode utilisant les v.a.r. à densité est plus subtile et demande plus d'initiative (utilisation de la v.a.r. X). Mais cet effort d'avère payant puisque la résolution de la question est alors plus rapide et élégant (il est inutile de traiter à part la convergence de l'intégrale sur le segment $[0, 1]$).
  Il fallait donc ici privilégier cette méthode (ce qui n'empêche pas de savoir utiliser la négligeabilité comme présenté ci-dessus !).
- De manière générale, en présence d'intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,dx$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\,dx$, avec $\lambda > 0$, on penser toujours à faire apparaître les moments d'ordre 1 et 2 d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ (notamment lors des oraux HEC ou des sujets TOP3 où la rapidité et l'efficacité dans la résolution des exercices jouent un rôle important).

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\, f_T(x)\ dx$ est convergente.

  × **Sous réserve de convergence**, on effectue le changement de variable $\boxed{t = -x}$.

  $$\left|\begin{array}{l} t = -x \quad \text{(et donc } x = -t) \\ \hookrightarrow dt = -dx \\ \bullet\ x = -\infty \ \Rightarrow\ t = +\infty \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ t = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\varphi : t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
  On obtient alors :

  $$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\, f_T(x)\ dx & = & \lambda \displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)\ dx \\ & = & \lambda \displaystyle\int_{+\infty}^{0} (-t)\, \mathrm{e}^{-\lambda\times(-t)} \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\times(-t)}\right) (-\ dt) \\ & = & -\lambda \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda\, t}\right)\ dt \end{array}$$

  × Démontrons maintenant que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda\, t}\right)\ dt$ est convergente.
  Ceci permettra de lever la réserve de convergence posée dans le point précédent, rendant le changement de variable affine valide et démontrant la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\, f_T(x)\ dx$.

  - Tout d'abord : $\forall t \in [1, +\infty[$, $t\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda\, t}\right) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$
  - Ensuite : $t\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda\, t}\right) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

    En effet, pour tout $t \in [1, +\infty[$: $\dfrac{t\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda\, t}\right)}{\frac{1}{t^2}} = t^3\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda\, t}\right)$.

    Or, en posant le changement de variable $u = \mathrm{e}^{\lambda\, t}$:

    $$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^3\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda\, t}\right) & = & \displaystyle\lim_{u\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(u)}{\lambda}\right)^3 u\, \mathrm{e}^{-u} \\ & = & \displaystyle\lim_{u\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda^3}\, \dfrac{\big(\ln(u)\big)^3\, u}{\mathrm{e}^{u}} \\ & = & \displaystyle\lim_{u\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda^3}\, \dfrac{\big(\ln(u)\big)^3}{\mathrm{e}^{\frac{u}{2}}}\, \dfrac{u}{\mathrm{e}^{\frac{u}{2}}} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)} \end{array}$$

  - L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\ dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2 > 1)$.

  Par critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda\, t}\right)\ dt$ est convergente.

Commentaire

On aurait en fait pu utiliser directement les croissances comparées pour affirmer : $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{\big(\ln(u)\big)^3\, u}{\mathrm{e}^u} = 0$.
En effet, la divergence de la fonction exp vers $+\infty$ est « plus rapide » que celle de toute fonction polynomiale (ici $u \mapsto u$) et toute fonction polynomiale en ln (ici $u \mapsto \big(\ln(u)\big)^3$). Elle est donc en particulier plus rapide que celle du produit de deux telles fonctions (ici $u \mapsto \big(\ln(u)\big)^3\, u$).

× Enfin, la fonction $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)$ est continue sur le **segment** $[0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)$ est donc bien définie.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \exp\left(-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)\, dt$ est convergente, et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\, f_T(x)\, dx$ également.

On en déduit la v.a.r. T admet une espérance.

