ESSEC-I 2013

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine.
On étudie le modèle suivant :

× le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;

× les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;

× On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;

× la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :
$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$
et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée**.

× pour tout entier naturel j, on pose $p_j = \mathbb{P}([N = j])$, $q_j = \mathbb{P}([U_1 = j])$ et $r_j = \mathbb{P}([X = j])$.

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La v.a.r. X_n est une somme de n v.a.r. **indépendantes** de loi $\mathcal{B}(p)$, c'est-à-dire de loi $\mathcal{B}(1, p)$.

$$\boxed{\text{Par stabilité de la loi binomiale : } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

Commentaire

On rappelle la propriété de stabilité de la loi binomiale :
Soit $X_1, \ldots, X_k$ des v.a.r. **indépendantes** telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, …, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.
Alors :
$$\sum_{i=1}^{k} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$$

□

2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n$.

Démonstration.
La famille $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} r_j = \mathbb{P}([X=j]) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n]\cap[X=j]) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([N=n]\cap\left[\sum\limits_{k=1}^{N} U_k = j\right]\right) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([N=n]\cap\left[\sum\limits_{k=1}^{n} U_k = j\right]\right) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n]\cap[X_n=j]) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n])\times\mathbb{P}([X_n=j]) \qquad \textit{(car les v.a.r. } N \textit{ et } X_n \textit{ sont indépendantes par lemme des coalitions)} \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\times\mathbb{P}([X_n=j]) \end{array}$$

$$\boxed{\forall j\in\mathbb{N},\ r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n=j])\, p_n}$$

Commentaire

- Détaillons l'utilisation du lemme des coalitions.
  - × D'après l'énoncé, toutes les v.a.r. de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes de N.
    En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les v.a.r. $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes de N.
  - × Donc, par le lemme des coalitions, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ est indépendante de N.
- D'après l'énoncé, la variable aléatoire N est « à valeurs dans $\mathbb{N}$ ». Cela signifie exactement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (et non $N(\Omega) = \mathbb{N}$).
- On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$. On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide.

□

3. Dans cette question *3.*, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0, 1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Donc $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
- De plus, $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)$. Donc $N(\Omega) = [\![0, m]\!]$.
- Or : $X = \sum\limits_{k=1}^{N} U_k$.
  On en déduit :
  × au minimum, la v.a.r. X prend la valeur 0,
  × au maximum, la v.a.r. X prend la valeur $m \times 1 = m$.
  Ainsi : $X(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$.

- Donc, si $j > m$, alors : $[X = j] = \varnothing$. D'où :

$$r_j \;=\; \mathbb{P}([X = j]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j > m : r_j = 0.}$$

□

b) Établir que pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, m]\!]$.
La famille $([N = n])_{n \in [\![0,m]\!]}$ forme un système complet d'événements.
En procédant de la même manière qu'en question ***2.***, on obtient :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{\substack{n = 0 \\ j \in X_n(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &\quad + \cancel{\sum_{\substack{n = 0 \\ j \notin X_n(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n])} \qquad \textit{(car si } j \notin X_n(\Omega) \textit{ alors } [X_n = j] = \varnothing\textit{)} \\ &= \sum_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n \in [\![0, m]\!] \\ j \in X_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant n \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant m \\ j \leqslant n \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant n \leqslant m \\ \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n} \qquad \textit{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \textit{ et } N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![0, m]\!],\ r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}}$$

Commentaire

- En question ***2.***, on savait seulement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Le meilleur système complet d'événements que nous pouvions considérer était donc $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$ (contenant potentiellement plusieurs fois l'ensemble vide).
- Ici, d'après la question précédente, nous pouvons considérer le système complet d'événements plus précis $([N = n])_{n \in [\![0,m]\!]}$.

□

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$: $\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.

Démonstration.
Soit $(j, n, m) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$.

- D'une part :

$$\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \frac{\cancel{n}!}{j!\,(n-j)!}\ \frac{m!}{\cancel{n}!\,(m-n)!} = \frac{m!}{j!\,(n-j)!\,(m-n)!}$$

- D'autre part :

$$\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j} = \frac{m!}{j!\,\cancel{(m-j)!}}\ \frac{\cancel{(m-j)!}}{(n-j)!\,\big((m-\cancel{j})-(n-\cancel{j})\big)!} = \frac{m!}{j!\,(n-j)!\,(m-n)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (j,n,m) \in \mathbb{N}^3 \text{ tel que } 0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m : \binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à m éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient m individus)
On souhaite alors construire une partie P à n éléments de cet ensemble contenant j éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de n individus dans lequel figurent j représentants de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à n éléments de E : $\binom{m}{n}$ possibilités.
On distingue ensuite j éléments de cet ensemble P : $\binom{n}{j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les n individus et on élit ensuite j représentants de ces individus)
Ainsi, il y a $\binom{n}{j}\binom{m}{n}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, les j éléments à distinguer : $\binom{m}{j}$ possibilités.
On choisit ensuite $n-j$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant les j éléments précédents : $\binom{m-j}{n-j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les j représentants puis on leur adjoint un groupe de $n-j$ individus)
Ainsi, il y a $\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat.

