EML 2015

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.
Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

$$\boxed{\text{Alors la fonction } f_X : x \mapsto \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ est une densité de } X.}$$

$$\boxed{\text{La fonction de répartition de } X \text{ est la fonction } F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, } X \text{ admet une espérance et une variance données par : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.}$$ □

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f_X(x)\, dx$$
car f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
La fonction f_X étant une densité de probabilité, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_X(x)\, dx$ est convergente. Il en est de même de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ car on ne change pas la nature d'une intégrale impropre en multipliant son intégrande par un réel non nul.
- On en déduit alors :
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx \quad \textit{(par définition de } f_X\textit{)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \times 1 \quad \textit{(car } f_X \textit{ est une densité)} \end{aligned}$$
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}}$$

- En raisonnant de même, on démontre que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ est convergente car X admet une espérance.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\, dx & = & \displaystyle\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\, dx & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx & \textit{(par définition de } f_X\textit{)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{\lambda}\times\mathbb{E}(X) \ = \ \frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda} \ = \ \frac{1}{\lambda^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}}$$

□

3. ***a)*** Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1-U)$?

Démonstration.

- Notons $g : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1-x)$. Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} V(\Omega) & = & \big(g(U)\big)\,(\Omega) \\ & = & g\,\big(U(\Omega)\big) \\ & = & g\,\big([0,1[\big) \end{array}$$

Or, comme g est continue et strictement croissante sur $[0,1[$:

$$g\,\big([0,1[\big) = \ [g(0), \lim_{x\to1} g(x)[\ = \ [0,+\infty[$$

En effet :

× $g(0) = -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1) = 0$.

× $\lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1} \ -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1-x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to1}\,\ln(1-x) = -\infty$.

$$\boxed{V(\Omega) \ = \ [0,+\infty[}$$

- Déterminons la fonction de répartition de V.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

× Si $x < 0$, alors $[V \leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [0,+\infty[$. Donc :

$$F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant X]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Si $x \geqslant 0$.

$$\begin{array}{rcll} F_V(x) & = & \mathbb{P}([V \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-U) \geqslant -\lambda x]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \\ & = & F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

La dernière égalité est justifié par les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} 0 \leqslant x < +\infty & \Leftrightarrow & 0 \geqslant -\lambda x > -\infty & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1 = \mathrm{e}^0 \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x} > 0 & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} < 1 & \end{array}$$

- Finalement :

$$F_V : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ.

Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. , donc $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Commentaire

- Cette question est un cas particulier de la question classique consistant à déterminer la loi de la transformée d'une v.a.r. à densité. Il est essentiel de maîtriser la méthodologie de résolution.
- Ici, on est dans un cas encore plus classique puisque la v.a.r. à densité de départ U suit une loi uniforme sur $[0,1[$. On illustre ici la méthode d'inversion : on obtient une v.a.r. V qui suit une loi particulière ($V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$) en écrivant V comme transformée d'une v.a.r. U qui suit la loi uniforme sur $[0,1[$. Ce type de question est fréquent dans les sujets. Et est généralement suivi, comme c'est le cas dans cet énoncé, d'une question de simulation informatique.
  Finalement, la Partie I de cet exercice est constituée en intégralité de questions de cours.

□

b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.

```
function v = simuExp(lambda)
    u = rand()
    v = -(1/lambda) * log(1-u)
endfunction
```

□

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord :

$$[T_n \leqslant x] = [\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \cap \dots \cap [X_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])\big)^n & \\ & = & \big(1 - \mathrm{e}^{-x}\big)^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } x \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = (1 - \mathrm{e}^{-x})^n}$$

□

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

Démonstration.

- Par définition : $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
  Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$ car $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \leqslant 0$, alors $[T_n \leqslant x] = \varnothing$ car $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Ainsi :

$$F_{T_n}(x) = \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × Si $x > 0$. D'après la question ***4.a)*** :

$$F_{T_n}(x) = \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \big(1 - \mathrm{e}^{-x}\big)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{T_n} : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array}\right. .}$$

- Montrons que F_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction F_{T_n} est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que composée $g_2 \circ g_1$ de :
    × $g_1 : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ continue sur $]0,+\infty[$
    et $g_1(]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}$,
    × $g_2 : y \mapsto y^n$ continue sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction F_{T_n} est continue sur $]-\infty,0[$ en tant que fonction constante.
  - On remarque :
$$\lim_{x\to 0^+} F_{T_n}(x) = \left(1-\mathrm{e}^{-0}\right)^n = 0 = F_{T_n}(0) = \lim_{x\to 0^-} F_{T_n}(x)$$
  Donc F_{T_n} est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } F_{T_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Avec le même raisonnement que précédemment, on montre que F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ est une variable à densité.}}$$

- Pour déteminer une densité de T_n, on dérive F_{T_n} sur des intervalles ouverts.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in]-\infty,0[$.
$$f_{T_n}(x) = F_n'(x) = 0 = f_n(x)$$
  × Si $x \in]0,+\infty[$.
$$f_{T_n}(x) = F_n'(x) = n\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = f_n(x)$$
  × On choisit $f_{T_n}(0) = 0 = f_n(0)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est bien une densité de } T_n.}$$

□

5. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- La v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\; dx$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments.
- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\; dx = \int_0^{+\infty} x\, f_n(x)\; dx$$
car f_n est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto x\, f_n(x)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,+\infty[$.
- × Tout d'abord : $x\, f_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
  En effet, pour tout $x > 0$:
$$\frac{x\, f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = x^2\, x\, n\, \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = n\, x^3\, \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$
  Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = 1$.
  De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x} = 0$.
  Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\, f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$, *i.e.* : $x\, f_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

× $\forall x \in [1, +\infty[$, $x\, f_n(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$), donc elle converge.

D'après le critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\, f_n(x)\, dx$ converge.

- De plus, la fonction $x \mapsto x\, f_n(x)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\, f_n(x)\, dx$ est bien définie.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, f_n(x)\, dx$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la v.a.r. } T_n \text{ admet une espérance.}}$$

□

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2.

Démonstration.

