EML 2014

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3,+\infty[,\ \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\,x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R}\times\ ]0,+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy - \mathrm{e}^x \ln(y)$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.

9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x,y).

10. Établir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0$$

11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1,\mathrm{e})$.

12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1,\mathrm{e})$?

13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)

15. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

16. Écrire un programme **Scilab** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

17. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Exercice 2

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. Est-ce que T est diagonalisable ?

On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

8. Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

9. Est-ce que f est diagonalisable ?

10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

12. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

13. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.

Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.

Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.

L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. *a)* Exprimer l'évenement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

b) Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

4. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

5. Montrer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

7. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.

En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n}{k}$.

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!], \mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k])$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

10. Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{n^k} \dbinom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

12. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.