□

d) En déduire, pour tout $j \in [\![0,m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^{\ell} (1-\pi)^{m-j-\ell}$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0,m]\!]$.

$$\begin{array}{rcll}
r_j & = & \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n} & \textit{(d'après \textbf{3.b)})} \\
& = & \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} \binom{m}{n} p^j (1-p)^{n-j} \, \pi^n (1-\pi)^{m-n} & \\
& = & \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j} p^j (1-p)^{n-j} \, \pi^n (1-\pi)^{m-n} & \textit{(d'après \textbf{3.c)})} \\
& = & \binom{m}{j} p^j \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j} \, \pi^n (1-\pi)^{m-n} & \\
& = & \binom{m}{j} p^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^{\ell} \, \pi^{\ell+j} \, (1-\pi)^{m-(\ell+j)} & \textit{(avec le décalage d'indice } \ell = n-j\textit{)} \\
& = & \binom{m}{j} p^j \, \pi^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^{\ell} \, \pi^{\ell} \, (1-\pi)^{m-j-\ell} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } j \in [\![0,m]\!] : \ r_j = \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\,\pi\big)^{\ell} (1-\pi)^{m-j-\ell}.}$$

□

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)*** : $X(\Omega) \subset [\![0,m]\!]$.
- Soit $j \in [\![0,m]\!]$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll}
r_j & = & \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\,\pi\big)^{\ell} (1-\pi)^{m-j-\ell} & \\
& = & \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \big((1-p)\,\pi + (1-\pi)\big)^{m-j} & \textit{(par la formule du binôme de Newton)} \\
& = & \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \big(\cancel{\pi} - p\,\pi + 1 - \cancel{\pi}\big)^{m-j} & \\
& = & \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \, (1-p\,\pi)^{m-j} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\,\pi).}$$

□

4. On suppose dans cette question *4.* que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :

$$r_j = \mathrm{e}^{-j}\,\frac{(\lambda\,p)^j}{j!}\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{1}{(n-j)!}\big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question *2.* :

$$\begin{array}{rcll}
r_j & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\,p_n & \\
& = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\,\mathbb{P}([N = n]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{\substack{n=0\\ j\in X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\,\mathbb{P}([N = n]) + \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{n=0\\ j\notin X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\,\mathbb{P}([N = n])} & \textit{(car } [X_n = j] = \varnothing\textit{)}\\
& = & \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\,\mathbb{P}([N = n]) &
\end{array}$$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ d'après la question *1.*, alors $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Donc la dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n \in [\![0,+\infty[\![\\ j \in X_n(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ j \in \mathbb{N}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n \\ j \in \mathbb{N}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \\ j \leqslant n \\ j \in \mathbb{N}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant n \\ \\ j \in \mathbb{N}\end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
r_j & = & \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\,\mathbb{P}([N = n]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}\,\frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} & \textit{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \textit{ et } N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)\textit{)}\\
& = & \mathrm{e}^{-\lambda}\,p^j \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j}\frac{1}{n!}(1-p)^{n-j}\lambda^n &
\end{array}$$

Or : $\displaystyle\binom{n}{j}\,\frac{1}{n!} = \frac{\cancel{n!}}{j!\,(n-j)!}\,\frac{1}{\cancel{n!}} = \frac{1}{j!\,(n-j)!}$.
On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
r_j & = & \mathrm{e}^{-\lambda}\,p^j \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{j!\,(n-j)!}(1-p)^{n-j}\lambda^n \\
& = & \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{p^j}{j!} \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!}(1-p)^{n-j}\lambda^{(n-j)+j} \\
& = & \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{(\lambda\,p)^j}{j!} \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!}(1-p)^{n-j}\lambda^{n-j}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } j \in \mathbb{N} : r_j = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda\,p)^j}{j!}\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{1}{(n-j)!}\big(\lambda\,(1-p)\big)^{n-j}.}$$

□

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Donc : $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
  De plus, comme $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$: $N(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par définition de } X : X(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} r_j & = & \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{(\lambda\, p)^j}{j!} \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-j)!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{n-j} & \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{(\lambda\, p)^j}{j!} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\ell!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{\ell} & \textit{(avec le décalage d'indice } \ell = n-j\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{(\lambda\, p)^j}{j!} \mathrm{e}^{\lambda\,(1-p)} & \textit{(car on reconnaît la série exponentielle de paramètre } \lambda\,(1-p)\textit{)} \\ & = & \dfrac{(\lambda\, p)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda(1-p)} & \\ & = & \dfrac{(\lambda\, p)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda\, p} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } X(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, p)}$$

□

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\dbinom{y}{k} = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (y-i)$, et $\dbinom{y}{0} = 1$.