- On remarque que : $T_1 = \max(X_1) = X_1$.

$$\boxed{\text{Donc, d'après la question } \textbf{\textit{1.}} : \mathbb{E}(T_1) = 1.}$$

- D'après la question ***2.*** les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\, dx$ converge.
  On peut donc effectuer le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_2) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_2(x)\, dx \;=\; \int_0^{+\infty} 2x\, \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})\, dx & \\[2ex]
& = & 2\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-x}\, dx - 2\int_0^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-2x}\, dx & \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\[2ex]
& = & 2 \times \dfrac{1}{1^2} - 2 \times \dfrac{1}{2^2} & \textit{(d'après le résultat de la question 2.)} \\[2ex]
& = & \dfrac{3}{2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_2) = \frac{3}{2}}$$

□

6. a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
  On obtient alors, pour tout $x > 0$:

$$\begin{array}{rcl}
f'_n(x) & = & -n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} + n(n-1)\mathrm{e}^{-2x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2} \\
& = & n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2}(-(1-\mathrm{e}^{-x}) + (n-1)\mathrm{e}^{-x}) \\
& = & n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2}(n\mathrm{e}^{-x} - 1)
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'_{n+1}(x) = (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}((n+1)\mathrm{e}^{-x} - 1)}$$

- Soit $x > 0$.

$$\begin{array}{rcl} f_{n+1}(x) - f_n(x) & = & (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^n - n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} \\ & = & \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}((n+1)(1-\mathrm{e}^{-x}) - n) \\ & = & \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}(1-(n+1)\mathrm{e}^{-x}) \\ & = & -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0 : f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)}$$

Commentaire

On a ici considéré x dans $\mathbb{R}_+^*$ et non dans $\mathbb{R}_+$. En effet, f_n n'est pas toujours dérivable en 0. Par exemple, f_1 et f_2 ne le sont pas. □

b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $x \mapsto x(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
- Soit $A \geqslant 0$. D'après la question précédente :

$$\int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = -\frac{1}{n+1} \int_0^A x\, f'_{n+1}(x)\ dx$$

On effectue alors une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & \quad & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & f'_{n+1}(x) & \quad & v(x) & = & f_{n+1}(x) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^A x\, f'_{n+1}(x)\ dx & = & -\dfrac{1}{n+1} \left(\Big[\ x\, f_{n+1}(x)\ \Big]_0^A - \displaystyle\int_0^A f_{n+1}(x)\ dx \right) \\ & = & -\dfrac{1}{n+1}\, A\, f_{n+1}(A) + \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^A f_{n+1}(x)\ dx \end{array}$$

- De plus :
  - × la fonction f_{n+1} est une densité de probabilité nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

    Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$ converge (et vaut 1).

    D'où : $\displaystyle\int_0^A f_{n+1}(x)\ dx \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$.

× comme $A \geqslant 0$:

$$A\, f_{n+1}(A) = A \times n \mathrm{e}^{-A}(1-\mathrm{e}^{-A})^n = n \times \frac{A}{\mathrm{e}^{A}} \times (1-\mathrm{e}^{-A})^n \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx$ converge.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx.}$$

□

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***5.a)***, les v.a.r. T_{n+1} et T_n admettent une espérance.

  On en conclut que les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx$ sont (absolument) convergentes.

- On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx \\
&= \int_0^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx - \int_0^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx && \textit{(car } f_n \textit{ et } f_{n+1} \textit{ sont nulles en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\
&= \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx \\
&= \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx && \textit{(d'après la question } \boldsymbol{6.b)}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx && \textit{(car } f_{n+1} \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\
&= \frac{1}{n+1} \times 1 && \textit{(car } f_{n+1} \textit{ est une densité)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{n+1}}$$

- On a donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(T_{k+1}) - \mathbb{E}(T_k) = \dfrac{1}{k+1}$.

  En sommant ces égalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\mathbb{E}(T_{k+1}) - \mathbb{E}(T_k)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

  Or, oar télescopage :

$$\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(T_1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

  Or, d'après la question , $\mathbb{E}(T_1) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. $N(\omega) = 0$ si et seulement s'il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n(\omega) > a$.
  Autrement dit, si la proposition suivante est vérifiée :

$$\texttt{NON}\,(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ X_n(\omega) > a)$$

  Ce qui équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) \leqslant a$. Puis à : $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [X_n \leqslant a]$.

$$\boxed{[N = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]}$$

Commentaire

On aurait sans doute obtenu tous les points de cette question sans l'introduction propre de ω.
En effet, l'énoncé prend le parti de ne pas le faire lors de la définition de la v.a.r. N.
Cela se fait cependant au prix d'une confusion d'objets entre variables aléatoires / réalisations / événements. Détaillons la démonstration qui semble plus proche de l'esprit du concepteur.

$N = 0$ si et seulement s'il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$.
Autrement dit, si : $\texttt{NON}(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ X_n > a)$.
Ce qui équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \leqslant a$.
Finalement, on a : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}([N = 0]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right)$$

  D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\right)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\right) & = & \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leqslant a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
& = & (\mathbb{P}([X_1 \leqslant a]))^n \ = \ (F_{X_1}(a))^n & \\
& = & (1 - \mathrm{e}^{-a})^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

Or : $0 < 1 - \mathrm{e}^{-a} < 1$. En effet :

$$\begin{array}{rcll} +\infty > a > 0 & \Leftrightarrow & -\infty < -a < 0 & \\ & \Leftrightarrow & 0 < \mathrm{e}^{-a} < 1 & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -1 < -\mathrm{e}^{-a} < 0 & \end{array}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-a})^n = 0$.

Et : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right) = 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}([N = 0]) = 0.}$$

□

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\, \mathrm{e}^{-a}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition, l'événement $[N = n]$ est réalisé si et seulement si n est le plus petit entier tel que $[X_n > a]$ est réalisé. Autrement dit, si on a à la fois :
  × pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'événement $[X_k \leqslant a]$ est réalisé,
  × l'événement $[X_n > a]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [N = n] = [X_1 \leqslant a] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \leqslant a] \cap [X_n > a] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a]\right) \cap [X_n > a]}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([N = n]) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a]\right) \cap [X_n > a]\right) & \\ & = & \left(\prod\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k \leqslant a])\right) \times \mathbb{P}([X_n > a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & (\mathbb{P}([X_1 \leqslant a]))^n \times \mathbb{P}([X_1 > a]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & (F_{X_1}(a))^{n-1} \times (1 - F_{X_1}(a)) & \\ & = & (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1} \times \mathrm{e}^{-a} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathrm{e}^{-a}}$$

□

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $N(\Omega) = \mathbb{N}$.
- De plus, on a démontré :
  × $\mathbb{P}([N = 0]) = 0$.
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathrm{e}^{-a}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\mathrm{e}^{-a}\right).}$$

- Ainsi N admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(N) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-a}} = \mathrm{e}^{a} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N) = \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{(\mathrm{e}^{-a})^2} = \mathrm{e}^{2a}(1-\mathrm{e}^{-a}) = \mathrm{e}^{a}\,(\mathrm{e}^{a}-1).}$$

Commentaire

- Dans le cours, il est précisé qu'une v.a.r. X qui suit une loi géométrique (de paramètre e^{-a}) admet pour support $\mathbb{N}^*$. Ici, N a pour support $\mathbb{N}$ mais prend la valeur 0 avec probabilité nulle.
  On a alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([N = x])$$
  (et ces probabilités sont nulles si $x \notin \mathbb{N}^*$)
  Dans ce cas, on considère que X et N ont même loi (qui est $\mathcal{G}(\mathrm{e}^{-a})$).
- Évidemment, il est tout à fait possible d'effectuer un calcul direct avec les probabilités calculées en questions ***7.*** et ***8.***. Cependant, cela démontre une manque de prise de recul et finit par coûter des points car demande beaucoup plus de temps.

