EML 2014

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle,
    - telle que : $h_1(]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^3 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ en tant que somme et produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^3 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

- Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x\,\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = \mathrm{e}^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi''(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{3}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}\,\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^x + \left(\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^x + \frac{3x+1}{x^5}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) = \mathrm{e}^x + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \varphi''(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \end{array}}$$

□

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

Démonstration.

- Soit $x \in]0,+\infty[$. Déterminons le signe de $\varphi'''(x)$.
  - × Tout d'abord : $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0$.
  - × Ensuite, comme $x > 0$: $\dfrac{3x+1}{x^5} > 0$

  On en déduit : $\varphi'''(x) > 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'''(x)$		$+$		$+$	
Variations de φ''	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  - $\times$ tout d'abord : $\varphi''(1) \; = \; e^1 - \dfrac{1}{1^3}\, e^{\frac{1}{1}} \; = \; e - e \; = \; 0.$
  - $\times$ ensuite : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3}\, e^{\frac{1}{x}} \; = \; 0 \times 1 \; = \; 0$. De plus : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x \; = \; +\infty$. Ainsi : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi''(x) = +\infty$.
  - $\times$ enfin : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3}\, e^{\frac{1}{x}} \; = \; +\infty$. De plus : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} e^x \; = \; e^0 \; = \; 1$. Ainsi : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \varphi''(x) = -\infty$.
- On déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ'	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  - $\times$ tout d'abord : $\varphi'(1) \; = \; e^1 - \cancel{\left(\dfrac{1}{1} - 1\right)} e^{\frac{1}{1}} \; = \; e.$
  - $\times$ ensuite : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} = -1$. De plus : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Ainsi : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi'(x) = +\infty$.
  - $\times$ enfin : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. De plus : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$. Ainsi : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \varphi'(x) = +\infty$.
- La fonction φ' est :
  - $\times$ strictement décroissante sur $]0, 1]$,
  - $\times$ strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

  Elle admet donc un unique minimum en 1 égal à e.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \,]0, +\infty[, \; \varphi'(x) \geqslant \varphi'(1) = e.}$$

□

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1$.
- Ensuite, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$: $x\, e^{\frac{1}{x}} \; = \; \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$. Avec le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, on obtient :

$$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \; = \; \lim_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} \; = \; +\infty \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty.}$$

□

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\frac{\varphi(x)}{x} \ = \ \frac{\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} \ = \ \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

  Or :

  × par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \ = \ +\infty$.

  × $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \ = \ \mathrm{e}^0 \ = \ 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.}$$

- Pour tout $x \in]0,\infty[$: $\varphi(x) \ = \ x\, \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

$$\boxed{\text{D'après le calcul de limite précédent : } \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

□

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3,+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\,x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto \varphi(x) - \mathrm{e}\,x$.
  La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$h'(x) \ = \ \varphi'(x) - \mathrm{e} \ \geqslant \ 0 \quad \textit{(d'après 2.)}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		3		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$		$+$	
Variations de h	$-\infty$	$\nearrow$	$h(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

- En particulier : $\forall x \in [3,+\infty[$, $h(x) \geqslant h(3)$. Or :

$$h(3) \ = \ \varphi(3) - 3\,\mathrm{e} \ > \ 15 - 3\,\mathrm{e} \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } x \in [3,+\infty[\text{ : } h(x) \geqslant 0, \text{ c'est-à-dire } \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\,x.}$$

Commentaire

On pouvait également démontrer cette inégalité en utilisant la convexité de φ.

- D'après la question *2.* : $\forall x \in \,]1, +\infty[$, $\varphi''(x) > 0$.
  La fonction φ est donc convexe sur $]1, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 3, droite d'équation :

$$y \;=\; \varphi'(3)(x-3) + \varphi(3)$$

- Soit $x \in [3, +\infty[$.

Comme	$\varphi'(3) \geqslant \mathrm{e}$	*(d'après la question 2.)*
alors	$\varphi'(3)(x-3) \geqslant \mathrm{e}\,(x-3)$	*(car $x - 3 \geqslant 0$)*
d'où	$\varphi'(3)(x-3) + \varphi(3) \geqslant \mathrm{e}\,(x-3) + 15$	*(car $\varphi(3) > 15$ d'après l'énoncé)*

- De plus, comme $\mathrm{e} < 3$:

$$\mathrm{e}\,(x-3) + 15 \;=\; \mathrm{e}\,x - 3\,\mathrm{e} + 15 \;\geqslant\; \mathrm{e}\,x$$

Finalement : $\forall x \in [3, +\infty[$, $\varphi(x) \;\geqslant\; \varphi'(3)(x-3) + \varphi(3) \;\geqslant\; \mathrm{e}\,x$.

□

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

Démonstration.

- La fonction φ'' est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

La fonction φ change donc de convexité en 1,
seul point d'inflexion de la courbe représentative de φ.

- Les coordonnées de ce point d'inflexion sont $\big(1, \varphi(1)\big)$. Or :

$$\varphi(1) \;=\; \mathrm{e}^1 - 1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{1}} \;=\; \mathrm{e} - \mathrm{e} \;=\; 0$$

La courbe représentative de φ admet pour point d'inflexion, le point de coordonnées $(1, 0)$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de φ en 1 est :
$y \;=\; \varphi'(1)(x-1) + \varphi(1) \;=\; \mathrm{e}\,(x-1)$.

□

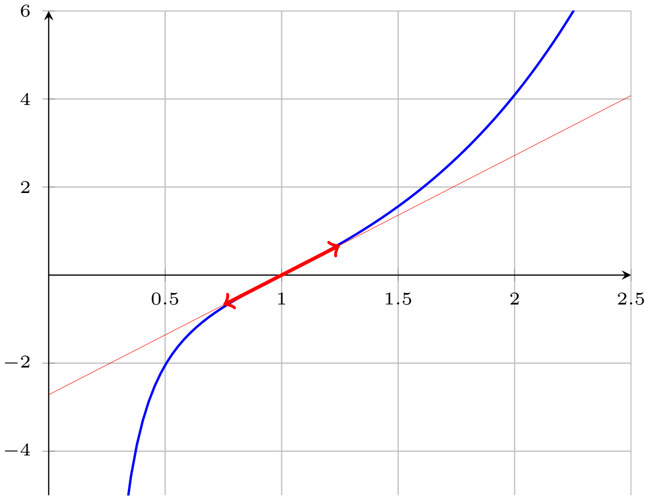
7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Démonstration.