5. Écrire une fonction en **Scilab** d'entête `function c = CoeffBin(y, k)` qui calcule $\dbinom{y}{k}$.

Démonstration.

```
1  function c = CoeffBin(y, k)
2    c = 1
3    if k >= 1 then
4      for i = 0:(k-1)
5        c = c ⋆ (y - i) / (i + 1)
6      end
7    end
8  endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce code :

× en ligne 2, on initialise la variable `c` dont le but est de contenir en fin de programme
$$\begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (y-i) & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}.$$
Cette variable `c` est donc initialisée à 1.

× Deux cas se présentent alors.

- si $k = 0$, alors la variable `c` contient déjà le bon résultat : 1.
  Aucune opération n'est donc nécessaire.
- si $k \geqslant 1$, alors on met à jour la variable `c` à l'aide d'une structure itérative (boucle `for`).
  Pour ce faire, on multiplie au $i^{\text{ème}}$ tour de boucle par la quantité $\frac{y-i}{i+1}$.
  Ainsi, `c` contient bien $\frac{1}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (y-i)$ en sortie de boucle. En effet :

$$\binom{y}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \prod_{i=0}^{k} (y-i) = \frac{1}{k+1} \; \frac{1}{k!} \times (y-k) \prod_{i=0}^{k-1} (y-i) = \frac{y-k}{k+1} \binom{y}{k}$$

Commentaire

Notons que le choix d'initialiser `c` à 1 n'est pas annodin. La variable `c` étant un produit, on choisit le réel 1 car il s'agit de l'élément neutre pour le produit.
De même, pour initialiser une variable contenant une somme, on choisira plutôt l'élément neutre pour la somme, c'est-à-dire le réel 0.

□

6. *La formule du binôme négatif.*
Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0, 1[$.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \, dt$.

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

Démonstration.

- Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x \quad & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x-t \leqslant x(1-t) && \textit{(car, comme } t \leqslant x < 1, \textit{ alors : } 1-t > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x-t \leqslant x-xt \\ & \Leftrightarrow \quad -x \leqslant -t \leqslant -x\,t \\ & \Leftrightarrow \quad x \geqslant t \geqslant x\,t \end{aligned}$$

Or on sait déjà : $t \leqslant x$.
De plus, comme $x \in [0, 1[$, on a : $x\,t \leqslant t$.
Le dernier encadrement est donc vérifié.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall t \in [0, x],\ 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x \quad &\Leftrightarrow \quad 0^n \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n && \textit{(car la fonction } t \mapsto t^n \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \leqslant x^n \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}} && \textit{(car } \frac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or : $t \leqslant x$. Donc : $1 - t \geqslant 1 - x$.
Par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{c+1}$ sur $[0, +\infty[$: $(1-t)^{c+1} \geqslant (1-x)^{c+1}$. Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\, dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\, dt$$

Donc :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x dt$$

$$\frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \left[\, t \,\right]_0^x = \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\, x$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.}$$

- Si $n = 0$. On a déjà montré : $(1-t)^{c+1} \geqslant (1-x)^{c+1}$. Donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

Comme $t < 1$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{1}{(1-t)^{c+1}}\, dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{(1-x)^{c+1}}\, dt$$

Donc :

$$0 \leqslant I_0 \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x dt$$

$$\frac{1}{(1-x)^{c+1}} \left[\, t \,\right]_0^x = \frac{1}{(1-x)^{c+1}}\, x$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 0 \leqslant I_0 \leqslant \frac{x}{(1-x)^{c+1}}.}$$

Commentaire

On isole ici le cas $n = 0$, car l'argument « la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ » est faux si $n = 0$. On traite donc ce cas à part. $\square$

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\dbinom{c+n}{n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par définition du coefficient binomial :

$$\begin{aligned}
\binom{c+n}{n} &= \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \big((c+n) - i\big) \\
&= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c+k) \qquad \textit{(avec le changement d'indice } k = n - i\textit{)} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (c+k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{c+k}{k} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{c}{k} + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)}$$

$\square$

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

Démonstration.
La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0, droite d'équation :

$$y = x$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in\,]-1, +\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t.}$$

Commentaire

L'énoncé demande seulement de montrer que cette inégalité est vraie pour tout $t \in [0, +\infty[$. Bien évidemment, celle-ci étant vraie sur $]-1, +\infty[$, elle l'est en particulier sur $[0, +\infty[$. $\square$

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

Démonstration.