□

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$.

Démonstration.

- La famille $([N = 0]\,, [N \neq 0])$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :
  $$\mathbb{P}([Z \leqslant a]) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant a] \cap [N = 0]) + \mathbb{P}([Z \leqslant a] \cap [N \neq 0])$$
- Or, par définition de Z :
  $$[Z \leqslant a] \cap [N = 0] = [0 \leqslant a] \cap [N = 0] = \Omega \cap [N = 0] = \Omega \cap [N = 0] = [N = 0]$$
  (on rappelle que d'après l'énoncé : $a > 0 \geqslant 0$)
- D'autre part, par définition de N :
  $$[Z \leqslant a] \cap [N \neq 0] = \varnothing$$
  Démontrons-le en supposant par l'absurde qu'il existe ω qui réalise $[Z \leqslant a] \cap [N \neq 0]$.
  Cela signifie que $N(\omega) \neq 0$ et $Z(\omega) \leqslant a$.
  Comme $N(\omega) \neq 0$ alors $Z(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$. On en déduit :
  $$Z(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega) \leqslant a$$
  Or, comme $N(\omega) \neq 0$, alors $N(\omega)$ est par définition le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n(\omega) > a$.
  On a alors : $X_{N(\omega)}(\omega) > a$ ce qui contredit $X_{N(\omega)}(\omega) \leqslant a$.
- On revient à la première égalité :
  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z \leqslant a]) & = & \mathbb{P}([N = 0]) + \mathbb{P}(\varnothing) & \\ & = & 0 + 0 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0}$$

Commentaire

L'utilisation de la formule des probabilités totales devrait relever ici de l'automatisme. En effet, on traite d'une v.a.r. qui est définie par cas. Pour le calcul de $\mathbb{P}([Z \leqslant a])$, on est donc naturellement amené à vouloir traiter à part le cas où $N = 0$ et celui où $N \neq 0$. La formule des probabilités totales n'est autre qu'une formalisation correcte de cette idée.

□

11. Soit $x \in \,]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

$$[N = n] \cap [Z \leqslant x] = \begin{cases} [a < X_1 \leqslant x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x])$.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si $n = 1$.

$$\begin{array}{rcll} [N = 1] \cap [Z \leqslant x] & = & [N = 1] \cap [X_N \leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & [N = 1] \cap [X_1 \leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & [X_1 > a] \cap [X_1 \leqslant x] & \textit{(par définition de } N\textit{)} \\ & = & [a < X_1 \leqslant x] & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } [N = 1] \cap [Z \leqslant x] = [a < X_1 \leqslant x].}$$

On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([N = 1] \cap [Z \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([a < X_1 \leqslant x]) \ = \ F_{X_1}(x) - F_{X_1}(a) \\ & = & (\cancel{1} - e^{-x}) - (\cancel{1} - e^{-a}) \ = \ e^{-a} - e^{-x} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([N = 1] \cap [Z \leqslant x]) = e^{-a} - e^{-x}}$$

- Si $n \geqslant 2$.

$$\begin{array}{rcll} [N = n] \cap [Z \leqslant x] & = & [N = n] \cap [X_N \leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & [N = n] \cap [X_n \leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a] \right) \cap [X_n > a] \ \cap \ [X_n \leqslant x] & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.}}\textit{)} \\ & = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a] \right) \cap [a < X_n \leqslant x] & \\ & = & [\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \\ & = & [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \textit{(par définition de } T_{n-1}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2, \text{ on a bien : } [N = n] \cap [Z \leqslant x] = [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x].}$$

On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([N=n]\cap[T\leqslant x]) & = & \mathbb{P}([T_{n-1}\leqslant a]\cap[a<X_n\leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([T_{n-1}\leqslant a])\,\mathbb{P}([a<X_n\leqslant x]) & \textit{(car } T_{n-1} \textit{ et } X_n \textit{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\ & = & (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathbb{P}([a<X_n\leqslant x]) & \textit{(d'après la question } \textbf{4.a)}\textit{)} \end{array}$$

De plus X_n suit la même loi que X_1, donc :

$$\mathbb{P}([a<X_n\leqslant x]) = \mathbb{P}([a<X_1\leqslant x]) = \mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{\text{Si } n\geqslant 2,\ \mathbb{P}([N=n]\cap[Z\leqslant x]) = (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ (\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}).}$$

On remarque que l'expression trouvée dans le cas $n\geqslant 2$ est valide pour $n=1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([N=n]\cap[Z\leqslant x]) = (\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x})\ (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}}$$

Commentaire

On fait remarquer que la formule obtenue est valide dans le cas $n=1$ et $n\geqslant 2$.
Ce n'est pas un objectif annoncé de la question. L'avantage est que cela rend la question suivante plus simple à rédiger : on n'est pas obligé de distinguer les cas $n=1$ et $n\geqslant 2$ puisque l'expression est valide dans ces deux cas.

□

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z\leqslant x]) = 1-\mathrm{e}^{a-x}$.

Démonstration.
La famille $\big([N=n]\big)_{n\geqslant 1}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z\leqslant x]) & = & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n]\cap[Z\leqslant x]) & \\ & = & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x})\ (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{11.a)}\textit{)} \\ & = & (\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1} & \\ & = & (\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (1-\mathrm{e}^{-a})^{n} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & (\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x})\ \dfrac{1}{\cancel{1}-(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-a})} & \\ & = & \cancel{\mathrm{e}^{-a}}\ (1-\mathrm{e}^{a-x})\ \dfrac{1}{\cancel{\mathrm{e}^{-a}}} & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{a-x} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z\leqslant x]) = 1-\mathrm{e}^{a-x}}$$

□

12. a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × si $x < 0$, alors :
  $$[Z - a \leqslant x] = [Z \leqslant x + a] \subset [Z \leqslant a]$$
  Donc, par croissance de $\mathbb{P}$ et d'après la question ***10.*** :
  $$0 \leqslant \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) \leqslant \mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$$
  D'où : $F_{Z-a}(x) = \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) = 0$.
  - × si $x \geqslant 0$:
  $$\begin{aligned} F_{Z-a}(x) &= \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) = \mathbb{P}([Z \leqslant x + a]) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{\cancel{a} - (x + \cancel{a})} && \textit{(d'après la question } \textbf{11.b)}\textit{, car } x + a \geqslant a\textit{)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Finalement :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_{Z-a}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.
Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } Z - a \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } 1.}$$

Commentaire

- On reconnaît ici une question du type « déterminer la transformée affine d'une v.a.r. Z ».
  Ce type de question est à savoir faire sans hésitation.
- L'énoncé nous guide ici dans la disjonction de cas à considérer : il précise que $Z - a$ suit une loi exponentielle. Or le support d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle est $[0, +\infty[$.
  La disjonction de cas attendue pour déterminer la fonction de répartition de $Z - a$ est donc :
  - × le cas $x \geqslant 0$,
  - × le cas $x < 0$.