Commentaire

- Le programme officiel précise que « les changements de variables non affines ne seront pratiqués qu'avec des intégrales sur un segment ». Il est donc autorisé, **sous réserve de convergence**, d'effectuer un changement de variable affinie sur une intégrale généralisée.
- Dans ce point, l'objectif est justement de démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\, f(x)\, dx$. C'est pourquoi on effectue le changement de variable **sous réserve de convergence**. On lève cette réserve à l'aide du critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives.
  On pouvait également procéder en effectuant le changement de variable sur l'intégrale $\displaystyle\int_A^0 x\, f(x)\, dx$ où $A \in\,]-\infty, 0]$, qui est cette fois une intégrale sur un segment.
- On pensera à utiliser un changement de variable affine pour se ramener d'une intégrale impropre en $-\infty$ ou en un réel non nul à une intégrale impropre en $+\infty$ ou en 0. En effet, les intégrales de référence au programme sont toutes des intégrales impropres en 0 ou en $+\infty$. Par exemple, pour démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$, on procèderait comme suit :
  1) on démontre la continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ sur $[0,1[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$ est donc seulement impropre en 1 (qui n'est ni 0 ni $+\infty$).
  2) **sous réserve de convergence**, on effectue le changement de variable $\boxed{t = 1-x}$.
     On se ramène ainsi à l'étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$ seulement impropre en 0.
  3) on démontre ensuite la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$.
     Ceci permet de lever la réserve de convergence posée dans le point précédent, rendant le changement de variable affine valide et démontrant la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

□

b) On pose : $Z = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(\lambda\, X)$. Montrer que les variables aléatoires Z et T sont de même loi.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll}
F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(\lambda\, X) \leqslant x\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}([\ln(\lambda\, X) \geqslant -\lambda\, x]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\lambda\, X \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[X \geqslant \dfrac{1}{\lambda}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right]\right) & \\
& = & 1 - F_X\left(\dfrac{1}{\lambda}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) & \textit{(car la v.a.r. } X \textit{ est à densité)} \\
& = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \exp\left(-\cancel{\lambda} \times \left(\dfrac{1}{\cancel{\lambda}}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)\right)\right) & \textit{(car } \dfrac{1}{\lambda}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x} > 0\textit{)} \\
& = & \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) \ = \ F(x) &
\end{array}$$

Les v.a.r. T et Z ont donc même fonction de répartition.
Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{On en conclut que les v.a.r. } Z \text{ et } T \text{ ont même loi.}}$$

Commentaire

- Cette question consiste à déterminer la loi de Z, transformée de la v.a.r. X. Ce type de question est extrêmement fréquent dans les sujets traitant de v.a.r. à densité. La résolution de ce type de question ne présente aucune difficulté majeure. Il s'agit simplement de se référer à la rédaction usuelle.
- En particulier, il faut savoir déterminer la loi d'une transformée affine, du carré et de la partie entière d'une v.a.r. à densité X. Cela fait partie du bagage culturel mathématique nécessaire avant d'affronter les écrits de concours.
- Il faut ajouter à ce bagage la détermination de la loi du minimum et du maximum de v.a.r. à densité indépendantes. Il suffit une nouvelle fois de mettre en place la rédaction usuelle associée à ce type de questions.

□

c) Justifier l'égalité : $\mathbb{E}(T) = -\dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \ln(t)\ dt$.

Démonstration.

- D'après la question ***10.a)***, la v.a.r. T admet une espérance.
  Or, d'après la question précédente, les v.a.r. T et Z ont même loi. On en déduit que la v.a.r. Z admet aussi une espérance et :
  $$\mathbb{E}(T) \ = \ \mathbb{E}(Z)$$

- De plus, comme $Z = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(\lambda\, X)$, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(Z) \ = \ \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda}\ \ln(\lambda\, x)\, f_X(x)\, dx \ = \ -\frac{1}{\lambda}\ \int_0^{+\infty} \ln(\lambda\, x)\, \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx \ = \ -\int_0^{+\infty} \ln(\lambda\, x)\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx$$

On effectue alors le changement de variable affine $\boxed{t = \lambda\, x}$.
(ce changement de variable affine est autorisé car les intégrales en présence convergent)

$$\left|\begin{array}{l} t = \lambda\, x \quad \text{(et donc } x = \dfrac{1}{\lambda}\ t) \\ \hookrightarrow dt = \lambda\ dx \quad \text{ et } \quad dx = \dfrac{1}{\lambda}\ dt \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ t = 0 \\ \bullet\ x = +\infty \ \Rightarrow\ t = +\infty \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\lambda}\ t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \ln(\lambda\, x)\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\ dx \ = \ \int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{\lambda}\ dt\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Z) = -\frac{1}{\lambda}\ \int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\ dt.}$$

□

d) À l'aide de la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, établir l'inégalité : $\mathbb{E}(T) \geqslant 0$.