- Soit $k \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} \leqslant -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Or, comme $k \geqslant 2$: $-\dfrac{1}{k} \in \,]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer la question précédente et ainsi la dernière inégalité est vraie.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).}$$

Commentaire

- La démonstration présentée nécessite d'avoir démontré l'inégalité de la question précédente pour tout $t \in \,]-1, +\infty[$.
- On pouvait également utiliser l'inégalité des accroissements finis.
  On note $g : t \mapsto \ln(t)$. On sait :
  × g est dérivable sur $[k-1, k]$,
  × $\forall t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant g'(t)$.
  On en déduit, par inégalités des accroissements finis :
  $$\forall (x, y) \in [k-1, k]^2,\ \frac{1}{k}(y-x) \leqslant g(y) - g(x)$$
  En appliquant cette inégalité à $y = k$ et $x = k-1$, on obtient :
  $$\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$
- On pouvait également procéder par intégration.
  Tout d'abord : $\forall t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t}$.
  Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leqslant k$) :
  $$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt = \Big[\ \ln(t)\ \Big]_{k-1}^{k} = \ln(k) - \ln(k-1)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On somme l'inégalité précédente pour k variant de 2 à n. On obtient :
  $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big) = \ln(n) - \cancel{\ln(1)}$$

On ajoute 1 de chaque côté de l'inégalité :

$$\begin{array}{ccc} 1+\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} & \leqslant & 1+\ln(n) \\ \shortparallel & & \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} & & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1+\ln(n)}$$

□

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left(\dbinom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1+\ln(n))$.

En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \ln\left(\dbinom{c+n}{n}\right) & = & \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{c}{k}\right)\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)(i)}}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{c}{k}\right) & \\ & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{c}{k} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)(ii)}}\textit{)} \\ & \leqslant & c \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} & \\ & \leqslant & c\big(1+\ln(n)\big) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)(iii)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\big(1+\ln(n)\big)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on déduit de l'inégalité précédente :

$$\binom{c+n}{n} \leqslant \exp\big(c(1+\ln(n))\big)$$

$$\boxed{\text{De plus } x^{n+1} \geqslant 0, \text{ donc : } 0 \ \leqslant\ \binom{c+n}{n} x^{n+1} \ \leqslant\ \exp(c+c\,\ln(n))\,x^{n+1}.}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \exp(c+c\,\ln(n))\,x^{n+1} & = & \exp(c+c\,\ln(n))\ \exp((n+1)\ln(x)) \\ & = & \exp\big(c+c\,\ln(n)+(n+1)\ln(x)\big) \\ & = & \exp\big(c+\ln(x)+c\,\ln(n)+n\,\ln(x)\big) \\ & = & \exp\left(n\,\ln(x)\left(\dfrac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)}+\dfrac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)}+1\right)\right) \end{array}$$

  De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c}{\ln(x)}\ \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.

  Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} + \dfrac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1 = 1$.

Comme $x \in [0,1[$, alors $\ln(x) < 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln(x) = -\infty$.

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln(x) \left(\dfrac{c+\ln(x)}{n \ln(x)} + \dfrac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 \right) = -\infty$.

Par composition par la fonction exp, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln(x) \left(\frac{c+\ln(x)}{n \ln(x)} + \frac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 \right) \right) = 0$$

- Finalement :

  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$

  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(c + c \ln(n))\, x^{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0.}$$

□

c) En conclure que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dbinom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c} - c \binom{c+n}{n} I_n$$

  Pour démontrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dbinom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente et que sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^c}$, on va donc démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***6.a)*** :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$$

  On en déduit :

$$0 \leqslant c \binom{c+n}{n} I_n \leqslant \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$$

  Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

  Ainsi :

  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$

  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c}{(1-x)^{c+1}} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k \text{ converge et : } \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}.}$$

□

7. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\,p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

Démonstration.

- Comme $p \in\,]0,1[$, alors :

$$p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r \ \geqslant\ 0$$

- Montrons que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k$ converge et que sa somme vaut 1.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \ =\ \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\,p^r \ =\ p^r\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k$$