- D'après la question *2.* : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant \mathrm{e} > 0$.
  On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$		$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- L'obtention des différents éléments de ce tableau a été détaillée en questions *3* et *4*.
- On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la représentation graphique suivante.



Commentaire

- Un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ est un point en lequel $\mathcal{C}$ change de convexité. Si la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I d'étude, une condition suffisante d'existence de point d'inflexion est que la fonction φ'' s'annule **en changeant de signe** en l'abscisse de ce point.
- L'énoncé demande de représenter la tangente au point d'inflexion. Il est important que le dessin de la courbe mette en évidence :
  - × la notion de tangente : la courbe de $\mathcal{C}$ et la tangente doivent apparaître comme confondues à proximité du point $(1, 0)$.
  - × la notion de point d'inflexion : sur $]0, 1[$ la fonction est concave et sur $]1, +\infty[$ la fonction est convexe. Cela doit apparaître clairement sur la représentation graphique. En particulier, la tangente obtenue « traverse » la courbe $\mathcal{C}$.

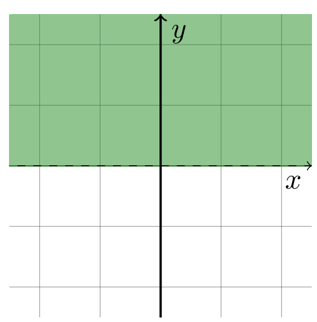
□

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R}\times\ ]0, +\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.

Démonstration.



□

9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x,y).

Démonstration.

- La fonction $g_1 : (x,y) \mapsto \ln(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est la composée $g_1 = \psi_1 \circ h_1$ où :
  - $\times$ $h_1 : (x,y) \mapsto y$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $h_1(U) \subset \,]0,+\infty[$.
  - $\times$ $\psi_1 : t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $g_2 : (x,y) \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est la composée $g_2 = \psi_2 \circ h_2$ où :
  - $\times$ $h_2 : (x,y) \mapsto x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $h_2(U) \subset \mathbb{R}$.
  - $\times$ $\psi_2 : t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $(x,y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que fonction polynomiale.

Finalement, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Commentaire

Le détail d'une seule des deux compositions suffit sans doute à obtenir la totalité des points alloués à cette partie de la question.

$$\forall (x,y) \in U, \quad \partial_1(f)(x,y) = y - \ln(y)\, e^x, \quad \partial_2(f)(x,y) = x - \frac{e^x}{y}$$
$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -\ln(y)\, e^x, \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 1 - \frac{e^x}{y}$$
$$\partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 1 - \frac{e^x}{y}, \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \frac{e^x}{y^2}$$

□

10. Établir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0$$

Démonstration.
Soit $(x,y) \in U$.
Le couple (x,y) est un point critique de f si et seulement si $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y - \ln(y)\, e^x & = & 0 \\ x - \dfrac{e^x}{y} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y - \ln(y)\, e^x & = & 0 \\ x & = & \dfrac{e^x}{y} \end{array} \right.$$

Deux cas se présentent alors.

- Si $x \leqslant 0$, alors l'équation $x = \dfrac{e^x}{y}$ n'admet pas de solution car $\dfrac{e^x}{y} > 0$.

  La fonction f n'admet donc pas de point critique sur $]-\infty, 0] \times]0,+\infty[$.
- Si $x > 0$, alors, en reprenant les équivalences, comme $x \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y - \ln(y)\, e^x & = & 0 \\ x & = & \dfrac{e^x}{y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \ln(y)\, e^x \\ \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{y}{e^x} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{y}{e^x} & = & \ln(y) \\ \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{y}{e^x} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x} & = & \ln(y) \\ \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{y}{e^x} \end{array} \right.$$

Ensuite :

$$\left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ x & = & \dfrac{e^x}{y} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ x & = & \dfrac{e^x}{e^{\frac{1}{x}}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ x\, e^{\frac{1}{x}} & = & e^x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ e^x - x\, e^{\frac{1}{x}} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ \varphi(x) & = & 0 \end{array}\right.$$

> Finalement, pour tout (x, y) de U, (x, y) est un point critique de f si et seulement si :
> $x > 0$ et $y = e^{\frac{1}{x}}$ et $\varphi(x) = 0$.

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer : $x = \dfrac{e^x}{y} \Leftrightarrow y = \dfrac{e^x}{x}$.
  Il est classique de tenter d'écrire une variable en fonction de l'autre. Ce faisant, on peut remplacer y par son expression en x dans la première ligne : $\dfrac{e^x}{x} = \ln\left(\dfrac{e^x}{x}\right) e^x$. Par des manipulations usuelles, on démontre alors que cette équation est équivalente à : $\varphi(x) = 0$.
- On a opéré ici par disjonction de cas pour pouvoir gérer en amont la difficulté « $x > 0$ ».
  Cependant, on aurait pu traiter ce point au moment où il apparaît dans la démonstration.
  Détaillons la démonstration.
- Soit $(x, y) \in U$. On a :

$$\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y - \ln(y)\, e^x & = & 0 \\ x - \dfrac{e^x}{y} & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} y - \ln(y)\, e^x & = & 0 & (1) \\ x & = & \dfrac{e^x}{y} & (2) \end{array}\right.$$

Or, comme $y > 0$ et $e^x > 0$, on a : (2) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = \dfrac{e^x}{y} & (2) \\ x > 0 & \end{array}\right.$. On en déduit alors :

$$\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} y - \ln(y)\, e^x & = & 0 & (1) \\ x & = & \dfrac{e^x}{y} & (2) \\ x > 0 & & & (3) \end{array}\right.$$

On peut alors reprendre la liste d'équivalences de la démonstration précédente en adjoignant à chaque système la propriété (3).

- Cette manière de procéder peut sembler un peu subtile ou lourde d'écriture.
  Il est aussi possible de raisonner par implication en remarquant que la propriété (2) et le fait que $y \in U$ **implique** $x > 0$. On peut alors une nouvelle fois conclure avec la succession d'équivalences de la démonstration page précédente. Il faut cependant bien comprendre qu'avec cette présentation, on perd la succession d'équivalence (on a introduit une implication dans cette succession). Il faudra alors bien penser à traiter la réciproque, à savoir :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$$

□

11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, \mathrm{e})$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in U$.