□

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.

Démonstration.

- On remarque que : $Z = (Z - a) + a$.

  La v.a.r. Z admet une espérance et une variance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.

- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z - a) + \mathbb{E}(a) = \frac{1}{1} + a = 1 + a$$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(Z - a) = \frac{1}{1^2} = 1$$

Finalement : $\mathbb{E}(Z) = 1 + a$ et $\mathbb{V}(Z) = 1$.

□

Exercice 2

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2\,\mathrm{e}^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\varphi'(x) \;=\; 2x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x \;=\; x\,(2+x)\,\mathrm{e}^x$$
Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $x\,(2+x)$.
Or le polynôme $P(X) = X(2+X)$ est un polynôme de degré 2, dont les racines sont 0 et -2. De plus son coefficient dominant est positif.
- On obtient alors le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-1	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2} - 1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les différents éléments de ce tableau.
  - × En posant le changement de variable $u = -x$, on obtient :
  $$\lim_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^x \;=\; \lim_{u\to+\infty} (-u)^2\,\mathrm{e}^{-u} \;=\; \lim_{u\to+\infty} \frac{u^2}{\mathrm{e}^u} = 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$
  D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1$.
  - × Ensuite : $\varphi(0) = -1$
  - × Enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^x = +\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

□

2. Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in\,]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

Démonstration.

- Soit $x \in\,]0, +\infty[$. Remarquons :
$$\mathrm{e}^x = \frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; x^2\,\mathrm{e}^x = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) = 0$$

- La fonction φ est :
  - $\times$ continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$,
  - $\times$ strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\varphi(]0,+\infty[)$ avec :

$$\varphi(]0,+\infty[) \ = \ \left]\varphi(0), \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[\ = \ ]-1,+\infty[$$

  Or $0 \in \,]-1,+\infty[$. On en déduit que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \,]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } e^x = \frac{1}{x^2} \text{ admet une unique solution } \alpha \in \,]0,+\infty[.}$$

- De plus :
  - $\times$ $\varphi(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}\,e^{\frac{1}{2}} - 1$. Or :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}\,e^{\frac{1}{2}} - 1 & < & \dfrac{1}{4}\,e - 1 & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & < & \dfrac{1}{4} \times 3 - 1 & \textit{(car } e < 3\textit{)} \\ & < & 0 & \end{array}$$

  - $\times$ $\varphi(\alpha) = 0$.
  - $\times$ $\varphi(1) = e^1 - 1 > 0$ car $e > 2$.

  Ainsi : $\varphi(\frac{1}{2}) < 0 < \varphi(1)$.
  D'après le théorème de la bijection, $f^{-1} :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{En appliquant } f^{-1} \text{ de part et d'autre de l'inégalité précédente : } \frac{1}{2} < \alpha < 1.}$$

□

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3\,e^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 1$.

- ▸ **Initialisation**
  D'après l'énoncé : $u_0 = 1 \geqslant 1$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 1$).
  Par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant 1$. Ainsi :
  - $\times$ par croissance de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$: $u_n^3 \ \geqslant \ 1^3 = 1$,
  - $\times$ par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: $e^{u_n} \ \geqslant \ e^1 \geqslant 1$.

  On en déduit : $u_{n+1} = u_n^3\,e^{u_n} \geqslant 1$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant 1.}$$

Commentaire

Dans cette question, on a utilisé l'implication suivante :

$$\begin{array}{c} 1 \leqslant u_n^3 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \mathrm{e}^{u_n} \\ \Downarrow \\ 1 \times 1 \leqslant u_n^3 \times \mathrm{e}^{u_n} \end{array}$$

On a donc « multiplié » deux inégalités. Rappelons que ceci est valide seulement parce que **tous les termes en présence sont positifs**. □

4. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$u_{n+1} - u_n \;=\; u_n^3\,\mathrm{e}^{u_n} - u_n \;=\; \left(u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} - 1\right) u_n$$

- Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant 1$. Ainsi :
  - × par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$: $u_n^2 \geqslant 1$,
  - × par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant \mathrm{e}^1 \geqslant 1$.

  Ainsi : $u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} \geqslant 1$. D'où : $u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} - 1 \geqslant 0$.
- Enfin, comme de plus : $u_n \geqslant 1 \geqslant 0$, on en déduit : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$:
  - ▶ **Initialisation**
    - × D'une part : $u_0 = 1$.
    - × D'autre part : $u_1 \;=\; f(u_0) \;=\; 1^3 \times \mathrm{e}^1 \;=\; \mathrm{e}$.

    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$).
    Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} & u_{n+1} \geqslant u_n & \\ \text{donc} & f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) & \textit{(par croissance de } f \textit{ sur } [1, +\infty[\textit{ (à démontrer))} \end{array}$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Attention : le caractère croissant de f ne suffit pas à démontrer que (u_n) est croissante ! (si $u_0 \geqslant u_1$, la suite obtenue est décroissante).
- On pouvait aussi démontrer : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant x$.
  Or, comme $u_n \geqslant 1$ (d'après la question précédente) : $f(u_n) \geqslant u_n$. Ainsi : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
  Attention :

$$f \textit{ croissante} \quad \cancel{\Rightarrow} \quad f(x) \geqslant x$$

  On peut penser à la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie : $\forall x \geqslant 1,\ \sqrt{x} \leqslant x$. □

5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Démonstration.