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{array}{rcl} y & = & g(1) + g'(1)\,(x-1) \\ & = & \ln(1) + \dfrac{1}{1}\ (x-1) \ = \ x - 1 \end{array}$$

On en déduit :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ln(x) \leqslant x - 1$$

- Soit $t \in\ ]0, +\infty[$.

$$\ln(t) \leqslant t - 1$$

$$\begin{array}{ll} \text{donc} & -\ln(t)\, \mathrm{e}^{-t} \geqslant -(t-1)\, \mathrm{e}^{-t} \quad (\mathit{car}\ -e^{-t} < 0) \\ \text{d'où} & -\ln(t)\, \mathrm{e}^{-t} \geqslant \mathrm{e}^{-t} - t\, \mathrm{e}^{-t} \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant et les intégrales en présence étant convergentes (démontré plus bas) :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^{+\infty} -\ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} - t\, \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle -\int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\ dt & & \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt - \int_0^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{-t}\ dt \end{array}$$

- Détaillons la convergence des intégrales à droite de l'inégalité :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente car $f_V : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in\,]-\infty, 0] \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in\,]0, +\infty[\end{cases}$ est une densité de la variable V, où $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. De plus :
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)\, dt \;=\; 1$$
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente car la v.a.r. V admet une espérance. De plus :
$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_V(t)\, dt \;=\; \mathbb{E}(V) \;=\; 1$$
- On en déduit :
$$-\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\, dt \;\geqslant\; 1 - 1 = 0$$
  Comme $\lambda > 0$:
$$-\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\, dt \;\geqslant\; 0$$

$$\boxed{\text{D'après la question précédente, on en déduit : } \mathbb{E}(T) \geqslant 0.}$$

□

11. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.

a) Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.

Démonstration.

- On sait déjà d'après la question ***9.a)*** que la fonction F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in\,]0,1[$.

$$\begin{array}{rcll} y = F(x) & \Leftrightarrow & y = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) & \textit{(car dans cette question } \lambda = 1\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln(y) = -\mathrm{e}^{-x} & \textit{(par bijectivité de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -\ln(y) = \mathrm{e}^{-x} & \\ & \Leftrightarrow & \ln\big(-\ln(y)\big) = -x & \\ & \Leftrightarrow & -\ln\big(-\ln(y)\big) = x & \\ & \Leftrightarrow & F^{-1}(y) = x & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } G : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln\big(-\ln(x)\big) \end{array}.}$$

□

b) On considère le programme **Scilab** suivant :

```
x = linspace(-2, 2, 400) ;
y = (exp(-exp(-x))) ;
plot(x, y) , plot(y, x)
```

(i) Le réel 0 fait-il partie des nombres renvoyés par la commande `x=linspace(-2, 2, 400)` ?

Démonstration.

- La commande `linspace(-2, 2, 400)` crée un vecteur de `400` éléments régulièrement espacés entre `-2` et `2`. Tout élément de ce vecteur d'écrit donc sous la forme :

$$-2 + k \times pas$$

où $k \in [\![0, 399]\!]$ et $pas = \dfrac{2-(-2)}{399} = \dfrac{4}{399}$.
En effet, le vecteur contient 400 points régulièrement espacés. Cela correspond à découper l'intervalle $[-2, 2]$ en 399 sous-intervalles.

- La question consiste donc à savoir si l'entier 0 peut s'écrire sous cette forme. Or :

$$-2 + k \times pas = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \times pas = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2 \times \frac{399}{4} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{399}{2}$$

Le réel $\dfrac{399}{2}$ n'étant pas un entier, 0 n'est pas un élément du vecteur créé par la commande `linspace(-2, 2, 400)`.

□

(ii) Quel sera le résultat de l'exécution de ce programme ?

Démonstration.

- La commande `plot(x,y)` permet d'effectuer le tracé de la courbe d'équation $y = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$.
Ce tracé s'effectue point à point.
Le vecteur `x` contient les abscisses des points tracés.
Le vecteur `y` contient les ordonnées correspondantes.
- La commande `plot(y,x)` permet aussi d'effectuer un tracé.
Par rapport à la commande précédente, les rôles de `x` et de `y` ont été permutés.
Graphiquement, cela correspond à effectuer une symétrie d'axe $y = x$.