  On applique la question précédente à $c=r$ et $x=1-p$ (on a bien $c>0$ et $x\in[0,1[$. On obtient que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k \ =\ \frac{1}{(\cancel{1}-(\cancel{1}-p))^r}\ =\ \frac{1}{p^r}$$

  On en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \ =\ \cancel{p^r}\,\frac{1}{\cancel{p^r}}\ =\ 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (p_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

□

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

Démonstration.
On note $V = Y+1$.

- Tout d'abord, comme $Y(\Omega)=\mathbb{N}$, on a : $V(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
- Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$[V=k]\ =\ [Y+1=k]\ =\ [Y=k-1]$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([V=k]) \ &=\ \mathbb{P}([Y=k-1])\ =\ p_{k-1}\\ &=\ \binom{1+(k-1)-1}{k-1}(1-p)^{k-1}\,p^1 \qquad \textit{(car } Y \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres } 1 \textit{ et } p\textit{)}\\ &=\ (1-p)^{k-1}\,p\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît la loi géométrique de paramètre } p : V \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

□

9. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$: $k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'une part :

$$k \binom{r+k-1}{k} = k \, \frac{(r+k-1)!}{k!\,(r+k-1-k)!} = \cancel{k} \, \frac{(r+k-1)!}{\cancel{k}\,(k-1)!\,(r-1)!} = \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r-1)!}$$

- D'autre part :

$$r \binom{r+k-1}{k-1} = r \, \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r+k-1-(k-1))!} = \cancel{r} \, \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,\cancel{r}\,(r-1)!} = \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r-1)!}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \geqslant 1,\ k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à $r+k-1$ éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient $r+k-1$ individus)
On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant 1 élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure 1 représentant de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{r+k-1}{k}$ possibilités.
On distingue ensuite 1 élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
(on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite 1 représentant de ces individus)
Ainsi, il y a $k \binom{r+k-1}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, une partie à $(k-1)$ éléments : $\binom{r+k-1}{k-1}$ possibilités.
On forme alors P en ajoutant à ces $k-1$ éléments, l'élément à distinguer. Cet élément est choisi parmi les $r+k-1-(k-1) = r$ éléments restants dans E : $\binom{r}{1} = r$ possibilités.
(on choisit d'abord $k-1$ individus puis on leur adjoint 1 individu parmi les r restants dans E)
Ainsi, il y a $\binom{r+k-1}{k-1}\, r$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat.

□

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

Démonstration.

- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\, \mathbb{P}([Z = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rll}
& \sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([Z = k]) & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} k \dbinom{r+k-1}{k} (1-p)^k\, p^r & \\
= & p^r \sum\limits_{k=1}^{n} k \dbinom{r+k-1}{k} (1-p)^k & \\
= & p^r \sum\limits_{k=1}^{n} r \dbinom{r+k-1}{k-1} (1-p)^k & \textit{(d'après la question précédente)} \\
= & r\, p^r \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{r+k}{k} (1-p)^{k+1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1} & \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([W = k]) & \textit{(où } W \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres } r+1 \textit{ et } p\textit{)}
\end{array}$$

Or la famille $([W = k])_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}([W = n])$ converge et sa somme vaut 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(Z) \ = \ r\, \dfrac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([W = k]) \ = \ r\, \dfrac{1-p}{p}\, 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) \ = \ r\, \dfrac{1-p}{p}}$$

□

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Démonstration.

- La v.a.r. $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n(n-1)\, \mathbb{P}([Z = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{cll}
& \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}([Z=k]) & \\
= & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}([Z=k]) & \\
= & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k-1)k \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k\, p^r & \\
= & \displaystyle p^r \sum_{k=2}^{n} (k-1)\, r \binom{r+k-1}{k-1} (1-p)^k & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \\
= & \displaystyle r\, p^r \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{r+k}{k} (1-p)^{k+1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & \displaystyle r\, \frac{1-p}{p} \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} & \\
= & \displaystyle r\, \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} & \\
= & \displaystyle r\, \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} k\,\mathbb{P}([W=k]) & \textit{(où } W \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres } r+1 \textit{ et } p\textit{)}
\end{array}$$