- Démontrons que (u_n) n'est pas majorée. On procède par l'absurde.
  Supposons que la suite (u_n) est majorée.
  Dans ce cas, la suite (u_n) est :
  × croissante,
  × majorée.
  On en déduit que la suite (u_n) converge vers ℓ.
  × D'une part, d'après la question ***3.*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
  Ainsi, par passage à la limite : $\ell \geqslant 1$.
  × D'autre part, par définition de (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc au point ℓ. Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité précédente :
  $$\ell \ = \ f(\ell)$$
  Or :
  $$\begin{array}{rcll} \ell = f(\ell) & \Leftrightarrow & \ell = \ell^3\,\mathrm{e}^{\ell} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\ell^2} = \mathrm{e}^{\ell} & \textit{(car, comme } \ell \geqslant 1, \textit{ en particulier : } \ell \neq 0\textit{)} \end{array}$$
  D'après la question ***2.***, cette équation admet le réel α comme unique solution sur $]0, +\infty[$. On en déduit : $\ell = \alpha$.
  × Or, toujours d'après la question ***2.*** : $\alpha < 1$.
  Absurde !
  $$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée.}}$$
- Finalement, la suite (u_n) est :
  × croissante,
  × non majorée.
  $$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Commentaire

- On cherche dans cette question à déterminer la limite d'une suite (u_n) dont on vient de démontrer qu'elle est croissante (en particulier, **monotone**). Il faut alors immédiatement songer à l'utilisation d'un théorème de convergence monotone. Ce dernier nous fournit la disjonction de cas suivante (dans le cas d'une suite croissante) :
  × soit la suite (u_n) est majorée.
  Dans ce cas, elle est convergente (et on peut trouver une majoration / minoration / encadrement de sa limite grâce à une majoration / minoration / encadrement de la quantité u_n)
  × soit la suite (u_n) n'est pas majorée.
  Dans ce cas, elle diverge vers $+\infty$.
  On rappelle que la démonstration de cette propriété s'effectue presque toujours par l'absurde.
- Dans cette question, on ne demande rien d'autre que d'établir cette disjonction de cas. □

Partie III : Étude d'une série

6. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(n)}$.

Démonstration.
Remarquons :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{f(n)} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{ll} & n^3 > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^n > 0 \\ \text{donc} & n^3\,\mathrm{e}^n > 0 \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{f(n)} = \dfrac{1}{n^3\,\mathrm{e}^n} > 0 \end{array}$$

× De plus : $\dfrac{1}{f(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En effet :

$$\frac{\frac{1}{f(n)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^3\,\mathrm{e}^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^3\,\mathrm{e}^n} = \frac{1}{n\,\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

× la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{f(n)} \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

Il est important de bien lire la question. On demande ici de **démontrer la convergence** d'une série. Il n'est donc pas demandé explicitement de calculer sa somme. Dans ce cas, il faut privilégier l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des séries à termes positifs. Au passage, si ce cacul n'est pas demandé c'est certainement parce qu'il est très technique ou impossible à réaliser dans le cadre du programme ECE. □

7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} \right| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k}$$

- Soit $N \geqslant n+1$. Soit $k \in [\![n+1, N]\!]$.

$$\begin{array}{lll} & k \geqslant n+1 \geqslant 1 & \\ \text{donc} & k^3 \geqslant 1 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^3 \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{d'où} & k^3\,\mathrm{e}^k \geqslant \mathrm{e}^k & \textit{(car } \mathrm{e}^k > 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^k} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^k & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

En sommant les encadrements précédents pour k variant entre $n+1$ et N, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k \qquad (\star)$$

- Or la série $\sum\limits_{k\geqslant n+1} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{\mathrm{e}} \in\,]-1,1[$.
  Elle est donc convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k+n+1} && \textit{(par décalage d'indice)}\\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}} \times \frac{1}{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}}\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{n+\cancel{1}}} \times \frac{\cancel{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^n\,(\mathrm{e}-1)}
\end{aligned}$$

- On en déduit, par passage à la limite dans l'inégalité $(\star)$ (ce qui est autorisé car les sommes partielles en présence convergent) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n\,(\mathrm{e}-1)}$$

- Or, pour tout $k \geqslant 1$: $\frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \geqslant 0$. D'où :

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}}$$

□

8. En déduire une fonction en **Scilab** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier n tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}$ est une valeur approchée de S à 10^{-4} près.
  Autrement dit, on souhaite exhiber $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant 10^{-4}$$

- Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)}$$

Il suffit alors de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} \leqslant 10^{-4}$.
En effet, par transitivité, on aura alors :

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} \leqslant 10^{-4}$$

- On commence alors par coder la fonction f.

```
function y = f(x)
    y = 1 / (x ^ 3 * exp(x))
endfunction
```

- On propose ensuite la fonction suivante :

```
1 function S = approx()
2     n = 0
3     S = 0
4     while 1 / ((%e - 1) * exp(n)) > 10 ^ (-4)
5         n = n + 1
6         S = S + 1 / f(n)
7     end
8 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

× **Début de la fonction**
On commence par préciser la structure de la fonction :
- cette fonction se nomme `approx`,
- elle ne prend pas de paramètre en entrée,
- elle admet pour variable de sortie la variable `S`.

```
1 function S = approx()
```

La variable `n` est initialisée à 0.
La variable `S`, qui contiendra les valeurs successives de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$, est initialisée à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2     n = 0
3     S = 0
```

× **Structure itérative**
Les lignes 4 à 8 consistent à :

1) déterminer un entier n tel que : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} \leqslant 10^{-4}$,

2) calculer les valeurs successives de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$.

On doit donc :

1) incrémenter la variable `n` de 1 jusqu'à ce que : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} \leqslant 10^{-4}$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable `n` de 1 tant que : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} > 10^{-4}$. Pour cela, on met en place une structure while :

```
    while 1 / ((%e - 1) * exp(n)) > 10 ^ (-4)
```

Puis on met à jour la variable `n` :

```
        n = n + 1
```

2) calculer les valeurs successives de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$:

```
        S = S + 1 / f(n)
```

× **Fin du programme**

À l'issue de cette boucle, la variable `S` contient la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$ vérifiant :

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant 10^{-4}$$

Autrement dit, `S` contient une valeur approchée de S à 10^{-4} près, ce qui était souhaité.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Scilab** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- Le programme précédent propose de déterminer la valeur de n et de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$ en procédant par itération. On peut aussi remarquer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n} \leqslant 10^{-4} & \Leftrightarrow \mathrm{e}^n \geqslant \frac{10^4}{(\mathrm{e}-1)} \\ & \Leftrightarrow n \geqslant 4\ \ln(10) - \ln(\mathrm{e}-1) \qquad \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$ est une approximation de S pour tout $n \geqslant N$, où $N = \lceil 4\ \ln(10) - \ln(\mathrm{e}-1) \rceil$.
On en déduit la fonction **Scilab** suivante :

```
function S = approx()
    N = ceil(4 * log(10) - log(%e - 1))
    S = 0
    for k = 1:N
        S = S + 1 / f(k)
    end
    endfunction
```

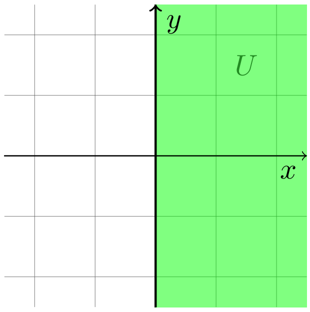
Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\ \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :

$$g : U \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U.