- D'après la question précédente :
$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} x & > & 0 \\ y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \varphi(x) & = & 0 \end{array} \right.$$
- Or la fonction φ est :
  × continue sur $]0, +\infty[$ (car elle est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$ d'après ***1.***),
  × strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (d'après ***7***).
  Ainsi, φ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi\big(]0, +\infty[\big)$ où, d'après les questions ***3.*** et ***4.*** :
$$\varphi\big(]0, +\infty[\big) \ = \ \left] \lim_{x \to 0^+} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \right[\ =]-\infty, +\infty[$$
  Or : $0 \in]-\infty, +\infty[$. On en déduit que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.
  De plus, d'après ***7.*** : $\varphi(1) = 0$.

  $\boxed{\text{On en conclut que le réel 1 est l'unique solution de l'équation } \varphi(x) = 0 \text{ sur }]0, +\infty[.}$
- On obtient alors :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & > & 0 \\ y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \varphi(x) & = & 0 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} x & > & 0 \\ y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ x & = & 1 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ x & = & 1 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{1}} \ = \ \mathrm{e} \\ x & = & 1 \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ admet un unique point critique sur } U \text{ de coordonnées } (1, \mathrm{e}).}$ □

12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, \mathrm{e})$?

Démonstration.

- Pour conlure quant à la nature du point critique $(1, \mathrm{e})$, on cherche à déterminer le signe des valeurs propres de la matrice hessienne $H = \nabla^2(f)(1, \mathrm{e})$.
- Or, d'après la question ***9.*** :
$$H \ = \ \begin{pmatrix} -\ln(1)\,\mathrm{e}^1 & 1 - \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} \\[2ex] 1 - \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} & \dfrac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -\mathrm{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$$
- La matrice H est diagonale. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.
  Ainsi : $\mathrm{Sp}\big(H\big) = \big\{-\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}}\big\}$.

$\boxed{\begin{array}{c}\text{La matrice } \nabla^2(f)(1, \mathrm{e}) \text{ admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre} \\ \text{strictement négative. On en déduit que } (1, \mathrm{e}) \text{ n'est pas un extremum local (c'est un point selle).}\end{array}}$ □

13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Démonstration.
La fonction f admet $(1, \mathrm{e})$ comme **unique** point critique sur U, d'après ***11.***. Or, d'après la question précédente, ce point n'est pas un extremum local.

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ n'admet pas d'extremum local sur } U.}$ □

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(On pourra utiliser les résultats de la ***Partie I***).

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ existe} \\ u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n \end{array} \right.$

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $u_0 = 3$. Or : $3\,\mathrm{e}^0 = 3$. D'où : $u_0 \geqslant 3\,\mathrm{e}^0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \text{ existe} \\ u_{n+1} \geqslant 3\,\mathrm{e}^{n+1} \end{array} \right.$).
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et : $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$. En particulier : $u_n > 0$.
    Donc $\varphi(u_n)$ est bien défini. On en déduit que u_{n+1} existe.
  - Par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n \geqslant 3$. Donc : $u_n \in [3, +\infty[$.
    Alors, d'après la question ***5.*** :

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(u_n) & \geqslant & \mathrm{e}\, u_n & & \\ \| & & \geqslant & & \\ u_{n+1} & & \mathrm{e} \times 3\,\mathrm{e}^n & = & 3\,\mathrm{e}^{n+1} \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n.}$$

□

15. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  D'après la question précédente : $u_n \in [3, +\infty[$.
  Ainsi, d'après la question ***5.*** :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(u_n) & \geqslant & \mathrm{e}\, u_n \\ \| & & > \\ u_{n+1} & & u_n \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

- Toujours d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$$

  Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\,\mathrm{e}^n = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème de comparaison : } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

□

16. Écrire un programme **Scilab** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

Démonstration.

```
1 n = 0
2 u = 3
3 while u < 10 ^ 3
4   u = exp(u) - u ⋆ exp(1/u)
5   n = n + 1
6 end
7 disp(n)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  La variable `n` est initialisée à 0.
  La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n), est initialisée à $u_0 = 3$.

```
1 n = 0
2 u = 3
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 6 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$. On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $u_n \geqslant 10^3$. Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $u_n < 10^3$. Pour cela on met en place une structure itérative (while) :

```
3 while u < 10 ^ 3
```

  Tant que $u_n < 10^3$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable `u` :

```
4   u = exp(u) - u ⋆ exp(1/u)
```

  On met alors à jour en conséquence la variable `n` : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1}.

```
5   n = n + 1
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.
  On affiche alors enfin la valeur de la variable `n`

```
7 disp(n)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

17. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{3\,\mathrm{e}^n}$$

- On obtient :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$
  × la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in\ ]-1, 1[$. C'est donc une série convergente. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ l'est donc aussi.
  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

> Par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{u_n}$ est convergente.

□

Exercice 2

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(A, B, C) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{E} \text{ est un espace vectoriel et la famille } (A,B,C) \text{ engendre } \mathcal{E}.}$$

- Montrons que la famille (A, B, C) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ $(*)$.

$$\begin{aligned} \text{Or :} \quad (*) &\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La famille } (A,B,C) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille (A, B, C) est :
  - × libre,
  - × génératrice de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (A,B,C) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

- Il est relativement fréquent de trouver dans les sujets de concours des ensembles de matrices écrites à l'aide de paramètres. Lorsque c'est le cas, on trouve généralement une ou plusieurs questions consistant à démontrer la stabilité de ces ensembles (comme c'est le cas ici en question ***2.*** et ***3.***). Il faut donc être à l'aise sur la compréhension et la manipulation de tels ensembles. Ici, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est autre que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 triangulaires supérieures.
- Dans l'énoncé, on demande de démontrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel engendrée par la famille (A, B, C). Cette famille étant fournie, l'écriture $\mathcal{E} = \text{Vect}\,(A, B, C)$ (c'est le caractère générateur de la famille) permet de démontrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel. Il faut privilégier cette démonstration à celle qui consiste à vérifier les propriétés axiomatiques de la notion d'espace vectoriel. Cependant cette manière de procéder doit aussi être connue car l'ensemble étudié ne se décrit pas toujours naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

(ii) $\mathcal{E} \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{E}$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$.

× Comme $M \in \mathcal{E}$, il existe $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$.

× Comme $N \in \mathcal{E}$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$.