Or, d'après la question précédente, la v.a.r. W admet une espérance et $\mathbb{E}(W) = (r+1)\,\dfrac{1-p}{p}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Z(Z-1) \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \;=\; r\,\frac{1-p}{p}\,\mathbb{E}(W) \;=\; r\,\frac{1-p}{p}\,(r+1)\,\frac{1-p}{p}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \;=\; (r+1)r\,\left(\frac{1-p}{p}\right)^2}$$

- D'autre part :

$$Z^2 \;=\; Z(Z-1)+Z$$

Ainsi, Z^2 admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.

$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } Z \text{ admet une variance.}}$$

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z^2) \;=\; \mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big)+\mathbb{E}(Z) \;=\; (r+1)r\,\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\,\frac{1-p}{p}$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(Z) & = & \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 \\
& = & (r+1)r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 + r\ \dfrac{1-p}{p} - r^2 \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 \\
& = & r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2\ (\cancel{r} + 1 - \cancel{r}) + r\ \dfrac{1-p}{p} \\
& = & r\left(\dfrac{1-p}{p}\right)\left(\dfrac{1-p}{p} + 1\right) \ = \ r\left(\dfrac{1-p}{p}\right)\left(\dfrac{1-\cancel{p}+\cancel{p}}{p}\right) \\
& = & r\ \dfrac{1-p}{p^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Z) \ = \ r\ \dfrac{1-p}{p^2}}$$

□

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}([N = k])$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

Démonstration. Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : p_k = p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

▸ **Initialisation** :

$$p_0 \prod_{i=1}^{1} \left(a + \frac{b}{i}\right) \ = \ p_0 \left(a + \frac{b}{1}\right) \ = \ \left(a + \frac{b}{1}\right) p_{1-1} \ = \ p_1$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $p_{k+1} = p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k+1} \left(a + \frac{b}{i}\right)$).

$$\begin{array}{rcll}
p_{k+1} & = & \left(a + \dfrac{b}{k+1}\right) p_k & \textit{(d'après l'énoncé)} \\
& = & \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \times p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
& = & p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k+1} \left(a + \frac{b}{i}\right) &
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right).}$$

□

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

Démonstration.

- On a déjà : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Si $a = 0$, alors, d'après la question précédente :
  $$p_k \;=\; p_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{b}{i} \;=\; p_0 \, \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} b}{\prod\limits_{i=1}^{k} i} \;=\; p_0 \, \frac{b^k}{k!}$$
- On sait de plus que la famille $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc :
  $$1 \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \;=\; \mathbb{P}([N = 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \;=\; p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$$
  Or, en reconnaissant une série exponentielle de paramètre b :
  $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \;&=\; \sum_{k=1}^{+\infty} p_0 \frac{b^k}{k!} \;=\; p_0 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \\ &=\; p_0 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} - 1 \right) \;=\; p_0 \left(\mathrm{e}^b - 1 \right) \end{aligned}$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned} & 1 = p_0 + p_0(\mathrm{e}^b - 1) \\ \text{donc} \qquad & 1 = \mathrm{e}^b \, p_0 \\ \text{d'où} \qquad & \mathrm{e}^{-b} = p_0 \end{aligned}$$
  Finalement :
  $$\forall k \in \mathbb{N}, \; \mathbb{P}([N = k]) = \mathrm{e}^{-b} \, \frac{b^k}{k!}$$
  $$\boxed{\text{On reconnaît une loi de Poisson de paramètre } b : N \hookrightarrow \mathcal{P}(b).}$$

Commentaire

D'après l'énoncé, la variable aléatoire N est « à valeurs dans $\mathbb{N}$ ». Cela signifie exactement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (et non $N(\Omega) = \mathbb{N}$).

□

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde. Supposons : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait :
  $$p_{k+1} \;=\; \left(a + \frac{b}{k+1} \right) p_k$$
  On va donc chercher à démontrer qu'il existe un entier k_0 tel que :
  $$a + \frac{b}{k_0 + 1} < 0$$

En effet, si c'est le cas, on aura :

× d'une part $p_{k_0+1} > 0$ par hypothèse,

× d'autre part, comme $p_{k_0} > 0$ et $a + \dfrac{b}{k_0+1} < 0$: $p_{k_0+1} = \left(a + \dfrac{b}{k_0+1}\right) p_{k_0} < 0$.

Ce qui est absurde.

- On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{k+1} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{b}{k+1} < -a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} < -\frac{a}{b} \\ &\Leftrightarrow \quad k+1 > -\frac{b}{a} && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{, avec } -\frac{b}{a} > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad k > -\frac{b}{a} - 1 \end{aligned}$$

On choisit alors : $k_0 = \left\lceil -\dfrac{b}{a} - 1 \right\rceil$ pour obtenir la contradiction voulue.

$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe } i_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } p_{i_0} = 0.}$

- On note alors : $s = \min(i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0)$.
L'entier s existe car l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide (l'entier k_0 appartient à cet ensemble).
Soit $k \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

× si $k < s$ (*i.e.* $k \leqslant s-1$), alors, par définition de s : $p_k > 0$.

× si $k \geqslant s$, alors : $p_k = 0$.
En effet, on sait, par définition de s : $p_s = 0$.