Démonstration.



□

10. Calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x, y).

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Elle admet donc des dérivées partielles premières (et secondes).
- Soit $(x, y) \in U$.

$$\partial_1(g)(x, y) = -\frac{1}{x^2} + e^x$$

$$\partial_2(g)(x, y) = -\left((2y)\, e^y + y^2\, e^y\right) = -(2 + y)\, y\, e^y$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in U, \quad \partial_1(g)(x, y) = -\frac{1}{x^2} + e^x \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x, y) = -(2 + y)\, y\, e^y}$$

Commentaire

L'énoncé admet que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Il n'est donc pas question de le démontrer. Cepdendant, si l'énoncé le demandait, on aurait procéder de la façon suivante :

- La fonction $g_1 : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est l'inverse $h_1 : (x, y) \mapsto x$ qui :
  - × est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que fonction polynomiale,
  - × ne s'annule pas sur U.
- La fonction $g_2 : (x, y) \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est la composée $g_2 = \Psi_2 \circ h_2$ de :
  - × $h_2 : (x, y) \mapsto x$ qui :
    - est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que fonction polynomiale,
    - vérifie : $h_2(U) \subset \mathbb{R}$.
  - × $\psi_2 : u \mapsto e^u$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- De même, la fonction $(x, y) \mapsto e^y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
- Finalement, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

□

11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question ***2***.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in U$.

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \text{ est un point critique de } g & \Leftrightarrow & \nabla(g)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(g)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(g)(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} \begin{array}{c}(x,y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } g\end{array} & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x & = & 0 \\ -(2+y)\, y\, \mathrm{e}^y & = & 0 \end{array} \right. & \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x & = & \dfrac{1}{x^2} \\ (2+y)\, y & = & 0 \end{array} \right. & \textit{(car } \mathrm{e}^y \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x & = & \dfrac{1}{x^2} \\ y & = & -2 \end{array} \right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x & = & \dfrac{1}{x^2} \\ y & = & 0 \end{array} \right. & \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha \\ y & = & -2 \end{array} \right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha \\ y & = & 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \textit{(car, d'après } \mathbf{2.}\textit{, l'équation } \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2} \\ \textit{admet une unique solution, } \alpha, \\ \textit{sur }]0, +\infty[\textit{)} \end{array} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } g \text{ admet exactement deux points critiques : } (\alpha, -2) \text{ et } (\alpha, 0).}$$

Commentaire

- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(g)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on obtient deux équations du type :

  $$\psi(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(y) = 0$$

  Ces deux équations ne dépendent que d'une seule variable, on peut donc utiliser toutes les techniques usuelles de résolution d'équation.

$\square$

12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

Démonstration.

- La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U d'après l'énoncé. Elle admet donc des dérivées partielles secondes.
- Soit $(x, y) \in U$. Tout d'abord :
$$\partial^2_{1,1}(g)(x,y) \;=\; \frac{2}{x^3} + \mathrm{e}^x$$
Ensuite :
$$\partial^2_{1,2}(g)(x,y) \;=\; \partial^2_{2,1}(f)(x,y) \;=\; 0$$
La première égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'**ouvert** U.
Enfin :
$$\begin{aligned} \partial^2_{2,2}(g)(x,y) &= -\Big(\big(1\times y + (2+y)\times 1\big)\times \mathrm{e}^y + (2+y)\,y\times \mathrm{e}^y\Big) \\ &= -\big((2+2y)\,\mathrm{e}^y + (2+y)\,y\,\mathrm{e}^y\big) \\ &= -\big((2+2y) + (2+y)y\big)\mathrm{e}^y \end{aligned}$$
$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x,y)\in U,\ \partial^2_{1,1}(g)(x,y) = \dfrac{2}{x^3} + \mathrm{e}^x \\ \partial^2_{1,2}(g)(x,y) = \partial^2_{2,1}(g)(x,y) = 0 \\ \partial^2_{2,2}(g)(x,y) = -(2+4y+y^2)\,\mathrm{e}^y \end{array}}$$

Commentaire

× Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.

× Ici, le calcul de $\partial^2_{1,2}(g)(x,y)$ et $\partial^2_{2,1}(g)(x,y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la 1ère variable puis par rapport à la 2ème, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

- On rappelle que la matrice hessienne de g en un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est :
$$\nabla^2(g)(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(g)(x,y) & \partial^2_{1,2}(g)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(g)(x,y) & \partial^2_{2,2}(g)(x,y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} + \mathrm{e}^x & 0 \\ 0 & -(2+4y+y^2)\,\mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$
On en déduit :
$$H_0 \;=\; \nabla^2(g)(\alpha,0) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + \mathrm{e}^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\boxed{H_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + \mathrm{e}^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$
- La matrice H_0 est diagonale. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(H_0) = \{\dfrac{2}{\alpha^3}, -2\}$.
Enfin, comme $\alpha > 0$:
$$\frac{2}{\alpha^3} + \mathrm{e}^\alpha > 0 \qquad \text{et} \qquad -2 < 0$$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ n'admet donc pas d'extremum local en } (\alpha, 0) \text{ (c'est un point selle).}}$ □

13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

Démonstration.

- D'après les calculs effectués à la question précédente :

$$H_{-2} \ = \ \nabla^2(g)(\alpha,-2) \ = \ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + \mathrm{e}^{\alpha} & 0 \\ 0 & -(2 + 4 \times (-2) + (-2)^2)\,\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + \mathrm{e}^{\alpha} & 0 \\ 0 & 2\,\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}}$$

- La matrice H_{-2} est diagonale. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.
  Ainsi : $\mathrm{Sp}(H_0) = \{\dfrac{2}{\alpha^3}, 2\,\mathrm{e}^{-2}\}$.
  Enfin, comme $\alpha > 0$:

$$\frac{2}{\alpha^3} + \mathrm{e}^{\alpha} > 0 \qquad \text{et} \qquad 2\,\mathrm{e}^{-2} > 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet donc un minimum local en } (\alpha, -2).}$$

□

14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

Démonstration.