Le résultat de l'exécution de ce programme est donc un tracé point à point des courbes représentatives des fonctions F et G.

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec précision la réponse à cette question. Cependant, fournir la bonne réponse démontre la bonne compréhension de l'algorithme et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question. On procèdera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

Démonstration.
On commence par noter : $W = G(U)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_W(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[F\big(G(U)\big) \leqslant F(x)\right]\right) & \textit{(car la fonction } F \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}([U \leqslant F(x)]) & \textit{(car } F = G^{-1}\textit{)} \\ & = & F_U\big(F(x)\big) & \\ & = & F(x) & \textit{(car, d'après } \textbf{\textit{8.a)}} \textit{ : } F(x) \in \,]0,1[\textit{)} \end{array}$$

Les v.a.r. W et T ont donc même fonction de répartition.
Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{On en conclut que } W = G(U) \text{ et } T \text{ ont même loi.}}$$

Commentaire

- Rappelons que la v.a.r. $G(U)$ est par définition l'application :

$$\begin{array}{rccc} G(U) : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & G\big(U(\omega)\big) \end{array}$$

Comme la fonction G est définie uniquement sur $]0,1[$, la v.a.r. $G(U)$ est bien définie seulement si :

$$\forall \omega \in \Omega, \ U(\omega) \in \,]0,1[$$

Autrement dit, il est primordial, pour la bonne définition de l'objet $G(U)$, de considérer que U est à valeurs dans $]0,1[$.

- Cette question est une application directe de la **méthode d'inversion** vue en TP. Elle a également était traitée en cours pour démontrer le résultat classique suivant : si U est une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors la v.a.r. $W = -\frac{1}{\lambda} \ \ln(1-U)$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

□

d) Établir l'inégalité : $\mathbb{E}(T) \leqslant 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***10.a)***, la v.a.r. T admet une espérance.
Or, d'après la question précédente, les v.a.r. T et $W = G(U)$ one même loi. On en déduit que la v.a.r. W admet aussi une espérance et :

$$\mathbb{E}(T) \ = \ \mathbb{E}(W)$$

- De plus, comme $W = G(U)$, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(W) \ = \ \int_0^1 G(x) \, f_U(x) \ dx \ = \ \int_0^1 -\ln\big(-\ln(x)\big) \times 1 \ dx$$

- Soit $x \in \,]0,1[$.
  Par concavité de ln sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{array}{lll} & \ln(x) \leqslant x-1 & \\ \text{donc} & -\ln(x) \geqslant 1-x & \\ \text{d'où} & \ln\big(-\ln(x)\big) \geqslant \ln(1-x) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{ainsi} & -\ln\big(-\ln(x)\big) \leqslant -\ln(1-x) & \end{array}$$

  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 < 1$) et les intégrales en présence étant convergentes (démontré plus bas) :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^1 -\ln\big(-\ln(x)\big)\,dx & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 -\ln(1-x)\,dx \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{E}(W) & & \displaystyle -\int_0^1 \ln(1-x)\,dx \end{array}$$

- Détaillons la convergence de l'intégrale à droite de l'inégalité.
  D'après ***3.b)***, la v.a.r. M_1 admet une espérance. De plus :
  - × d'une part, d'après ***3.d)*** : $\mathbb{E}(M_1) = -\dfrac{1}{1}\displaystyle\int_0^1 x^{1-1}\ln(1-x)\,dx = -\int_0^1 \ln(1-x)\,dx$.
    (on rappelle que, dans cette question : $\lambda = 1$)
  - × d'autre part, d'après ***3.f)*** : $\mathbb{E}(M_1) = \dfrac{1}{1}\,u_1 = 1$.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(1-x\,dx$ est convergente et :

$$-\int_0^1 \ln(1-x)\,dx \ = \ 1$$

- On en conclut :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(W) & \leqslant & \displaystyle -\int_0^1 \ln(1-x)\,dx \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{E}(T) & & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) \leqslant 1}$$

□

e) Par une méthode de votre choix, écrire en **Scilab** les commandes qui permettent de simuler la loi de T.

Démonstration.