De plus, d'après la question ***10.a)*** :

$$p_k \;=\; p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \;=\; p_0 \prod_{i=1}^{s} \left(a + \frac{b}{i}\right) \prod_{i=s+1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \;=\; p_s \prod_{i=s+1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \;=\; 0$$

$\boxed{\text{En choisissant } r = s-1, \text{ on a bien : } \forall k \leqslant r,\ p_k > 0 \text{ et } \forall k > r,\ p_k = 0.}$ □

(ii) Montrer : $b = -a(r+1)$.

Démonstration.
Par définition de r :

× $p_r > 0$,

× $p_{r+1} = 0$.

Or : $p_{r+1} = \left(a + \dfrac{b}{r+1}\right) p_r$. On en déduit :

$$\begin{aligned} & a + \frac{b}{r+1} = 0 \\ \text{donc} \quad & \frac{b}{r+1} = -a \\ \text{d'où} \quad & b = -a(r+1) \end{aligned}$$

$\boxed{b = -a(r+1)}$ □

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.

En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![1, r]\!]$. D'après les questions ***10.a)*** et ***10.c)(ii)*** :

$$\begin{aligned} p_k &= p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a - \frac{a(r+1)}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(-a\left(-1 + \frac{r+1}{i}\right)\right) \\ &= p_0\ (-a)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{r+1-i}{i} = p_0\ (-a)^k \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (r+1-i)}{\prod\limits_{i=1}^{k} i} \\ &= p_0\ (-a)^k\ \frac{r\ (r-1)\cdots(r+1-k)}{k!} \\ &= p_0\ (-a)^k\ \frac{\frac{r!}{(r-k)!}}{k!} = p_0\ (-a)^k\ \frac{r!}{k!\,(r-k)!} \\ &= p_0\ (-a)^k \binom{r}{k} \end{aligned}$$

- De plus : $(-a)^0 \binom{r}{0} p_0 = p_0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![0, r]\!],\ p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0.}$$

- La famille $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = \mathbb{P}([N=0]) + \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}([N=k]) + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^{r} (-a)^k \binom{r}{k} p_0 + 0 \qquad \textit{(d'après ce qui précède)} \\ &= p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k &= \binom{r}{0} (-a)^0 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k 1^{r-k} \\ &= (-a+1)^r \qquad \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}.}$$

Commentaire

- Dans cette partie, on a seulement l'inclusion : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$.
- On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide.

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent :
  - × si $k \in [\![0, r]\!]$, alors, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([N = k]) &= p_k = (-a)^k \binom{r}{k} \frac{1}{(1-a)^r} \\ &= \binom{r}{k} (-a)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^r \\ &= \binom{r}{k} \left(-\frac{a}{1-a}\right)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^{r-k}\end{aligned}$$

  De plus, on a bien : $1 - \dfrac{1}{1-a} = \dfrac{1-a-1}{1-a} = -\dfrac{a}{1-a}$.

  - × si $k \geqslant r+1$, alors, par définition de r :

$$\mathbb{P}([N = k]) = p_k = 0$$

  On reconnaît alors la loi binomiale de paramètres r et $-\dfrac{a}{1-a}$.

- On cherche enfin à exprimer r en fonction de a et b.
  D'après la question ***10.c)(ii)*** :

$$b = -a(r+1) \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = r+1 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} - 1 = r$$

$$\boxed{\text{Finalement : } N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\frac{b}{a} - 1, -\frac{a}{1-a}\right).}$$

Commentaire

Cette question amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :
  $$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$
- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Même si cela ne correspond pas directement à la définition, il est d'usage courant de confondre, dans le cas des v.a.r. discrètes, l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$) et l'ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle (dans le cas où X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$).
- Ainsi, s'il est fréquent de considérer qu'une v.a.r. X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si :
  × $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$,
  × $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

  on trouvera aussi :
  × $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
  × $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  × $\forall k \in [\![r+1, +\infty[\![$, $\mathbb{P}([X = k]) = 0$.

  La première définition est axée sur l'ensemble image et la seconde sur le support de X. □

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \dbinom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k\, p_0$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
Par définition des coefficients binomiaux donnée en partie II :

$$\begin{array}{rcll} \dbinom{\frac{b}{a} + k}{k} & = & \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} \left(\dfrac{b}{a} + k - i\right) & \\ & = & \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{b}{a} + j\right) & \textit{(avec le changement d'indice } j = k - i\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k} j} \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{b}{a} + j\right) & \\ & = & \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \dfrac{\frac{b}{a} + j}{j} \ = \ \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{b}{a\, j} + 1\right) & \end{array}$$

On en déduit :