- D'après les questions précédentes, la fonction g n'admet pas de maximum local sur U. Elle n'admet donc pas de maximum global sur U.
- La fonction g n'admet pas de minimum global sur U. En effet : $\lim\limits_{y \to +\infty} g(1,y) = -\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } g \text{ n'admet pas d'extremum global sur } U.}$$

Commentaire

- On pouvait également démontrer que la fonction g n'admet pas de maximum global sur U avec l'argument suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x,0) = +\infty$.
- Pour démontrer que le point $(\alpha, -2)$ n'est pas un minimum global de g, il est aussi très fréquent de chercher un point $(x_0, y_0) \in U$ tel que :

$$g(x_0, y_0) \ < \ g(\alpha, -2)$$

  Pour cela :

  1) on commence par calculer $g(\alpha, -2)$,

  2) puis on cherche un point (x_0, y_0) (simple) tel que : $g(x_0, y_0) < g(\alpha, -2)$.

  Comme le réel α n'a pas de valeur explicite ici, on a privilégié la méthode présentée plus haut.

□

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{array} \right.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

Démonstration.
Supposons par l'absurde que l'endomorphisme f est bijectif.
Alors l'endomorphisme f admet une bijection réciproque $f^{-1} : E \to E$. Or, d'après l'énoncé :

$$f \circ (f^2 + i) = \theta$$

On en déduit, en composant de part et d'autre à gauche par f^{-1} :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1} \circ \big(f \circ (f^2 + i)\big) & = & f^{-1} \circ \theta & = & \theta \\ \shortparallel & & & & \\ (f^{-1} \circ f) \circ (f^2 + i) & = & i \circ (f^2 + i) = f^2 + i & & \end{array}$$

Ce qui est absurde, puisque d'après l'énoncé : $f^2 + i \neq \theta$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ n'est pas bijectif.}}$$

Commentaire

On peut aussi raisonner de manière directe. Comme :

$$f \circ (f^2 + i) = \theta$$

alors, pour tout $x \in E$: $\big(f \circ (f^2 + i)\big)(x) = f\big(f^2 + i)(x)\big) = 0_E$.
Autrement dit : $\forall x \in E$, $(f^2 + i)(x) \in \text{Ker}(f)$.
Or, d'après l'énoncé : $f^2 + i \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que : $(f^2 + i)(x) \neq 0_E$.
On en déduit :

$$\text{Ker}(f) \supset \{0_E, (f^2 + i)(x)\} \neq \{0_E\}$$

Ainsi, f n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective.

□

b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, f n'est pas bijectif, c'est-à-dire $f - 0 \cdot i$ n'est pas bijectif. Comme E est de dimension finie, ceci équivaut à f non injectif.

$$\boxed{\text{Donc 0 est valeur propre de } f.}$$

- 0 est valeur propre de f, donc : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f - 0 \cdot i) \neq \{0_E\}$.
  Il existe donc $u \neq 0_E$ tel que $u \in \text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, il existe } u \in E \text{ tel que : } u \neq 0_E \text{ et } f(u) = 0_E.}$$

□

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $f \circ (f^2 + i) = \theta$.
  On en déduit que le polynôme $Q(X) = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de f.
  De plus l'unique racine de Q est 0 (le polynôme $X^2 + 1$ n'admet pas de racine réelle).

$$\boxed{\text{D'où : Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}.}$$

- De plus, d'après la question ***1.b)***, $0 \in \text{Sp}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : Sp}(f) = \{0\}.}$$

□

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

Démonstration.
D'après l'énoncé, E est un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B}$ l'une de ses bases.

Supposons par l'absurde que f est diagonalisable.
Il existe alors une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ & & P & D & P^{-1} \end{array}$$

Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P\ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta)$$

L'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ étant bijective, on en déduit : $f = \theta$.
Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Il était possible de rédiger différemment en prenant le parti de diagonaliser la matrice représentative de f. Détaillons cette rédaction.
- On commence par noter $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice représentative de f dans une base $\mathscr{B}$ de E.
  Supposons par l'abusrde que f est diagonalisable. Alors M est diagonalisable.
  Il existe alors une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

  $$M = PDP^{-1}$$

  où D est une matrice diagonale dont les cœfficients diagonaux sont les valeurs propres de M.
  Or $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(f) = \{0\}$. Donc : $D = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
  Et ainsi :

  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P\ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta)$$

  Et on peut donc conclure comme ci-dessus.
- Cette question est un grand classique des sujets.
  Il faut donc savoir la traiter correctement, en adoptant l'un ou l'autre des rédactions ci-dessus. □

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Démonstration.

- Supposons par l'absurde que l'endomorphisme $f^2 + i$ est bijectif.
  Alors l'endomorphisme $g = f^2 + i$ admet une bijection réciproque $g^{-1} : E \to E$. Or, d'après l'énoncé :
  $$f \circ (f^2 + i) = \theta$$
  On en déduit, en composant de part et d'autre à droite par g :
  $$\begin{array}{ccccc} \big(f \circ (f^2+i)\big) \circ g^{-1} & = & \theta \circ g^{-1} & = & \theta \\ \shortparallel & & & & \\ \big(f \circ (f^2+i)\big) \circ g^{-1} & = & f \circ \big((f^2+i) \circ g^{-1}\big) = f \circ i = f & & \end{array}$$
  Ce qui est absurde, puisque d'après l'énoncé : $f \neq \theta$.
  $$\boxed{\text{On en déduit que } f^2 + i \text{ n'est pas bijectif.}}$$
- L'endomorphisme $f^2 + i$ n'est pas bijectif. Donc : $\text{Ker}(f^2 + i) \neq \{0_E\}$.
  Il existe donc $v \neq 0_E$ tel que $v \in \text{Ker}(f^2 + i)$. Or :
  $$v \in \text{Ker}(f^2+i) \ \Leftrightarrow\ (f^2+i)(v) = 0_E \ \Leftrightarrow\ f^2(v) + v = 0_E \ \Leftrightarrow\ f^2(v) = -v$$
  $$\boxed{\text{Ainsi, il existe } v \in E \text{ tel que : } v \neq 0_E \text{ et } f^2(v) = -v.}$$

□

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

Démonstration.
On calcule :
$$f(v_3) = f(f(v_2)) = f^2(v_2) = -v_2$$
$$\boxed{\text{On a bien : } f(v_3) = -v_2.}$$

□

6. a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :
  $$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0_E$$
  - On applique f de part et d'autre. On obtient, par linéarité de f :
    $$\lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2) + \lambda_3 \cdot f(v_3) = f(0_E) = 0_E$$
    Or, on a les relations suivantes :
    $$f(v_1) = 0_E, \quad f(v_2) = v_3 \quad \text{et} \quad f(v_3) = -v_2$$
    On obtient alors :
    $$\lambda_2 \cdot v_3 - \lambda_3 \cdot v_2 = 0_E \quad (L_1)$$

- On applique de nouveau f de part et d'autre. On obtient alors :

$$\lambda_2 \cdot f(v_3) - \lambda_3 \cdot f(v_2) = f(0_E) = 0_E$$

Ainsi, par les mêmes relations que précédemment :

$$-\lambda_2 \cdot v_2 - \lambda_3 \cdot v_3 = 0_E \quad (L_2)$$

- Par combinaison linéaire des égalités précédentes ($\lambda_3\, L_1 + \lambda_2\, L_2$), on obtient :

$$-\lambda_3^2 \cdot v_2 - \lambda_2^2 \cdot v_2 = 0_E$$

Autrement dit : $(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \cdot v_2 = 0_E$.
Or : $v_2 \neq 0_E$. Donc : $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0_{\mathbb{R}}$. D'où : $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.