- Méthode 1 : utilisation de la question ***10.b)***
  On propose la fonction **Scilab** suivante :

```
function t = SimuT()
    x = grand(1, 1, 'exp', 1)
    t = -log(x)
endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

× **Début de la fonction**

On commence par préciser la structure de la fonction :

- cette fonction se nomme `SimuT`,
- elle ne prend pas de paramètre en entrée,
- elle admet pour variable de sortie la variable `t`

```
1 function t = SimuT()
```

× **Contenu de la fonction**

En ligne 2, on stocke dans la variable `x` une simulation d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(1)$.

```
2       x = grand(1, 1, 'exp', 1)
```

D'après la question ***10.b)***, la v.a.r. $Z = -\ln(X)$ suit la même loi que T, dès lors que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(on rappelle encore une fois que, dans cette question : $\lambda = 1$)

Ainsi, en ligne 3, on stocke dans la variable `t` une simulation de la v.a.r. T.

```
3       t = -log(x)
```

- Méthode 2 : utilisation de la question ***11.c)***

On propose la fonction **Scilab** suivante :

```
1 function t = SimuT()
2       u = rand()
3       t = -log( -log(x) )
4 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

× **Début de la fonction**

On commence par préciser la structure de la fonction :

- cette fonction se nomme `SimuT`,
- elle ne prend pas de paramètre en entrée,
- elle admet pour variable de sortie la variable `t`

```
1 function t = SimuT()
```

× **Contenu de la fonction**

En ligne 2, on stocke dans la variable `u` une simulation d'une v.a.r. de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$.

```
2       u = rand()
```

D'après la question ***11.c)***, la v.a.r. $W = -\ln\big(-\ln(U)\big)$ suit la même loi que T, dès lors que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$.

Ainsi, en ligne 3, on stocke dans la variable `t` une simulation de la v.a.r. T.

```
3       t = -log( -log(x) )
```

$\square$

f) Écrire en **Scilab** les commandes qui permettent de renvoyer une valeur numérique approchée de $\mathbb{E}(T)$ en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

Démonstration.

- L'idée naturelle, qu'est la méthode de Monte-Carlo, pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(T)$ est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10000$ sera ici ce grand nombre) la v.a.r. T. Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(t_1, \dots, t_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(T_1, \dots, T_N)$ de la v.a.r. T.
    (les v.a.r. T_i sont indépendantes et de même loi que T)
  - × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \simeq \mathbb{E}(T)$$

- On propose alors le programme **Scilab** suivant :

```
1  N = 10000
2  T = zeros(1,N)
3  for k = 1:N
4      T(k) = SimuT()
5  end
6  E = mean(T)
7  disp(E)
```

  Détaillons les éléments de ce script.

  × **Début du programme**
  La ligne 1 permet de stocker dans la variable `N` le nombre de réalisations souhaitées, ici 10000.

```
1  N = 10000
```

  La ligne 2 permet de stocker dans la variable `T` un vecteur ligne à N colonnes constitué uniquement de 0. On souhaite remplir les coordonnées de ce vecteur avec N simulations de la v.a.r. T. C'est donc ce vecteur `T` qui contiendra le N-uplet d'observations $(t_1, \dots, t_N)$.

```
2  T = zeros(1,N)
```

  × **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 permettent de stocker des les N coordonnées de `T` des simulations de la v.a.r. T, en exploitant la fonction `SimuT` définie dans la question précédente. Pour cela, on met en place une structure itérative (boucle for) :

```
3  for k = 1:N
4      T(k) = SimuT()
5  end
```

  × **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `T` contient une observation du N-échantillon $(T_1, \dots, T_N)$ de la v.a.r. T.
  On calcule alors la moyenne des observations avec la commande `mean` et on stocke ce résultat dans une variable `E`.

```
6  E = mean(T)
```

On finit en renvoyant cette moyenne.

```
7   disp(E)
```

Commentaire

- Un tel niveau d'explication n'est pas attendu aux concours : l'écriture du programme démontre la compréhension de toutes les commandes en question. On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
- On a utilisé en ligne 6 la fonction `mean` prédéfinie en **Scilab**. D'autres solutions sont possibles :
  - × On peut aussi utiliser la fonction `sum` :

```
6   E = sum(T) / N
```

  - × On peut aussi effectuer la somme à l'aide d'une boucle :

```
1   N = 10000
2   T = 0
3   for k = 1:N
4       T = T + SimuT()
5   end
6   E = T / N
```

Toutes ces solutions rapportent sans aucun doute la totalité des points.

□