Démontrons que $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{E}$. On a :

$$\lambda \cdot M + \mu \cdot N \;=\; \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 + \mu\, a_2 & \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 \\ 0 & \lambda\, c_1 + \mu\, c_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

avec : $(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2, \lambda\, b_1 + \mu\, b_2, \lambda\, c_1 + \mu\, c_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

□

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

Démonstration.
Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Il existe donc $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 & a_1\, b_2 + b_1\, c_2 \\ 0 & c_1\, c_2 \end{pmatrix} = a_1\, a_2 \cdot A + (a_1\, b_2 + b_1\, c_2) \cdot B + c_1\, c_2 \cdot C$$

Donc $MN \in \text{Vect}\,(A, B, C)$. D'où $MN \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{E} \text{ est bien stable par multiplication.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi rédiger autrement :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 & a_1\, b_2 + b_1\, c_2 \\ 0 & c_1\, c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (a_1\, a_2, a_1\, b_2 + b_1\, c_2, c_1\, c_2) \in \mathbb{R}^3$.

☐

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

- Rappelons tout d'abord :

$$M \text{ est inversible } \Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \Leftrightarrow a \times c - 0 \times b \neq 0 \Leftrightarrow ac \neq 0$$

Commentaire

On se sert ici de la caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2. On pouvait aussi tout simplement remarquer que la matrice M est triangulaire (supérieure). Ainsi, elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

- Supposons M inversible, c'est-à-dire $ac \neq 0$. Dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{c}{ac} \cdot A - \frac{b}{ac} \cdot B + \frac{a}{ac} \cdot C \in \mathcal{E}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } M \in \mathcal{E} \text{ est inversible, } M^{-1} \in \mathcal{E}.}$$

Commentaire

Attention, on ne montre pas dans cette question que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire les matrices carrées d'ordre 2 triangulaires supérieures) sont inversibles !
On démontre simplement que, si une matrice triangulaire supérieure est inversible, alors son inverse est aussi triangulaire supérieure. C'est à nouveau une propriété de stabilité : $\mathcal{E}$ est stable par passage à l'inverse.

☐

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) &= T\ (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)\ T \\ &= (\lambda_1 \cdot TM_1 + \lambda_2 \cdot TM_2)\ T && \textit{(par distributivité à gauche de } \times \textit{ sur +)} \\ &= \lambda_1 \cdot TM_1T + \lambda_2 \cdot TM_2T && \textit{(par distributivité à droite de } \times \textit{ sur +)} \\ &= \lambda_1 \cdot f(M_1) + \lambda_2 \cdot f(M_2) \end{aligned}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{E}$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.
  Remarquons tout d'abord : $T = A + B + C \in \text{Vect}(A, B, C)$. Ainsi $T \in \mathcal{E}$.
  On en déduit, par stabilité de $\mathcal{E}$ par multiplication (question ***3.***) : $TM \in \mathcal{E}$.
  Enfin : $f(M) = TMT = (TM)\,T \in \mathcal{E}$ en utilisant une nouvelle fois la question ***3.***

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

La rédaction choisie ici pour le deuxième point démontre une prise de recul par rapport aux questions précédentes. Cependant, il est aussi possible de résoudre cette question en effectuant un calcul. Plus précisément, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, alors :

$$f(M) \;=\; TMT \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & b+c \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

□

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\det(T) = 1 \times 1 - 0 \times 1 = 1 \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } T \text{ est inversible.}}$$

(l'inverse de T est : $T^{-1} \;=\; \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

- Déterminons $\text{Ker}(f)$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{array}{rcl} M \in \text{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(M) \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & TMT \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & T^{-1}TMT \;=\; T^{-1} \times 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \quad \big(= 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\big) \\ & \Leftrightarrow & MTT^{-1} \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \times T^{-1} \quad \big(= 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\big) \\ & \Leftrightarrow & M \;=\; 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \end{array}$$

  Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$ et l'endomorphisme f est injective.
- Enfin, comme f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ de dimension **finie** :

$$f \text{ est injective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ est bijective}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un automorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

- On utilise ici un cas particulier de la proposition suivante :
  Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions **finies** tels que $\dim(E) = \dim(F)$.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ bijective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ injective} \;\Leftrightarrow\; f \text{ surjective}$$

- Attention à ne pas confondre :
  × $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, matrice qui intervient dans la définition de f.
  × $F \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, matrice représentative de f dans la base (A, B, C) (*cf* question ***7.***).

□

6. Est-ce que T est diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice T étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(T) = \{1\}.}$$

- Démontrons que T n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que T est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de T telles que $T = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de T. Ainsi $D = I$ et :

$$T \ = \ P\,I_3\,P^{-1} \ = \ P\,I_3\,P^{-1} \ = \ I_3$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{La matrice } T \text{ n'est donc pas diagonalisable.}}$$

□

On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

Démonstration.

- $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 1 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(A)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(B)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ 0 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}\big(f(C)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Donc } F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

8. Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Rappelons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } f \ &\Leftrightarrow \ \lambda \text{ valeur propre de } F \\ &\Leftrightarrow \ F - \lambda\, I_3 \text{ n'est pas inversible} \end{aligned}$$

- Or on a :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(F - \lambda\, I_3) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\[2ex]
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\[2ex]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)\, L_1}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -(1-\lambda)^2 & -(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).
Elle (et donc $F - \lambda\, I$) est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
F - \lambda\, I \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 1 = 0 \ \texttt{OU}\ \ -(1-\lambda)^2 = 0 \ \texttt{OU}\ \ -(1-\lambda) = 0 \\
& \Leftrightarrow & (1-\lambda) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 1
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(F) = \{1\}.}$$

- Déterminons $E_1(f)$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.

Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C$.

Autrement dit : $U = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(M) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
M \in E_1(f) & \Leftrightarrow & (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\
& \Leftrightarrow & (F - I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ a & + & c & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \ a = -c \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(f) & = & \{M \in \mathcal{E} \mid (f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(M) = 0_{\mathcal{E}}\} \\
& = & \{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid a = -c\} \\
& = & \{-c \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \{c \cdot (-A + C) + b \cdot B \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \mathrm{Vect}\,(-A + C, B)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_1(f) = \mathrm{Vect}\,(-A + C, B).}$$

- La famille $(-A+C, B)$ est :
  - × génératrice de $E_1(f)$,
  - × libre car constituée de deux matrices non colinéaires.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (-A+C, B) \text{ est une base de } E_1(f) \text{ et ainsi : } \dim\big(E_1(f)\big) = \mathrm{Card}(-A+C, B) = 2.}$$

□

Commentaire

- Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathcal{E}})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathcal{E}$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $U = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(M) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont bien deux représentations différentes de la même matrice M, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}_{\in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(-A+C, B)}_{E_1(f)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{E_1(F)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(F)$ par lecture de la matrice $F - \lambda\, I$.

  Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 1$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(F)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(F - I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

  Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il y a deux possibilités :

  - × si $x = 0$ alors forcément $z = 0$ car sinon on crée un coefficient non nul en $2^{\text{ème}}$ position du vecteur résultat. Enfin, si $x = z = 0$, alors toute valeur de y convient pour créer une combinaison linéaire nulle. On peut prendre par exemple $y = 1$. Ainsi :

$$E_1(F) \;\supset\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

  - × si $x \neq 0$ alors forcément $z = -x$. En prenant par exemple $x = 1$ on obtient :

$$E_1(F) \;\supset\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  Finalement : $E_1(F) \;\supset\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  Et l'égalité est vérifiée pour des raisons de dimension (il est simple de démontrer : $\mathrm{rg}(F - I_3) = 1$ ce qui permet de conclure, par théorème du rang : $\dim\big(E_1(F)\big) = 2$).

9. Est-ce que f est diagonalisable ?

Démonstration.
D'après ce qui précède, f admet 1 comme une unique valeur propre. Or :

$$\dim\big(E_1(f)\big) = 2 \neq 3 = \dim\big(\mathcal{E}\big)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi procéder par l'absurde comme en question ***6***. Rappelons la rédaction.
Supposons que f est diagonalisable. Alors $F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$ l'est également.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de F telles que $F = PDP^{-1}$.
Or 1 est la seule valeur propre de F. Ainsi $D = I$ et $F = P\,D\,P^{-1} = P\,I_3\,P^{-1} = I_3$.
Absurde ! □

10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Deux cas se présentent.

- Si $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ alors $f(M) = f\big(0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\big) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ car f est linéaire.
  Et comme : $\lambda\, 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ alors $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ est bien solution de l'équation.
- Si $M \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ alors on a :

$$\begin{array}{rcl} f(M) = \lambda M & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } f \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \end{array}$$

  Comme on a supposé $\lambda \neq 1$, l'équation $f(M) = \lambda M$ n'a pas de solution si $M \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 1, \text{ l'unique solution de l'équation } f(M) = \lambda\, M \text{ est } M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.}$$ □

Commentaire

Il était aussi possible de résoudre directement l'équation $f(M) = \lambda M$.
Détaillons la rédaction. Comme $M \in \mathcal{E}$, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
f(M) = \lambda M & \Longleftrightarrow & TMT = \lambda M \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\, a & & & & & = & 0 \\ a & + & (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & & & (1-\lambda)\, c & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_3}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & & & & & = & 0 \\ a & + & (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & & & = & 0 \\ (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & c & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ (1-\lambda)\, b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ a = b = c = 0 \right.
\end{array}$$

On en conclut : $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $H^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.
  (ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2$, $H^k = H^2 \ H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \ H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$)

- Soit $a \in \mathbb{R}$.
  Les matrices I et $a\,H$ commutent car I commute avec toutes les matrices carrée du même ordre.

- Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll} (I + aH)^n & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} \, (aH)^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, H^k & \textit{(car : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ I^{n-k} = I\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k \, H^k \ + \ \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k \, H^k & \textit{(cette décomposition est valide car } n \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k \, H^k & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ H^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\textit{)} \\ & = & \binom{n}{0} a^0 \, H^0 + \binom{n}{1} a^1 \, H^1 & \\ & = & I + a\,n\,H \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

- De plus : $(I + aH)^0 = I$ et $I + a \times 0 \cdot H = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ (I + a\,H)^n = I + a\,n\,H.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la somme la plus à droite est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.

- Ici, la matrice H vérifie : $\forall k \geqslant 2$, $H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ et $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$). □

12. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On remarque que : $F = I + H = I + 1 \cdot H$.
D'après la question ***9.*** appliquée à $a = 1$, on obtient : $F^n = I + 1 \times n \cdot H$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ F^n = I + n\,H.}$$

□

13. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Démonstration.

- D'après la question ***9.***, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $(I + a\,H)^3 = I + 3\,a\,H$.
  Or $F = I + 1 \cdot H$. Donc, en choisissant $a = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$\left(I + \frac{1}{3}\,H\right)^3 = I + 3 \times \frac{1}{3} \cdot H = I + H = F$$

$$\boxed{\text{Donc en posant } G = I + \frac{1}{3}\,H, \text{ on obtient : } G^3 = F.}$$

- On rappelle que $F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$.
  On considère alors l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ tel que $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g) = G$.
  D'après la relation du point précédent, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g^3) = \big(\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g)\big)^3 = G^3 = F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$$

  L'application $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(.)$ étant un isomorphisme, on obtient, par injectivité : $g^3 = f$.

$$\boxed{\text{On a donc bien exhibé un endomorphisme } g \text{ de } \mathcal{E} \text{ tel que } g \circ g \circ g = f.}$$

Commentaire

Il faut retenir le schéma classique développé dans cette question :
(i) on démontre une propriété sous forme matricielle,
(ii) on en déduit une propriété sur les endomorphismes par la passerelle matrice / endomorphisme.

□

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. a) Exprimer l'évenement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3.
En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

Démonstration.
Rappelons qu'on effectue $n + 1 = 4$ tirages successifs (et avec remise) dans l'urne.

- L'événement $[X_3 = 4]$ est réalisé si et seulement si c'est le $4^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que :
  × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au 1^{er} tirage.
  × le numéro obtenu au $3^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage.
  × le numéro obtenu au $4^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au $3^{\text{ème}}$ tirage.
  Les 3 premiers tirages constituent donc une séquence strictement décroissante d'entiers de l'ensemble $[\![1, 3]\!]$ (l'urne ne contenant que les boules 1, 2 et 3).
  On a donc forcément obtenu 3 au premier tirage, 2 au $2^{\text{ème}}$ et 1 au $3^{\text{ème}}$.
  (le numéro obtenu au $4^{\text{ème}}$ tirage sera alors forcément supérieur ou égal à 1)

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X_3 = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1].}$$

Commentaire

- Il est à noter que la décomposition de l'événément $[X_3 = 4]$ démontre la bonne compréhension et permet donc, à elle seule, d'obtenir la totalité des points alloués sur cette étape.
- Sur un exercice de probabilités discrètes, il faut prendre le temps en début d'énoncé de bien comprendre l'expérience aléatoire et les v.a.r. en présence. C'est aussi le but de la rédaction précédant la décomposition de l'événement : prendre le temps de caractériser la réalisation de l'événément permet de rentrer dans le sujet.