- L'équation initiale devient alors :

$$\lambda_1 \cdot v_1 = 0_E$$

Or : $v_1 \neq 0_E$. Donc : $\lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}$.

Finalement : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est donc libre.}}$$

- De plus : $\text{Card}(\mathscr{B}) = \text{Card}((v_1, v_2, v_3)) = 3 = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.}$$

□

b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On a : $f(v_1) = 0_E = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.

  On en déduit que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On a : $f(v_2) = v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$.

  On en déduit que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On a : $f(v_3) = -v_2 = 0 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.

  On en déduit que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } C = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{a\, A + b\, B + c\, C \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

Démonstration.

- Montrons que (A, B, C) est une famille libre de $\mathcal{F}$.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :
$$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
  Ceci équivaut à :
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  Par identification, on en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
$$\boxed{\text{La famille } (A, B, C) \text{ est libre.}}$$
- De plus, par définition de $\mathcal{F}$, la famille (A, B, C) engendre $\mathcal{F}$.
$$\boxed{\text{Ainsi, } (A, B, C) \text{ est une base de } \mathcal{F}.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}((A, B, C)) = 3.}$$ □

8. Montrer : $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM = MC\} = \mathcal{F}$

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}) \in \mathbb{R}^9$ tels que :
$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$
On calcule :
$$CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$
et :
$$MC = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,3} & -a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & -a_{2,2} \\ 0 & a_{3,3} & -a_{3,2} \end{pmatrix}$$
On obtient alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
CM = MC \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,3} & -a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & -a_{2,2} \\ 0 & a_{3,3} & -a_{3,2} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,3} & = & 0 \\ -a_{1,2} & = & 0 \\ -a_{3,1} & = & 0 \\ -a_{3,2} & = & a_{2,3} \\ -a_{3,3} & = & -a_{2,2} \\ a_{2,1} & = & 0 \\ a_{2,2} & = & a_{3,3} \\ a_{2,3} & = & -a_{3,2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & -a_{3,2} \\ 0 & a_{3,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad M = a_{1,1}\, A + a_{2,2}\, B + a_{3,2}\, C \\
& \Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM = MC\} = \mathcal{F}}$$ □

9. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(a\, A + b\, B + c\, C)^2$.

Démonstration.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$(a\, A+b\, B+c\, C)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2-c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2-c^2 \end{pmatrix} = a^2\, A + (b^2-c^2)\, B + 2bc\, C$$

$$\boxed{(a\, A + b\, B + c\, C)^2 = a^2\, A + (b^2 - c^2)\, B + 2bc\, C}$$ □

b) En déduire une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- On remarque que :
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} = 4\, A + 5\, B + 12\, C$$

- D'après la question ***9.a)***, si on trouve $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$4\, A + 5\, B + 12\, C = a^2\, A + (b^2 - c^2)\, B + 2bc\, C$$
alors, en posant $M = a\, A + b\, B + c\, C$, on a :
$$M^2 = a^2\, A + (b^2 - c^2)\, B + 2bc\, C = 4\, A + 5\, B + 12\, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

- Cherchons donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$a^2\, A + (b^2 - c^2)\, B + 2bc\, C = 4\, A + 5\, B + 12\, C$$
On obtient le système d'équations suivant :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 4 \\ b^2 - c^2 & = & 5 \\ 2bc & = & 12 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b^2 - c^2 & = & 5 \\ bc & = & 6 \end{array} \right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b^2 - c^2 & = & 5 \\ bc & = & 6 \end{array} \right.$$
Remarquons alors que $b = 0$ ne peut convenir (si $b = 0$ alors $bc = 0 \neq 6$). On suppose donc : $b \neq 0$. L'égalité $bc = 6$ permet d'écrire : $c = \dfrac{6}{b}$.
En réinjectant dans la deuxième ligne, on obtient :
$$\begin{array}{rcl} b^2 - c^2 = 5 \Leftrightarrow b^2 - \frac{36}{b^2} = 5 \Leftrightarrow b^4 - 36 = 5\, b^2 & \Leftrightarrow & b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \\ & \Leftrightarrow & (b^2 + 4)\ (b^2 - 9) = 0 \\ & \Leftrightarrow & b^2 = -4 \ \texttt{OU}\ b^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow & b^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow & b = -3 \ \texttt{OU}\ b = 3 \end{array}$$
On obtient alors : $c^2 = b^2 - 5 = 9 - 5 = 4$. Ainsi : $c = -2$ $\texttt{OU}$ $c = 2$.
Le triplet (a, b, c) suivant convient : $\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 3 \\ c & = & 2 \end{array} \right.$.

- On a alors :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -12\\ 0 & 12 & 5\end{pmatrix} &= 2^2\, A + (3^2 - 2^2)\, B + 2 \times 3 \times 2\, C \\ &= (2\, A + 3\, B + 2\, C)^2 \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)}\end{aligned}$$

Donc, en posant $M = 2\,A + 3\,B + 2\,C$, on obtient : $M^2 = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -12\\ 0 & 12 & 5\end{pmatrix}$.

□

10. On note $g = f^2 - i$.
Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2 - i) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(i) \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)\textit{)} \\ &= \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^2 - I_3 \\ &= C^2 - I_3 \\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

La matrice représentative de g dans la base $\mathscr{B}$ est une matrice diagonale à cœfficients tous non nuls. Elle est donc inversible.

On en déduit que l'endomorphisme g est bijectif.

- Par propriété de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g^{-1}) &= \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\ &= -I_3 - \frac{1}{2}\, C^2 \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(-i - \frac{1}{2}\, f^2\right)\end{aligned}$$

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ étant bijective, on en déduit : $g^{-1} = -i - \dfrac{1}{2}\, f^2$.

□