$$\binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \;=\; \left(\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{b}{a\,j}+1\right)\right)\left(\prod_{j=1}^{k} a\right) \;=\; \prod_{j=1}^{k}\left(\left(\frac{b}{a\,j}+1\right)a\right) \;=\; \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{b}{j}+a\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N},\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right) = p_0\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k.}$$

□

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

Démonstration.

- Commençons par déterminer p_0.
  La famille $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([N=k]) \;=\; \mathbb{P}([N=0]) + \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([N=k]) \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_0\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k \;=\; p_0\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k\right) \end{aligned}$$

  Or :

$$\begin{aligned} 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k &= \binom{\frac{b}{a}+0}{0}a^0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k \\ &= \frac{1}{(1-a)^{\frac{b}{a}+1}} \qquad \textit{d'après } \textbf{\textit{6.c)}} \textit{ appliquée à } c=\frac{b}{a}+1 \textit{ et } x=a) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}.}$$

- Ensuite : $N(\Omega)\subset\mathbb{N}$.
- Soit $k\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$p_k \;=\; \binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k(1-a)^{\frac{b}{a}+1} \;=\; \binom{(\frac{b}{a}+1)+k-1}{k}a^k(1-a)^{\frac{b}{a}+1}$$

$$\boxed{\text{On obtient que } N \text{ suit la loi binomiale négative de paramètres } \frac{b}{a}+1 \text{ et } 1-a.}$$

□

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N)=\dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N)=\dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

Démonstration.
Trois cas se présentent.

- si $a=0$: $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc une espérance et une variance et :}\\ \mathbb{E}(N)=b=\dfrac{0+b}{1-0} \text{ et } \mathbb{V}(N)=b=\dfrac{0+b}{(1-0)^2}.\end{array}}$$

- si $a < 0$: $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a}-1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc une espérance et une variance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(N) = \left(-\frac{b}{a}-1\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right) = \frac{b+a}{\cancel{a}}\,\frac{\cancel{a}}{1-a} = \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) = \left(-\frac{b}{a}-1\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right)\left(1+\frac{a}{1-a}\right) = \frac{b+a}{1-a}\,\frac{1}{1-a} = \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

- si $a > 0$: N suit une loi binomiale négative de paramètres $\dfrac{b}{a}+1$ et $1-a$.

$$\boxed{\text{D'après les questions } \textbf{\textit{9.b)}} \text{ et } \textbf{\textit{9.c)}}\text{, la v.a.r. } N \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\left(\frac{b}{a}+1\right)a}{1-a} = \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) = \frac{\left(\frac{b}{a}+1\right)a}{(1-a)^2} = \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

□

Partie IV – L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un évènement et Y une variable aléatoire, on note, si elle existe, $\mathbb{E}_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ en fonction de q_0 puis établir que $r_0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_0^n\, p_n$.

13. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n)$? en déduire : $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1) = \dfrac{j}{n}$.

b) Établir : $r_j = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big)\left(a+\dfrac{b}{n}\right)p_{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{[X_n=j]}\left(a+\dfrac{b}{j}U_1\right)\mathbb{P}\big([X_n = j]\big)p_{n-1}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}_{[X_n=j]}\left(a+\frac{b}{j}U_1\right)\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \sum_{i=0}^{j}\left(a+\frac{b\,i}{j}\right)\mathbb{P}\big([U_1 = i]\big)\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-i]\big)$$

d) En conclure : $r_j = \sum\limits_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$, puis :

$$r_j = \frac{1}{1 - aq_0} \left(\sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{b\,i}{j}\right) q_i r_{j-i} \right)$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombre r_j et ainsi de déterminer la loi de X.

14. *Des exemples d'application.*

a) Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

(i) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $r_j = \dfrac{p}{1 - a + ap} \left(a + \dfrac{b}{j}\right) r_{j-1}$.
En déduire que X suit une loi de Panjer.

(ii) Retrouver les résultats des questions 3 et 4 de la partie I.

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b.
Soit p un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

(i) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la famille de nombre $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par $q_i = \alpha \frac{p^i}{i}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (*loi logarithme discrète*). On pose $q_0 = 0$.
On suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.

(ii) Montrer que pour tout entier $j \geqslant 1$, on a : $r_j = \dfrac{b\,\alpha}{j} \sum\limits_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}$.

(iii) En utilisant un changement d'indice, établir pour tout $j \geqslant 2$: $r_j = \left(p + \dfrac{p(b\alpha - 1)}{j}\right) r_{j-1}$, puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.

(iv) Conclure que X suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de b, α et p.