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) &= \mathbb{P}\big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([N_1 = 3]\big) \times \mathbb{P}\big([N_2 = 2]\big) \times \mathbb{P}\big([N_3 = 1]\big) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} && \textit{(car pour tout } i \in [\![1,3]\!], N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) = \frac{1}{27}}$$

□

b) Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

Démonstration.

- L'événement $[X_3 = 2]$ est réalisé si et seulement si c'est le $2^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au 1^{er} tirage (les numéros obtenus aux $3^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ tirages ne sont pas contraints). Trois cas se présentent :
  × si on a obtenu 1 au premier tirage :
    alors on a pu tirer n'importe quel numéro au deuxième tirage.
  × si on a obtenu 2 au premier tirage :
    alors on a tiré les numéros 2 ou 3 au deuxième tirage.
  × si on a obtenu 3 au premier tirage :
    alors on a obligatoirement tiré le numéro 3 au deuxième tirage.

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} [X_3 = 2] & = & [N_1 = 1] \cap \Big([N_2 = 1] \cup [N_2 = 2] \cup [N_2 = 3] \Big) \\ & \cup & [N_1 = 2] \cap \Big([N_2 = 2] \cup [N_2 = 3] \Big) \\ & \cup & [N_1 = 3] \cap \Big([N_2 = 3] \Big) \\ & = & \Big([N_1 = 1] \cap \Omega \Big) \cup \Big([N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \Big) \cup \Big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \Big) \end{array}$$

$$\boxed{[X_3 = 2] = [N_1 = 1] \cup \Big([N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \Big) \cup \Big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \Big)}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) & \\ = & \mathbb{P}\big([N_1 = 1] \big) + \mathbb{P}\big([N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \big) + \mathbb{P}\big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \big) & \\ = & \mathbb{P}\big([N_1 = 1] \big) + \mathbb{P}\big([N_1 = 2] \big) \times \mathbb{P}\big([N_2 \geqslant 2] \big) + \mathbb{P}\big([N_1 = 3] \big) \times \mathbb{P}\big([N_2 = 3] \big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\ = & \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+2+1}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} & \textit{(pour tout } i \in [\![1,3]\!]\textit{, } N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) = \dfrac{2}{3}}$$

- La famille $\big([X_3 = i] \big)_{i = [\![2,4]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) + \mathbb{P}\big([X_3 = 3] \big) + \mathbb{P}\big([X_3 = 4] \big) = 1$$

  Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big([X_3 = 3] \big) & = & 1 - \mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) - \mathbb{P}\big([X_3 = 4] \big) \\ & = & 1 - \dfrac{1}{27} - \dfrac{2}{3} \\ & = & \dfrac{27}{27} - \dfrac{1}{27} - \dfrac{18}{27} = \dfrac{8}{27} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3 = 3] \big) = \dfrac{8}{27}}$$

□

2. Calculer l'espérance de X_3.

Démonstration.

- La v.a.r. X_3 admet une espérance car elle est finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_3) & = & 2 \times \mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) + 3 \times \mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big) + 4 \times \mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) \\ & = & 2 \times \dfrac{2}{3} + 3 \times \dfrac{8}{27} + 4 \times \dfrac{1}{27} \\ & = & \dfrac{36 + 24 + 4}{27} \ = \ \dfrac{64}{27} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_3) = \frac{64}{27}}$$

□

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- À chaque instant k, l'expérience consiste au tirage d'une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Cette expérience possède donc n issues équiprobables.
  La v.a.r. N_k désigne le numéro obtenu lors de ce tirage.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } N_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

- La v.a.r. N_k possède une espérance et une variance car suit une loi usuelle.

  $$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(N_k) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_k) = \frac{n^2 - 1}{12}}$$

□

4. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

Démonstration.

- L'événement $[X_n = n+1]$ est réalisé si et seulement si c'est le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que :
  × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au 1^{er} tirage.
  × ...
  × le numéro obtenu au $n^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  × le numéro obtenu au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au $n^{\text{ème}}$ tirage.

  Ainsi, les numéros obtenus lors des n premiers tirages forment une séquence strictement décroissante. On en déduit, comme en question ***1.a)*** :

  $$[X_n = n+1] = [N_1 = n] \cap \ldots \cap [N_n = 1]$$

  $$\boxed{\text{On en déduit, comme en question } \textbf{\textit{1.a)}} : [X_n = n+1] = \bigcap_{i=1}^{n} [N_i = n+1-i].}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X_n = n+1]\big) & = & \mathbb{P}\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [N_i = n+1-i]\big) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([N_i = n+1-i]\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} \ = \ \left(\dfrac{1}{n}\right)^n & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!], \ N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_n = n+1]\big) = \left(\frac{1}{n}\right)^n}$$

□

5. Montrer, pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
Si l'événement $[N_1 = i]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée i lors du 1er tirage.
L'événement $[X_n = 2]$ est alors réalisé si on a obtenu une boule portant un numéro supérieur ou égal à i lors du 2ème tirage, c'est-à-dire portant un numéro dans l'ensemble $[\![i,n]\!]$.
Il y a $n-i+1$ boules vérifiant cette condition.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on en déduit :}\\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}\end{array}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi effectuer cette démonstration en revenant à la définition de probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{[N_1=i]}\big([X_n = 2]\big) = \frac{\mathbb{P}\big([N_1 = i] \cap [X_n = 2]\big)}{\mathbb{P}\big([N_1 = i]\big)}$$

L'événement $[N_1 = i] \cap [X_n = 2]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu la boule numérotée i au 1er tirage et une boule portant un numéro supérieur ou égal lors du 2ème tirage. Ainsi :

$$[N_1 = i] \cap [X_n = 2] = [N_1 = i] \cap [i \leqslant N_2 \leqslant n]$$

D'où :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([N_1 = i] \cap [X_n = 2]\big) & = & \mathbb{P}\left([N_1 = i] \cap [i \leqslant N_2 \leqslant n]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\big([N_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([i \leqslant N_2 \leqslant n]\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\
& = & \mathbb{P}\big([N_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{k=i}^{n} [N_2 = k]\big) &
\end{array}$$

Enfin, les événements de la réunion étant 2 à 2 incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\bigcup_{k=i}^{n} [N_2 = k]\big) = \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}\big([N_2 = k]\big) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-i+1}{n}$$

□

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}(\,[X_n = 2]\,)$.

