

EML 2015

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .
2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$?

- b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ .

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ qui, à tout ω de Ω , associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. a) Calculer, pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout x de \mathbb{R}_+^* , la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leq x])$.
b) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N}^* , T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n .
5. a) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , la variable aléatoire T_n admet une espérance.
b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2 .
6. a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.
b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx$$

- c) En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^* , une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de \mathbb{N}^* tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leq a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([N = n]) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}$.

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N .

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z , définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leq a]) = 0$.

11. Soit $x \in]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

$$[N = n] \cap [Z \leq x] = \begin{cases} [a < X_1 \leq x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leq a] \cap [a < X_n \leq x] & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leq x])$.

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z \leq x]) = 1 - e^{a-x}$.

12. a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.

Exercice 2

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ , en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

2. Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que α appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 e^x$,

et la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

4. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Étude d'une série

6. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.

8. En déduire une fonction en **Scilab** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^2 et l'application de classe \mathcal{C}^2 suivante :

$$g = U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U .

10. Calculer, pour tout (x, y) de U , les dérivées partielles premières de g en (x, y) .

11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.

12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E .

On note i l'application identité de E , et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{cases}$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

b) En déduire que 0 est valeur propre de f , puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que :

$$u \neq 0_E \quad \text{et} \quad f(u) = 0_E$$

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que :

$$v \neq 0_E \quad \text{et} \quad f^2(v) = -v$$

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

6. a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E .

b) Déterminer la matrice C de f dans la base \mathcal{B} .

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel \mathcal{F} de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C) , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de \mathcal{F} .

8. Montrer : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM = MC\} = \mathcal{F}$

9. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.

b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

10. On note $g = f^2 - i$.

Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i .