Démonstration.
La famille $\big(\,[N_1 = i]\,\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\,[X_n = 2]\,) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\,[N_1 = i] \cap [X_n = 2]\,) & \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\,[N_1 = i]\,) \times \mathbb{P}_{[N_1=i]}(\,[X_n = 2]\,) & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!], \\
 & & & \mathbb{P}(\,[N_1 = i]\,) \neq 0\textit{)} \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n}\, \dfrac{n-i+1}{n} & \textit{(d'après la question précédente)} \\
 & = & \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{j}{n^2} & \textit{(en posant } j = n-i+1\textit{)} \\
 & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{j=1}^{n} j \ = \ \dfrac{1}{n^2}\, \dfrac{n(n+1)}{2} \ = \ \dfrac{n+1}{2n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\,[X_n = 2]\,) = \dfrac{n+1}{2n}}$$

□

7. Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.
En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n}{k}$.
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

Démonstration.

- L'événement $[X_n > k]$ est réalisé si et seulement si la boule portant un numéro supérieur ou égal au celle du tirage précédent est tirée au mieux lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  Cela signifie que :
  × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au 1^{er} tirage.
  × ...
  × le numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $(k-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  Ainsi, les numéros obtenus lors des k premiers tirages forment une séquence strictement décroissante. $\boxed{\text{On en déduit : } [X_n > k] = [N_1 > N_2] \cap [N_2 > N_3] \cap \ldots \cap [N_{k-1} > N_k].}$

Commentaire

L'énoncé présente l'écriture $[N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.

- Rappelons tout d'abord que le symbole $>$ est utilisé pour représenter la relation binaire liant 2 réels a et b : on note $a > b$ si a est strictement plus petit que b. Du fait du caractère transitif de cette relation, on se permet l'abus de notation : $a > b > c$ où c est un réel.
  Rappelons : $a > b > c \ \Leftrightarrow\ (a > b \ \texttt{ET}\ b > c)$.
- Ces rappels étant faits, revenons à l'événement considéré :

$$\begin{array}{rl}
 & [N_1 > N_2 > \ldots > N_k] \\
= & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega) > \ldots > N_k(\omega)\ \} \\
= & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega) \ \texttt{ET}\ N_2(\omega) > N_3(\omega) \ \texttt{ET}\ \ldots \ \texttt{ET}\ N_{k-1}(\omega) > N_k(\omega)\} \\
= & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega)\ \} \ \cap\ \ldots\ \cap\ \{\ \omega \in \Omega \mid N_{k-1}(\omega) > N_k(\omega)\} \\
= & [N_1 > N_2] \cap [N_2 > N_3] \cap \ldots \cap [N_{k-1} > N_k]
\end{array}$$

- L'événement $[X_n > k]$ est réalisé par tous les $(n+1)$-tirages commençant par une séquence strictement décroissante de k entiers.
  Un tel $(n+1)$-tirage est entièrement déterminé par :
  - × les k premiers entiers formant une séquence strictement décroissante : $\binom{n}{k}$ possibilités.
    En effet, une k-séquence strictement décroissante d'entiers de $[\![1, n]\!]$ est entièrement déterminée par le choix des k entiers différents de $[\![1, n]\!]$ constituant cette séquence. Une fois ces k entiers choisis, ils sont rangés dans l'ordre décroissant, ce qui ne forme qu'une seule k-séquence.
    Autrement dit, une partie à k éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ fournit une et une seule k-séquence strictement décroissante d'entiers de $[\![1, n]\!]$. Il y a donc une bijection entre l'ensemble des k-séquence strictement décroissante et l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$.
  - × le $(k+1)^{\text{ème}}$ élément : n possibilités.
  - × ...
  - × le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément : n possibilités.

  Il y a donc en tout $\binom{n}{k}\ n^{(n+1)-(k+1)+1} = \binom{n}{k}\ n^{n+1-k}$ tels $(n+1)$-tirages.
  L'univers Ω, formé de tous les $(n+1)$-tirages est de cardinal : $\text{Card}(\Omega) = n^{n+1}$.
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}\big(\,[X_n > k]\,\big) = \frac{\text{Card}\,\big(\,[X_n > k]\,\big)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k}\ n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$$
  $$\boxed{\mathbb{P}\big(\,[X_n > k]\,\big) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}}$$
- Vérifions maintenant que cette formule est aussi vérifiée en $k = 0$ et $k = 1$.
  - × Si $k = 0$:
    - D'une part : $\dfrac{1}{n^0}\dbinom{n}{0} = 1$.
    - D'autre part : $[X_n > 0] = \Omega$ car X_n est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
      Ainsi, $\mathbb{P}\big(\,[X_n > 0]\,\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  - × Si $k = 1$:
    - D'une part : $\dfrac{1}{n^1}\dbinom{n}{1} = \dfrac{1}{n}\ n = 1$.
    - D'autre part : $[X_n > 1] = \Omega$ car X_n est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
      Ainsi, $\mathbb{P}\big(\,[X_n > 0]\,\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } k = 0 \text{ et } k = 1.}$$
□

8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.
Remarquons tout d'abord que, comme X_n **est à valeurs entières** :
$$[X_n > k-1] = [X_n = k] \cup [X_n > k]$$
Les événements $[X_n = k]$ et $[X_n > k]$ sont incompatibles. On en déduit :
$$\mathbb{P}([X_n > k-1]) = \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}([X_n > k])$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k]).}$$
□

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k])$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X_n admet une espérance car elle est finie.
- De plus :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(X_n) \\
= \ & \sum_{k \in X_n(\Omega)} k \ \mathbb{P}([X_n = k]) \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k \, \mathbb{P}([X_n = k]) \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k \left(\ \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \ \mathbb{P}([X_n > k]) \right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k \, \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \, \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} (k+1) \ \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \, \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n > k]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k \ \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 1 \times \mathbb{P}([X_n > 1]) + \cancel{\sum_{k=2}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n > k])} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - \left(\cancel{\sum_{k=2}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n > k]} + (n+1) \ \mathbb{P}([X_n > n+1]) \right) \\
= \ & \mathbb{P}([X_n > 0]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - (n+1) \ \mathbb{P}([X_n > n+1]) && \textit{(car } [X_n > 1] = \Omega = [X_n > 0]\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - (n+1) \ \cancel{\mathbb{P}([X_n > n+1])} && \textit{(car } [X_n > n+1] = \varnothing\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n > k] \big)}$$

Commentaire

La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$k \ \mathbb{P}([X = k]) = (k-1) \ \mathbb{P}([X > k-1]) - k \ \mathbb{P}([X > k]) + \mathbb{P}([X > k-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} k \ \mathbb{P}([X_n = k]) \ &= \ \sum_{k=2}^{n+1} \Big((k-1) \ \mathbb{P}([X_n > k-1]) - k \ \mathbb{P}([X_n > k]) \Big) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}([X_n > k-1]) \\
&= \ (2-1) \ \mathbb{P}([X_n > 2-1]) - (n+1) \ \mathbb{P}([X_n > n+1]) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}([X_n > k-1]) \\
&= \ -(n+1) \ \mathbb{P}([X_n > n+1]) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

- Il reste à effectuer ce calcul de somme.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} & \textit{(d'après la question 7)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} 1^{n-k} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^k & \\ & = & \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n & \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

□

10. Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Notons tout d'abord que, d'après la question ***8.*** :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) \ = \ \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])$$

Deux cas se présentent.

× Si $k \in [\![2, n]\!]$: on raisonne par équivalence.

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} & = & \mathbb{P}([X_n = k]) & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} & = & \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k]) & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} & = & \dfrac{1}{n^{k-1}}\dbinom{n}{k-1} - \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} & \textit{(d'après la question 7. avec } k-1 \in [\![1, n-1]\!] \textit{ et } k \in [\![2, n]\!]\textit{)} \\ \Leftrightarrow & (k-1)\dbinom{n+1}{k} & = & n\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n}{k} & \textit{(en multipliant par } n^k > 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & k\dbinom{n+1}{k} - \dbinom{n+1}{k} & = & n\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n}{k} & \\ \Leftrightarrow & (n+1)\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n+1}{k} & = & n\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n}{k} & \textit{(en appliquant l'égalité } k\dbinom{m}{k} = m\dbinom{m-1}{k-1} \textit{ en } m = n+1\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \cancel{n\dbinom{n}{k-1}} + \dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n+1}{k} & = & \cancel{n\dbinom{n}{k-1}} - \dbinom{n}{k} & \\ \Leftrightarrow & \dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} & = & \dbinom{n+1}{k} & \textit{(en réordonnant)} \end{array}$$

La dernière égalité n'est autre qu'une instance de la formule du triangle de Pascal.
La dernière égalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![2, n]\!] : \mathbb{P}([X_n = k]) \ = \ \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.}$$

× Si $k = n+1$:
- D'une part :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n = n+1]) &= \mathbb{P}([X_n > n]) - \cancel{\mathbb{P}([X_n > n+1])} && \textit{(car X_n est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$)} \\ &= \frac{1}{n^n}\binom{n+1}{n} && \textit{(d'après la question 7.)}\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)-1}{n^{n+1}}\binom{n+1}{n+1} = \frac{n}{n^{n+1}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la propriété est aussi vérifiée en } k = n+1.}$$

□

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$ et soit $n \geqslant k$.
(on peut prendre n aussi grand que souhaité car on s'intéresse à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ d'une quantité dépendant de n)

D'après la question précédente, comme $k \in [\![2, n+1]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n = k]) &= \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} \\ &= \frac{k-1}{n^k}\,\frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} \\ &= \frac{k-1}{k!}\,\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}}{n^k} \\ &= \frac{k-1}{k!}\,\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,\dots\,((n+1)-(k-1))}{n^k} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k-1}{k!}\,\frac{n^k}{n^k} = \frac{k-1}{k!}\end{aligned}$$

En effet, le numérateur apparaît comme produit de k termes tous équivalents, lorsque n est dans un voisinage de $+\infty$, à n.

$$\boxed{\text{Comme } \lim_{n\to+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{k-1}{k!}, \text{ on a bien : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \frac{k-1}{k!}.}$$

□

12. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{k-1}{k!}$$

Démonstration.
Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{N} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \cancel{\frac{1}{0!}}\right) - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} - \cancel{\frac{1}{0!}} - \frac{1}{1!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} + 1 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Cette limite est obtenue en reconnaissant les sommes partielles d'ordre $N-1$ et N de la série exponentielle de paramètre 1 qui est une série convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!} \text{ est convergente, de somme } \sum_{k\geqslant 2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = 1.}$$

Commentaire

- On prêtera toujours attention à la formulation des questions de l'énoncé. Une question du type « cette série est-elle convergente ? » suggère que la série en question ne l'est sans doute pas. On orientera donc ses recherches en ce sens dans un premier temps.
- Pour une question du type « montrer que cette série est convergente » sans que le calcul de somme soit demandé, on pensera en priorité à un théorème de comparaison des séries à termes positifs.
- Ici, on est confonté à la question « montrer que cette série est convergente et calculer sa somme ». Le calcul de la somme (comme limite de le somme partielle) démontre la convergence et fournit le résultat du calcul demandé. C'est cette méthode qu'il faut regarder en priorité pour ce type de questions.
- La deuxième partie de la question aurait pu être formulée sous la forme « démontrer que la suite $\left(\frac{k-1}{k!}\right)_{k\geqslant 2}$ fournit une loi de probabilité ». Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall k \geqslant 2,\ \frac{k-1}{k!} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \ = \ 1$$

C'est bien le cas ici. On considère alors une v.a.r. Z discrète qui suit cette loi. □

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} k\ \mathbb{P}\big([Z=k]\big) &= \sum_{k=2}^{N} k\ \frac{k-1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}\end{aligned}$$

Or : $\sum\limits_{k=0}^{N-2} \dfrac{1}{k!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ en reconnaissant la somme partielle d'ordre $N-2$ de la série exponentielle de paramètre 1.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. admet une espérance et } \mathbb{E}(Z) = \mathrm{e}^1.}$$

- Par ailleurs, on a vu en question ***9.*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Or : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ \dfrac{1}{n} = 1$.

On en déduit, par composition de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(Z) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n).}$$

Commentaire

On a démontré :

1) X_n converge en loi vers Z (question ***11.***),

2) $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z)$ (dans cette question).

Cela pourrait laisser penser que **1)** implique **2)**... Il n'en est rien :

$$X_n \text{ converge en loi vers } Z \quad \not\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z)$$

De manière générale, on retiendra que la convergence en loi **n'implique pas** la convergence des moments (et vice versa évidemment).

□